4. cvičení z PST

25. října 2017

4.1 (náhodná veličina)

Zjistěte, zda $X : \Omega \to \mathbb{R}$ je náhodná veličina, pokud $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je

- $\Omega = \{a, b, c\}$,
- $\mathcal{A} = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\big\}$,
- $P(A) = \frac{1}{3}|A|$, $A \in \mathcal{A}$.

a platí-li, že

$X(a) = 1,\ X(b) = 2,\ X(c) = 3$.

Řešení:

Nejdříve bychom měli zkontrolovat, jestli máme opravdu Kolmogorův model:

Systém $\mathcal{A}$ je zřejmě uzavřen na sjednocení i na doplňky. Tedy $\mathcal{A}$ je σ-algebra, která je navíc podalgebrou $\exp(\{a, b, c\})$. Z tohoto důvodu budou splněny i požadavky na pravděpodobnost, protože ta má stejný předpis jako v jednom z předchozích příkladu, kde už to, jak víme, funguje. Tím spíše to musí platit i pro menší systém množin. Tedy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je opravdu Kolmogorův model.

Definice: Náhodná veličina je takové zobrazení, že vzor každého intervalu v $\mathbb{R}$ je množina z $\mathcal{A}$. Tuto vlastnost stačí ověřit jen pro určité typy intervalů v $\mathbb{R}$:

$$X \text{ je náhodná veličina} \quad \Leftrightarrow \quad (\forall t \in \mathbb{R}) \;\; X^{-1}\Big((-\infty, t\rangle\Big) \in \mathcal{A}$$

Podíváme se, jak vypadají vzory všech potřebných intervalů:

$$X^{-1}\Big((-\infty, t\rangle\Big) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \le t\} = \begin{cases} \emptyset & ,\ t \in (-\infty, 1) \\ \{a\} & ,\ t \in \langle 1, 2) \\ \{a, b\} & ,\ t \in \langle 2, 3) \\ \{a, b, c\} & ,\ t \in \langle 3, +\infty) \end{cases}$$

X tedy není náhodná veličina, protože např.

$$X^{-1}\Big((-\infty, 2.5\rangle\Big) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \le 2.5\} = \{a, b\} \notin \mathcal{A} .$$

Problematické jsou hodnoty $t \in \langle 2, 3)$. K této situaci došlo proto, že zobrazení X oddělilo svými hodnotami prvky b a c, které jsou v rámci σ-algebry $\mathcal{A}$ nerozlišitelné (není už žádná menší množina z $\mathcal{A}$, která by obsahovala b a neobsahovala c nebo naopak).

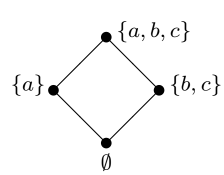
Jak tedy zvolit nějakou jinou (nekonstantní) náhodnou veličinu Y na Ω? Stačí např. položit

$$Y(a) = 1,\ Y(b) = Y(c) = 2 .$$

(Problémového intervalu jsme se zbavili tak, že všem prvkům z množiny $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in \langle 2, 3)\}$ jsme ”nastavili”nějakou stejnou společnou hodnotu.)

Můžeme si ještě pro názornost zakreslit Hasseův diagram pro $\mathcal{A}$:

$\mathcal{A}$:



4.2 (diskrétní veličina - binomické rozdělení)

Házíme třikrát mincí a náhodná veličina X má za hodnotu počet líců. Předpokládáme, že jsou hody nezávislé a pravděpodobnost, že padne líc v daném hodu, je $p = 0.1$. Určete:

(a) Pravděpodobnostní funkci p_X náhodné veličiny X.

(b) Distribuční funkci F_X náhodné veličiny X.

(c) Střední hodnotu $E(X)$ náhodné veličiny X.

(d) Rozptyl $D(X)$ a směrodatnou odchylku $\sigma(X)$.

Řešení:
Příklad 1: `https://math.feld.cvut.cz/prucha/psi/wcv3.pdf`

4.3 (diskrétní náhodná veličina)

Házíme třemi (nezávislými) kostkami. Náhodná veličina X je počet dvojic kostek, na nichž padl stejný výsledek. Určete její pravděpodobnostní funkci, distribuční funkci, kvantil, střední hodnotu a rozptyl.

Řešení:
Máme $\Omega = \{(a,b,c) \mid a,b,c \in \{1,\dots,6\}\}$ s Laplaceovou pravděpodobností a veličina má tedy předpis

$$X\Big((a,b,c)\Big) = \begin{cases} 3 & , \ a=b=c \\ 1 & , \ |\{a,b,c\}| = 2 \\ 0 & , \ |\{a,b,c\}| = 3 \ . \end{cases}$$

Nenulové hodnoty pravděpodobnostní funkce zapíšeme pomocí tabulky:

i	0	1	3
$p_X(i)$	$\frac{6\cdot5\cdot4}{6^3} = \frac{5}{9}$	$\frac{\binom{6}{2}\cdot2\cdot3}{6^3} = \frac{5}{12}$	$\frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}$

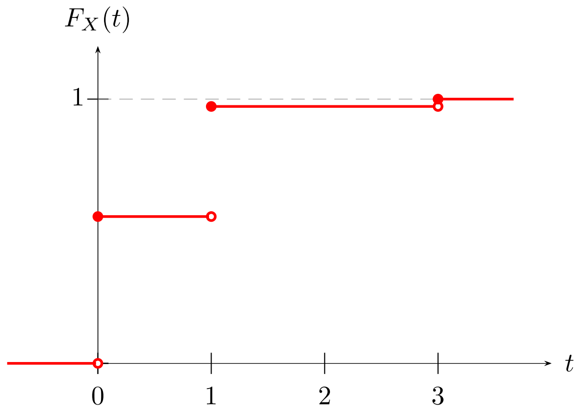
$$E(X) = \sum_{i\in\mathbb{R}} i \cdot p_X(i) = 0 \cdot \frac{5}{9} + 1 \cdot \frac{5}{12} + 3 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$E(X^2) = \sum_{i\in\mathbb{R}} i^2 \cdot p_X(i) = 0^2 \cdot \frac{5}{9} + 1^2 \cdot \frac{5}{12} + 3^2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{2}{3} \doteq 0.667$$

$$D(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = \frac{2}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{12} \doteq 0.417 \ .$$

Distribuční funkce je

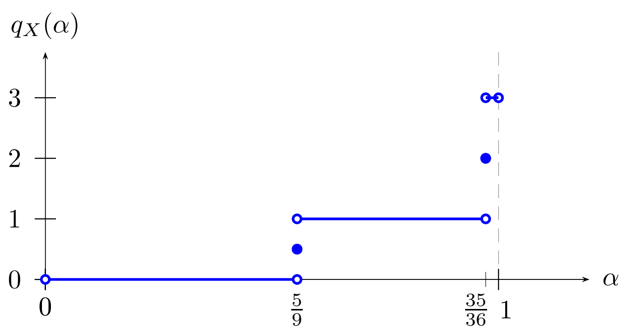
$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & , \ t < 0 \\ \frac{5}{9} & , \ t \in \langle 0, 1) \\ \frac{5}{9} + \frac{5}{12} = \frac{35}{36} & , \ t \in \langle 1, 3) \\ 1 & , \ t \geq 3 \end{cases}$$



Kvantil je

$$q_X(\alpha) = \begin{cases} 0 & , \ \alpha \in (0, \frac{5}{9}) \\ \frac{1}{2} & , \ \alpha = \frac{5}{9} \\ 1 & , \ \alpha \in (\frac{5}{9}, \frac{35}{36}) \\ 2 & , \ \alpha = \frac{35}{36} \\ 3 & , \ \alpha \in (\frac{35}{36}, 1) \ . \end{cases}$$

s grafem



4.4 (diskrétní náhodná veličina)

Náhodná veličina X představuje hodnoty, které padají na pravidelné hrací kostce. Pro veličinu $Y = 2X - 1$ určete její střední hodnotu, rozptyl, distribuční funkci a kvantil.

Řešení:
Veličina X má hodnoty $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ a pravděpodobnostní funkcí

$$p_X(i) = \begin{cases} \frac{1}{6} & , \ i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 0 & , \ \text{jinak.} \end{cases}$$

Protože $E(Y) = E(2X-1) = 2E(X) - 1$ a $D(Y) = D(2X-1) = D(2X) = 2^2 D(X)$, stačí zjistit střední hodnotu a rozptyl pro veličinu X:

$$E(X) = \sum_{i \in \mathbb{R}} i \cdot p_X(i) = \frac{1}{6}\big(1+2+3+4+5+6\big) = \frac{1}{2}(1+6) = \frac{7}{2} = 3.5$$

$$E(X^2) = \sum_{i \in \mathbb{R}} i^2 \cdot p_X(i) = \frac{1}{6}\big(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2\big) = \frac{91}{6} \doteq 15.166$$

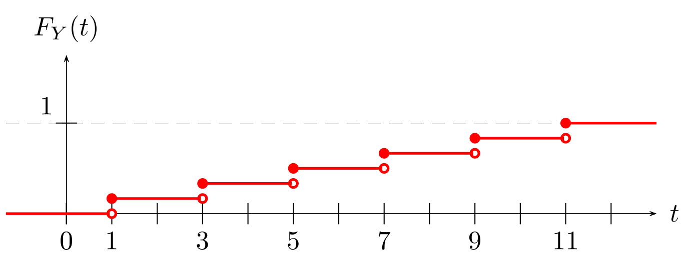
$$D(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12} \doteq 2.9167\ .$$

Takže máme

$$E(Y) = 6 \quad \text{a} \quad D(Y) = \frac{35}{3} \doteq 11,67\ .$$

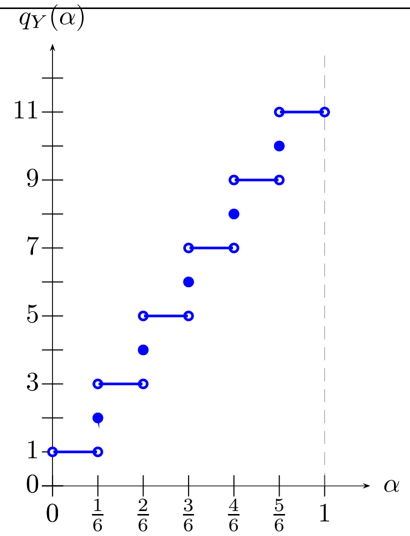
Veličina Y nabývá hodnot $1,3,5,7,9,11$ se stejnou pravděpodobností, takže distribuční funkce bude

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & ,\ t < 1 \\ \frac{1}{6}i & ,\ t \in \langle 2i-1, 2i+1),\quad i = 1,2,3,4,5 \\ 1 & ,\ t \geq 11 \end{cases}$$



Kvantil pak je

$$q_Y(\alpha) = \begin{cases} 1 & ,\ \alpha \in (0, \frac{1}{6}) \\ 2i & ,\ \alpha = \frac{i}{6},\quad i = 1,2,3,4,5 \\ 2i+1 & ,\ \alpha \in (\frac{i}{6}, \frac{i+1}{6}),\quad i = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$



4.5 (spojitá náhodná veličina)

Házíme kuličku (o zanedbatelném průměru) na kruh o poloměru $r = 1$. Náhodná veličina X je vzdálenost dopadu kuličky od středu kruhu. Určete:

(a) Obor hodnot a typ rozdělení náhodné veličiny X.

(b) Distribuční funkce F_X a hustotu f_X.

(c) Pravděpodobnosti $P(1/4 < X < 1/3)$ a $P(X > 1/2)$.

(d) Střední hodnotu $E(X)$, rozptyl $D(X)$ a směrodatnou odchylku $\sigma(X)$.

(e) $\varepsilon > 0$ takové, že $P(|X - E(X)| < \varepsilon) = 0.95$,
neboli 95% interval spolehlivosti tvaru $(E(X) - \varepsilon, E(X) + \varepsilon)$.

Řešení:
Příklad 5: `https://math.feld.cvut.cz/prucha/psi/wcv3.pdf`

4.6 (spojitá náhodná veličina)

Náhodná veličina X má rozdělení dané hustotou

$$f_X(t) = \begin{cases} a \cdot \ln t & , \ t \in (1, e) \\ 0 & , \ \text{jinak.} \end{cases}$$

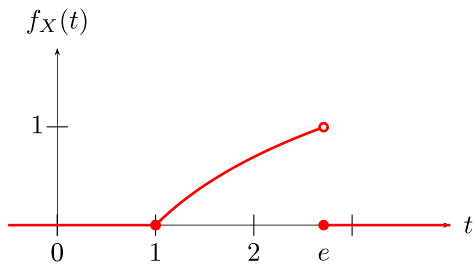
Určete konstantu a, distribuční funkci, střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X.

Řešení:
Pro určení konstanty a potřebujeme, aby

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\ dt = a \int_1^e \ln t\ dt = a\Big[t(\ln t - 1)\Big]_1^e = a$$

tedy $a = 1$.

Graf hustoty:



Distribuční funkce je rovna

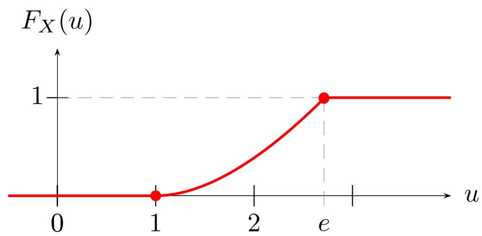
$$F_X(u) = \int_{-\infty}^{u} f_X(t)\ dt$$

a pro $u \in (1, e)$ tedy máme

$$F_X(u) = \int_1^u \ln t\ dt = \Big[t(\ln t - 1)\Big]_1^u = u \ln u - u + 1$$

celkově pak

$$F_X(u) = \begin{cases} 0 & , \ u \leq 1 \\ u \ln u - u + 1 & , \ u \in (1, e) \\ 1 & , \ u \geq e. \end{cases}$$



Pomocí hustoty spočítáme střední hodnotu

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_X(t)\ dt = \int_1^e t \cdot \ln t\ dt = \left[\frac{t^2}{4}(2\ln t - 1)\right]_1^e = \frac{e^2+1}{4} \doteq 2.097$$

a rozptyl

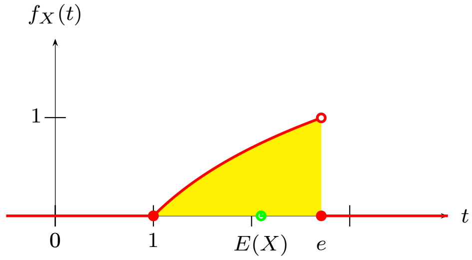
$$D(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2\ .$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot f_X(t)\ dt = \int_1^e t^2 \cdot \ln t\ dt = \left[\frac{t^3}{9}(3\ln t - 1)\right]_1^e = \frac{2e^3+1}{9}\ .$$

Tedy

$$D(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = \frac{2e^3+1}{9} - \left(\frac{e^2+1}{4}\right)^2 \doteq 0.176\ .$$

Názornou interpretací střední hodnoty spojité veličiny X, která má hustotu, je, že $E(X)$ je vodorovná souřadnice (zelený bod) těžiště plochy, která je určena grafem hustoty f_X (žlutá plocha):



V tomto případě speciálně musí platit, že $1 < E(X) < e$ (tedy $1 < \frac{e^2+1}{4} \doteq 2.097 < e \doteq 2.71$), což je evidentně splněno. V případě, že by vypočtené hodnota $E(X)$ tyto nerovnosti nesplňovala, znamenalo by to, že jsme někde ve výpočtu udělali chybu.

Podobně - hodnota $D(X)$ musí vždy vyjít nezáporně (pokud existuje)! Pokud ne, někde ve výpočtu nastala chyba.

4.7 (spojitá náhodná veličina)

Spojitá náhodná veličina X má hustotu pravděpodobnosti

$$f_X(t) = \begin{cases} c \cdot (1 - |t|) & , \ -1 \le t \le 1 \\ \\ 0 & , \ \text{jinak.} \end{cases}$$

(a) Určete konstantu c a načrtněte graf funkce f_X. Vypočítejte distribuční funkci F_X a načrtněte její graf.

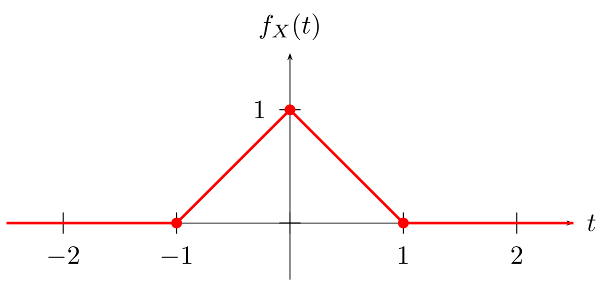
(b) Určete $P(X \in \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle)$.

Řešení:

(a) Podmínka na hustotu je, aby to byla nezáporná funkce s integrálem rovným jedné. Tedy

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\ dt = c \int_{-1}^{1} (1 - |t|)\ dt = 2c \int_{0}^{1} (1 - t)\ dt = 2c \cdot \frac{1}{2} = c$$

a funkce f_X je zřejmě nezáporná. Její graf je



Pro distribuční funkci F_X pro $u \in \langle -1, 0 \rangle$ máme

$$F_X(u) = \int_{-\infty}^{u} f_X(t)\ dt = \int_{-1}^{u} (1 + t)\ dt = \left[t + \frac{t^2}{2} \right]_{-1}^{u} = u + \frac{u^2}{2} + \frac{1}{2}$$

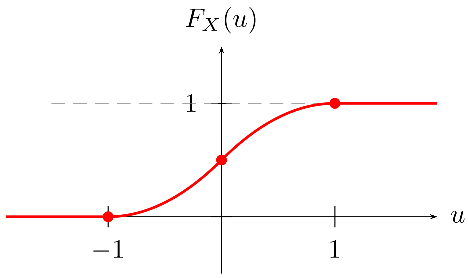
a pro $u \in \langle 0, 1\rangle$ máme

$$F_X(u) = \int_{-\infty}^{u} f_X(t)\ dt = \int_{-1}^{0} (1+t)\ dt + \int_{0}^{u} (1-t)\ dt = \frac{1}{2} + \left[t - \frac{t^2}{2}\right]_0^u = u - \frac{u^2}{2} + \frac{1}{2}\ .$$

Celkem tedy pro distribuční funkci dostáváme

$$F_X(u) = \begin{cases} 0 & ,\ u \in (-\infty, -1\rangle, \\ u + \frac{u^2}{2} + \frac{1}{2} & ,\ u \in (-1, 0\rangle, \\ u - \frac{u^2}{2} + \frac{1}{2} & ,\ u \in (0, 1\rangle, \\ 1 & ,\ u \in (1, \infty). \end{cases}$$

a její graf je:



(b) Zde máme

$$P\left(X \in \left\langle \frac{1}{2}, 1 \right\rangle\right) = F(1) - F\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}\ .$$

Případně tuto hodnotu můžeme snadno spočítat jako plochu trojúhelníka pod grafem hustoty na intervalu $\langle \frac{1}{2}, 1\rangle$.