6. cvičení z PST

8. listopadu 2017

6.1 (rozdělení veličiny vytvořené jako směs)

V urně je 15 hracích kostek, z toho 10 správných, na nichž padají všechna čísla se stejnou pravděpodobností, a 5 vadných, na nichž padá šestka s pravděpodobností $\frac{1}{2}$, ostatní čísla s pravděpodobností $\frac{1}{10}$. Náhodně vybereme jednu kostku a hodíme. Jaká je pravděpodobnost možných výsledků?

Řešení:

Použijeme jev

$A =$ "*vytažená kostka je správná*",

a veličinu

$X =$ "*hodnota, která padla na vytažené kostce*".

Pak pro $i \in \{1, \ldots, 6\}$ dostáváme z věty o úplné pravděpodobnosti

$$P(X = i) = P(X = i|A) \cdot P(A) + P(X = i|\overline{A}) \cdot P(\overline{A}).$$

Z předpokladu pak máme

$$P(A) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}, \quad P(X = i|A) = \frac{1}{6} \quad \text{pro všechna } i$$

a

$$P(X = i|\overline{A}) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \ i = 6 \\ \frac{1}{10} & , \ i \neq 6 \ . \end{cases}$$

Celkem tedy dostáváme pro $i = 6$:

$$P(X = i) = \begin{cases} \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{18} & , \ i = 6 \\ \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{3} = \frac{13}{90} & , \ i \neq 6 \ . \end{cases}$$

Veličina X je vlastně směs dvou veličin

$$X_1 : A \to \mathbb{R} \quad \text{a} \quad X_2 : \overline{A} \to \mathbb{R}$$

které znamenají

$X_1 =$ "*hodnota, která padla na* ***správné*** *vytažené kostce*"

$X_2 =$ "*hodnota, která padla na* ***vadné*** *vytažené kostce*"

Tedy $X = \mathrm{Mix}_c(X_1, X_2)$, kde koeficient c odpovídá poměru *správných* kostek ku všem kostkám, tj. $c = \frac{10}{15} = P(A)$. Z definice směsi pak máme

$$P(X = i) = c \cdot P_1(X_1 = i) + (1 - c) \cdot P_2(X_2 = i)$$

kde

$$P_1(\cdot) = P(\ \cdot\ |A) \quad \text{a} \quad P_2(\cdot) = P(\ \cdot\ |\overline{A})$$

jsou pravděpodobnosti na prostorech $\Omega_1 = A$ a $\Omega_2 = \overline{A}$ (přitom je $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$).

Opět tedy máme větu o úplné pravděpodobnosti.

6.2 (normální rozdělení)

Systematická chyba měření je 5 a směrodatná odchylka je 36. Jaká je pravděpodobnost toho, že chyba měření nepřekročí v absolutní hodnotě 5? (Předpokládáme normální rozdělení chyby.)

Řešení:

Máme veličinu

$X =$ ”*chyba měření*”,

s normálním rozdělením $N(5, 36^2)$. Tedy $F_X(t) = \Phi(\frac{t-5}{36})$ pro $t \in \mathbb{R}$, takže

$$P(-5 \le X \le 5) = F_X(5) - F_X(-5) = \Phi(\tfrac{5-5}{36}) - \Phi(\tfrac{-5-5}{36}) =$$
$$= \Phi(0) - \Phi(-\tfrac{5}{18}) \doteq 0.5 - \Big(1 - \Phi(0.2778)\Big) \doteq 0.5 - 0.391 = 0.109\ .$$

Používáme, že $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

6.3 (normální rozdělení)

Délka zubního kartáčku se řídí normálním rozdělením o střední hodnotě 14 cm a rozptylu 6 cm. Pouzdro je dlouhé 13.5 cm. Jaká je pravděpodobnost, že vezmeme-li libovolný jeden kartáček, že se do pouzdra akorát vejde, tj. nebude o více než 1 cm kratší?

Řešení:

Označíme-li délku zubního kartáčku X, potom platí $X \sim N(14, 6)$ a $F_X(t) = \Phi\left(\frac{t-14}{\sqrt{6}}\right)$ pro $t \in \mathbb{R}$ (tedy hlavně pro t z okolí střední hodnoty veličiny X). Chceme znát

$$P(12.5 < X < 13.5)\ .$$

Takže

$$P(12.5 < X < 13.5) = F_X(13.5) - F_X(12.5) = \Phi\left(\tfrac{13.5-14}{\sqrt{6}}\right) - \Phi\left(\tfrac{12.5-14}{\sqrt{6}}\right) =$$
$$= \left(1 - \Phi\left(\tfrac{0.5}{\sqrt{6}}\right)\right) - \left(1 - \Phi\left(\tfrac{1.5}{\sqrt{6}}\right)\right) = \Phi\left(\tfrac{1.5}{\sqrt{6}}\right) - \Phi\left(\tfrac{0.5}{\sqrt{6}}\right) = 0.729 - 0.579 = 0.15.$$

Pravděpodobnost, že se kartáček do pouzdra akorát vejde, činí 15%.

Poznámka: Jak může veličina X označující délku (tj. nezáporná) mít normální rozdělení? Samozřejmě nemůže, ale v našem případě tento předpoklad uplatňujeme pouze v rozumném okolí kolem střední hodnoty $E(X) = 14$ cm. Zde konkrétně v intervalu $\langle 12.5 \text{ cm}, 13.5 \text{ cm}\rangle$. Tedy v rámci těchto výchylek od střední hodnoty, je distribuční funkce F_X popsána přibližně distribuční funkcí normálního rozdělení a jak je to dál už nás nezajímá. Při výpočtech ale obvykle toto explicitně nezmiňujeme.

6.4 (normální rozdělení)

Oštěpařky Anna a Barbora mají střední hodnoty hodů po řadě 67 m a 75 m a směrodatné odchylky 6 m a 3 m. Předpokládejme nezávislá normální rozdělení. Odhadněte pravděpodobnost, že při jednom hodu hodí Anna dál.

Řešení:
Náhodná veličina

$A =$ “*délka hodu Anny*”

má rozdělení $\mathrm{N}\left(67, 6^2\right)$ a veličina

$B =$ “*délka hodu Barbory*”

má rozdělení $\mathrm{N}\left(75, 3^2\right)$. Zajímá nás $P(A > B) = P(A - B > 0)$. Protože veličiny A a B jsou nezávislé, tak veličina $A - B$ má také normální rozdělení, a sice $\mathrm{N}\left(67 - 75, 6^2 + 3^2\right) = \mathrm{N}(-8, 45)$. Takže

$$P(A > B) = P(A - B > 0) = 1 - F_{\mathrm{N}(-8,45)}(0) = 1 - \Phi\left(\tfrac{0-(-8)}{\sqrt{45}}\right) \doteq$$
$$\doteq 1 - \Phi(1.1926) \doteq 1 - 0.883 = 0.117\,.$$

6.5 (transformace spojité veličiny)

Náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení na intervalu $(-2, 2)$. Zobrazíme ji funkci h, definovanou následovně:

$$h(x) = \begin{cases} 0 & , \ x < 0 \\ x^2 & , \ 0 \le x \le 1 \\ 1 & , \ x > 1. \end{cases}$$

Nalezněte rozdělení náhodné veličiny $Y = h(X)$.

Řešení:
(a) **Krátké řešení:** Protože $0 \le Y = h(X) \le 1$, tak

$$F_Y(t) = P(h(X) \le t) = \begin{cases} 0 & , \ t < 0 \\ 1 & , \ t \ge 1. \end{cases}$$

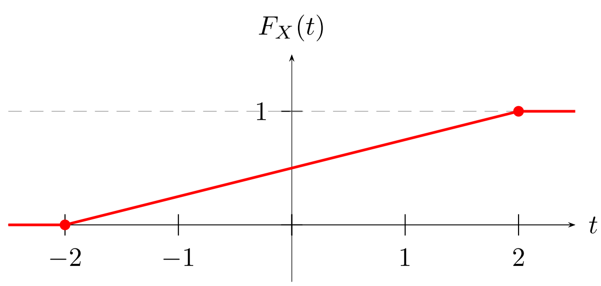
Pro $t \in \langle 0, 1)$ máme

$$h(X) \le t \ \Leftrightarrow \ \Big(X < 0 \ \vee \big(X \in \langle 0, 1\rangle \ \& \ X^2 \le t\big)\Big) \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ \Big(X < 0 \ \vee \big(X \in \langle 0, 1\rangle \ \& \ X \le \sqrt{t}\big)\Big) \ \Leftrightarrow \ X \le \sqrt{t}$$

a tudíž

$$F_Y(t) = P(h(X) \le t) = P(X \le \sqrt{t}) = F_X(\sqrt{t})\,.$$

Teď už stačí jen dosadit za F_X. Protože veličina X je spojitá s konstantní hustotou na intervalu $(-2, 2)$, tak její distribuční funkce F_X bude lineární na tomto intervalu. Jinak bude konstantní a celkově spojitá:

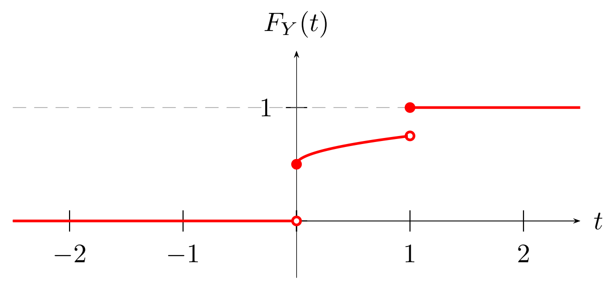


Tedy

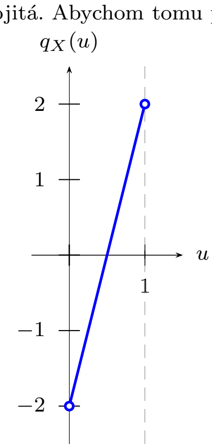
$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & ,\ t < -2 \\ \frac{t+2}{4} & ,\ t \in \langle -2, 2\rangle \\ 1 & ,\ t > 2. \end{cases}$$

a po dosazení dostaneme:

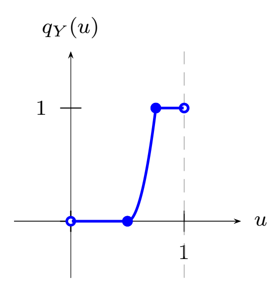
$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & ,\ t < 0 \\ \frac{\sqrt{t}+2}{4} & ,\ t \in \langle 0, 1) \\ 1 & ,\ t \geq 1. \end{cases}$$



Veličina $Y = h(X)$ tedy kupodivu nemá spojité rozdělení ale smíšené, přestože veličina X je (absolutně) spojitá a i funkce h je spojitá. Abychom tomu porozuměli, podíváme se na kvantil. Kvantil q_X je spojitý:



A tedy i kvantil $q_Y = q_{h(X)} = h(q_X)$ je spojitý:



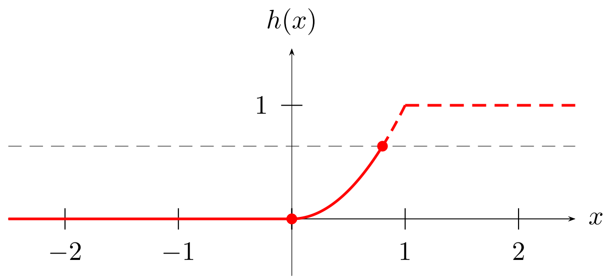
Ale protože je místy konstantní, tak F_Y má skoky.

(b) **Řešení použitelné i pro obecnější případy:** Pro distribuční funkci veličiny $Y = h(X)$

máme

$$F_Y(t) = P(Y \le t) = P(h(X) \le t) = P\Big(h(X) \in (-\infty, t\rangle\Big) = P\Big(X \in h^{-1}(-\infty, t\rangle\Big)$$

Podíváme se proto, jak vypadají množiny $h^{-1}(-\infty, t\rangle$. To snadno uvidíme z grafu funkce h:



Když "uřízneme"z grafu všechno, co je nad danou hladinou t a zbytek promítneme na vodorovnou osu, dostaneme právě hledanou množinu. Tedy:

$$h^{-1}(-\infty, t\rangle = \begin{cases} \mathbb{R} & , \ t \ge 1 \\ (-\infty, \sqrt{t}\rangle & , \ 0 \le t < 1 \\ \emptyset & , \ t < 0. \end{cases}$$

Takže můžeme psát:

$$F_Y(t) = P\Big(X \in h^{-1}(-\infty, t\rangle\Big) = \begin{cases} P(X \in \mathbb{R}) = 1 & , \ t \ge 1 \\ P\Big(X \in (-\infty, \sqrt{t}\rangle\Big) = F_X(\sqrt{t}) & , \ 0 \le t < 1 \\ P(X \in \emptyset) = 0 & , \ t < 0. \end{cases}$$

Zbytek postupu už pak bude stejný jako v předchozím případě.

6.6 (exponenciální rozdělení, transformace veličiny)

Náhodná veličina X má exponenciální rozdělení s distribuční funkcí

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & , \ t \le 0 \\ 1 - e^{-2t} & , \ t > 0 \ . \end{cases}$$

Určete

(a) rozdělení náhodné veličiny $Y = 2 - 2X$.

(b) střední hodnotu $E(Y)$ a rozptyl $D(Y)$.

(c) kvantily q_X a q_Y.

Řešení:

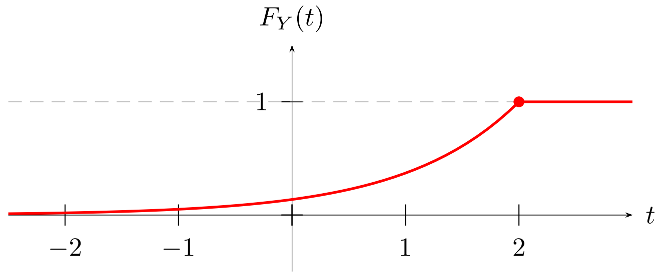
(a) Najdeme rozdělení veličiny $Y = 2 - 2X$:

$$F_Y(t) = P(Y \le t) = P(2 - 2X \le t) = P\Big(1 - \frac{t}{2} \le X\Big) = 1 - P\Big(X < 1 - \frac{t}{2}\Big) = 1 - F_X\Big(1 - \frac{t}{2}\Big)$$

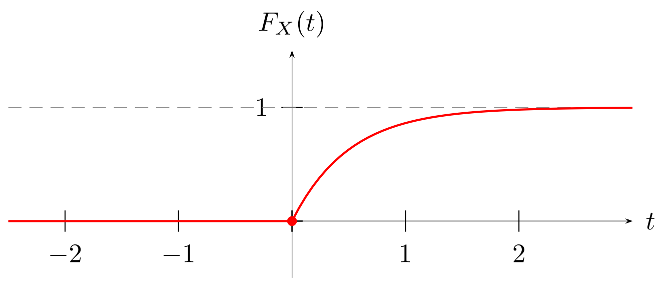
Pro $1-\frac{t}{2}\leq 0$ je tedy $F_Y(t)=1$ a pro $1-\frac{t}{2}>0$ máme $F_Y(t)=1-(1-e^{-2(1-\frac{t}{2})})=e^{t-2}$. Celkově tedy dostáváme

$$F_Y(t)=\begin{cases} e^{t-2} & ,\ t<2 \\ 1 & ,\ t\geq 2\ . \end{cases}$$

Graf F_Y si snadno nakreslíme:



ale je dobré si uvědomit, že pro tvar $F_Y(t)=1-F_X\Big(-\frac{1}{2}(t-2)\Big)$ lze F_Y získat z grafu F_X:



následující posloupností transformací:

- $g_0(a):=F_X(a)$
- $g_1(b):=g_0(-\frac{1}{2}b)=F_X(-\frac{1}{2}b)$ (graf g_0 se otočí kolem osy y a 2-krát se roztáhne podle středu 0 ve směru osy x)
- $g_2(c):=g_1(c-2)=F_X(-\frac{1}{2}(c-2))$ (graf g_1 se posune o vektor $(2,0)$, tj. doprava o 2)
- $g_3(d):=1-g_2(d)=1-F_X\Big(-\frac{1}{2}(d-2)\Big)=F_Y(d)$ (graf g_2 se otočí kolem osy x a posune nahoru o 1)

Protože transformace nezávisle t proměnné lze vyjádřit také jako $F_X\big(-\frac{1}{2}(t-2)\big)=F_X\big(1+(-\frac{1}{2}t)\big)$, můžeme na začátku alternativně použít tento postup:

- $\widetilde{g}_1(b):=g_0(1+b)=F_X(1+b)$ (graf g_0 se posune o vektor $(-1,0)$, tj. doleva o 1)
- $\widetilde{g}_2(c):=\widetilde{g}_1(-\frac{1}{2}c)=F_X\big(1+(-\frac{1}{2}c)\big)$ (graf $\widetilde{g}_1$ se otočí kolem osy y a 2-krát se roztáhne podle středu 0 ve směru osy x)

Evidentně máme $\widetilde{g}_2(c)=g_2(c)$. Poslední transformace (tj. že graf g_2 se otočí kolem osy x a posune nahoru o 1) zůstává stejná.

Protože veličina Y se získá z X jako $Y=h(X)$, kde $h(x)=2-2x$ je (ostře) *klesající* spojitá funkce, mohli jsme k odvození F_Y a jejího grafu použít také vztahu známého z přednášky, a sice:

$$F_Y(t)=F_{h(X)}(t)=1-F_X(h^{-1}(t))$$

kde $h^{-1}(y)=1-\frac{1}{2}y$ je inverze k h (tj. vypočítaná ze vztahu $y=2-2x$.)

(b) Určíme ještě střední hodnotu (tentokrát pro změnu z distribuční funkce):

$$E(Y) = -\int_{-\infty}^{0} F_Y(t)\,dt + \int_{0}^{\infty} \big(1 - F_Y(t)\big)\,dt = -\int_{-\infty}^{0} e^{t-2}\,dt + \int_{0}^{2} \big(1 - e^{t-2}\big)\,dt = 2 - \Big[e^{t-2}\Big]_{-\infty}^{2} = 1$$

Mohli jsme také využít, že X má exponenciální rozdělení s parametrem $\tau = \frac{1}{2}$ a střední hodnotou $E(X) = \tau$. Pak bychom opět měli

$$E(Y) = E(2 - 2X) = 2 - 2E(X) = 1 \ .$$

Pro rozptyl můžeme jednoduše využít, že $D(X) = \tau^2 = \frac{1}{4}$, takže

$$D(Y) = D(2 - 2X) = D(-2X) = (-2)^2 D(X) = 1 \ .$$

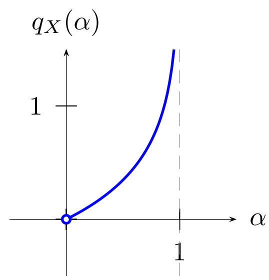
(c) Určíme q_X. Kvantil q_X je inverzní funkce k F_X tam, kde je F_X ostře rostoucí - a to je na $(0, \infty)$. Pro $t \in (0, \infty)$ je tedy

$$\alpha = 1 - e^{-2t} \quad \Leftrightarrow \quad e^{-2t} = 1 - \alpha \quad \Leftrightarrow \quad t = -\tfrac{1}{2}\ln(1 - \alpha)$$

a tudíž

$$q_X(\alpha) = -\tfrac{1}{2}\ln(1 - \alpha) \quad \text{pro} \quad \alpha \in (0, 1)$$

s grafem

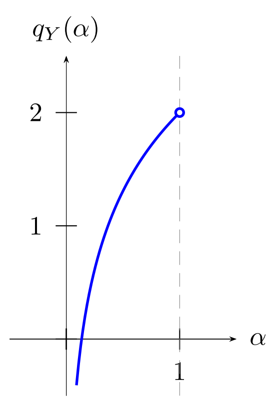


Pro určení kvantilu q_Y použijeme transfomaci pomocí ostře *rostoucí* funkce $h(x) = 2x - 2$, tj. máme $Y = 2 - 2X = -h(X)$. Pro $\alpha \in (0, 1)$ je tedy

$$q_Y(\alpha) = q_{-h(X)}(\alpha) = -q_{h(X)}(1 - \alpha) = -h\Big(q_X(1 - \alpha)\Big) =$$

$$= -2q_X(1 - \alpha) + 2 = \ln(\alpha) + 2$$

s grafem



6.7 (transformace náhodné veličiny)

Nezáporná náhodná veličina X má hustotu

$$f_X(t) = \begin{cases} 0 & , \ t < 1 \\ c \cdot t^{-3} & , \ t \geq 1 \end{cases}$$

kde c je vhodná konstanta. Určete

(a) hodnotu c,

(b) distribuční funkci F_X,

(c) distribuční funkci F_Y a hustotu pravděpodobnosti f_Y veličiny $Y = \frac{1}{X+1}$.

(d) $E(Y)$ pomocí q_Y.

Řešení:

(a) Pro určení konstanty c potřebujeme, aby

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\ dt = c \int_{1}^{\infty} t^{-3}\ dt = c\Big[\frac{t^{-2}}{-2}\Big]_1^{\infty} = \frac{c}{2}$$

tedy $c = 2$.

(b) Distribuční funkce je rovna

$$F_X(u) = \int_{-\infty}^{u} f_X(t)\ dt$$

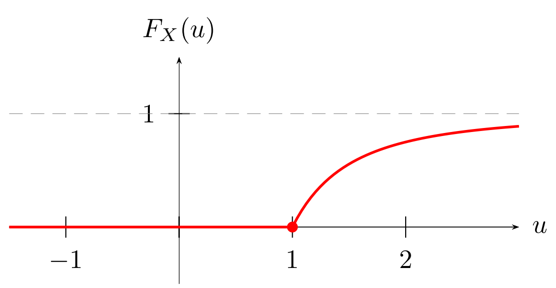
a pro $u \geq 1$ tedy máme

$$F_X(u) = \int_{1}^{u} 2t^{-3}\ dt = \Big[-t^{-2}\Big]_1^{u} = 1 - \frac{1}{u^2}$$

celkově pak

$$F_X(u) = \begin{cases} 0 & , \ u \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{u^2} & , \ u \geq 1 \end{cases}$$

s grafem



(c) Protože X je nezáporná spojitá veličina, pro distribuční funkci F_Y pro $u > 0$ máme

$$F_Y(u) = P(Y \leq u) = P\Big(\frac{1}{X+1} \leq u\Big) = P\Big(\frac{1}{u} \leq X + 1\Big) = P\Big(\frac{1}{u} - 1 \leq X\Big) =$$

$$= 1 - P\Big(X < \frac{1}{u} - 1\Big) = 1 - F_X\Big(\frac{1}{u} - 1\Big)\ .$$

Pro $\frac{1}{u} - 1 \geq 1$ a $u > 0$ tak dostáváme

$$F_Y(u) = 1 - F_X\Big(\frac{1-u}{u}\Big) = 1 - \Big(1 - \frac{1}{(\frac{1-u}{u})^2}\Big) = \frac{u^2}{(1-u)^2}\ .$$

Pro $\frac{1}{u} - 1 \leq 1$ a $u > 0$ pak máme

$$F_Y(u) = 1 - F_X\Big(\frac{1}{u} - 1\Big) = 1\ .$$

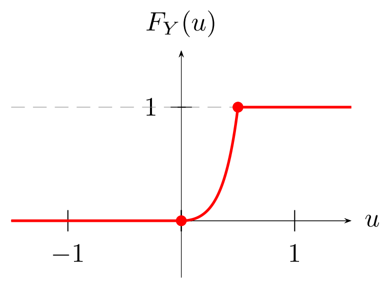
A nakonec, X je nezáporná veličina, takže $Y = \frac{1}{X+1} > 0$ a tudíž pro $u \leq 0$ je

$$F_Y(u) = P(Y \leq 0) = 0\ .$$

Celkově pak dostáváme

$$F_Y(u) = \begin{cases} 0 & ,\ u \leq 0 \\ \frac{u^2}{(1-u)^2} & ,\ u \in (0, \frac{1}{2}\rangle \\ 1 & ,\ u \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

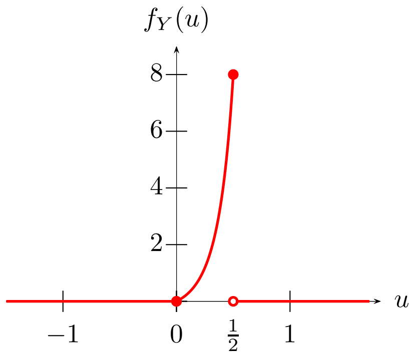
s grafem



Distribuční funkce F_Y je opět (absolutně) spojitá.
Hustotu pravděpodobnosti f_Y veličiny Y dostaneme jako

$$f_Y(u) = F_Y'(u) = \begin{cases} \frac{2u}{(1-u)^3} & ,\ u \in \langle 0, \frac{1}{2}\rangle \\ 0 & ,\ \text{jinak}\ . \end{cases}$$

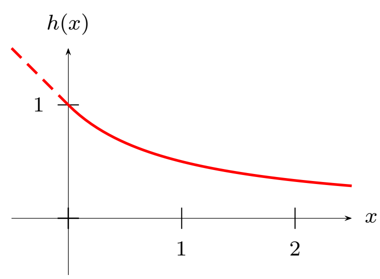
Její graf je:



Při výpočtu F_Y a f_Y jsme také mohli postupovat takto:

Veličinu Y vyjádříme jako $Y = h(X)$ pro vhodnou diferencovatelnou monotónní funkci $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Tvar funkce $h(x)$ je jasný pro nezáporná x a pro záporná x si ji můžeme definovat vpodstatě libovolně (ale tak, aby byla spojitá a diferencovatelná):

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & , \ x \geq 0 \\ \text{"vhodný tvar"} & , \ x < 0 \ . \end{cases}$$



Protože h je (ostře) klesající, máme pro $t > 0$ rovnost

$$F_Y(t) = P\Big(h(X) \leq t\Big) = P\Big(X \geq h^{-1}(t)\Big) = 1 - P\Big(X < h^{-1}(t)\Big) = 1 - F_X\Big(h^{-1}(t)\Big)$$

kde inverzní funkce h^{-1} má tvar

$$h^{-1}(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} - 1 & , \ t \in (0, 1\rangle \\ \text{"vhodný tvar"} & , \ t > 1 \ . \end{cases}$$

Teď už stačí jen dosadit atd.

Hustotu f_Y můžeme teď snadněji spočítat pomocí hustoty f_X (v bodech $t > 0$, pro ostatní t to je konstantní nula). Pro ostře klesající diferencovatelnou h tak máme:

$$f_Y(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_Y(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(1 - F_X\big(h^{-1}(t)\big)\Big) = -F_X'\big(h^{-1}(t)\big) \cdot \frac{1}{h'\big(h^{-1}(t)\big)} =$$

$$= -\frac{f_X\big(h^{-1}(t)\big)}{h'\big(h^{-1}(t)\big)} \ .$$

Po dosazení:

$$f_Y(t) = \begin{cases} -\frac{f_X\left(\frac{1}{t} - 1\right)}{h'\left(\frac{1}{t} - 1\right)} = \frac{1}{t^2} \cdot f_X\left(\frac{1}{t} - 1\right) & , \ t \in (0, 1\rangle \\ 0 & , \ \text{jinak} \ . \end{cases}$$

Ověřte si sami, že výsledek je stejný!

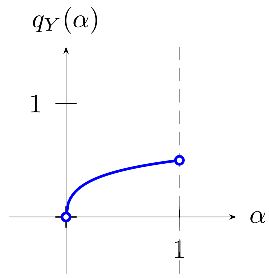
(d) Nejdříve si tedy určíme q_Y. Kvantil q_Y je inverzní funkcí k ostře rostoucí funkci $F_Y(u) = \frac{u^2}{(1-u)^2}$ pro $u \in (0, \frac{1}{2})$. Tedy

$$\alpha = \frac{u^2}{(1-u)^2} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{\alpha} = \frac{u}{1-u} = \frac{1}{1-u} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad u = 1 - \frac{1}{1+\sqrt{\alpha}}$$

a tudíž

$$q_Y(\alpha) = 1 - \tfrac{1}{1+\sqrt{\alpha}} \quad \text{pro} \quad \alpha \in (0,1)$$

s grafem



Pro střední hodnotu pak máme

$$E(Y) = \int_0^1 q_Y(\alpha)\ d\alpha = \int_0^1 1 - \tfrac{1}{1+\sqrt{\alpha}}\ d\alpha = 1 - \int_0^1 \tfrac{1}{1+\sqrt{\alpha}}\ d\alpha = \begin{bmatrix} \scriptstyle\sqrt{\alpha}=t \\ \scriptstyle\frac{d\alpha}{2\sqrt{\alpha}}=dt \end{bmatrix} =$$

$$= 1 - \int_0^1 \tfrac{2t}{1+t}\ dt = 1 - \int_0^1 2 - \tfrac{2}{1+t}\ dt = -1 + 2\big[\ln(1+t)\big]_{t=0}^{t=1} = 2\ln 2 - 1\ .$$

6.8 (spojitý náhodný vektor)

Náhodný vektor má spojité rozdělení určené sdruženou hustotu f, kde

$$f(u,v) = \begin{cases} \frac{3}{2}u^2 v & (u,v) \in (0,1) \times (0,2) \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

Určete

(a) marginální hustoty f_X a f_Y náhodných veličin X a Y;

(b) sdruženou distribuční funkci $F_{X,Y}$ a marginální distribuční funkce F_X a F_Y;

(c) vypočtěte pravděpodobnost $P(X \le Y)$;

(d) rozhodněte o závislosti a nezávislosti náhodnyých veličin X a Y.

Řešení:

Příklad 6: `https://math.feld.cvut.cz/prucha/psi/wcv4.pdf`

6.9 (spojitý náhodný vektor)

Náhodný vektor (X,Y) má spojité rovnoměrné rozdělení v množině

$$E = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1,\ y \ge 0\}\ .$$

Určete:

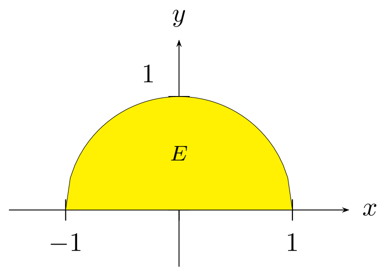
(a) sdruženou hustotu $f_{X,Y}$ a marginální hustoty f_X, f_Y.

(b) marginální distribuční funkce F_X, F_Y.

(c) rozhodněte, zda jsou náhodné veličiny X a Y závislé či nezávislé.

(d) hodnotu $P(X \le Y)$.

Řešení:
Množina E je půlkruh



(a) Sdružená hustota je tedy dána jako

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c & , \ (x,y) \in E \\ 0 & , \ \text{jinak,} \end{cases}$$

kde c je konstanta taková, aby integrál z hustoty byl roven 1, tedy

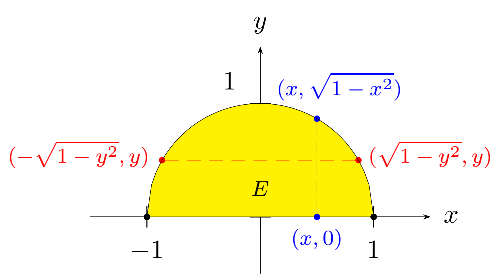
$$1 = \iint_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)\ dx\ dy = \iint_E c\ dx\ dy = c \iint_E 1\ dx\ dy = c \cdot \frac{\pi}{2}$$

neboli

$$c = \frac{2}{\pi}\ .$$

Integrál $\iint\limits_E 1\ dx\ dy$ jsme mohli buď skutečně spočítat (např. pomocí polárních souřadnic) nebo prostě využít jeho geometrickou interpretaci, tj. že je to obsah půlkruhu o poloměru 1.

Marginální hustota je nyní jen příslušně parciálně zintegrovaná sdružená hustota. Funkci $f_{X,Y}$ tedy vždy integrujeme podél vhodného řezu množiny E:



Pro $x \in \langle -1, 1\rangle$ tak máme

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\ dy = \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{\pi}\ dy = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}$$

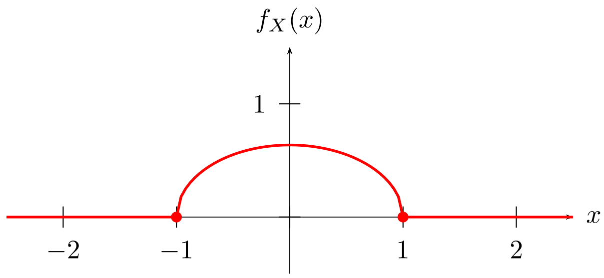
a pro $y \in \langle 0,1\rangle$ máme

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{2}{\pi}\,dx = \frac{4}{\pi}\sqrt{1-y^2}\ .$$

Celkově tedy

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} & ,\ x \in \langle -1,1\rangle \\ 0 & ,\ \text{jinak,} \end{cases}$$

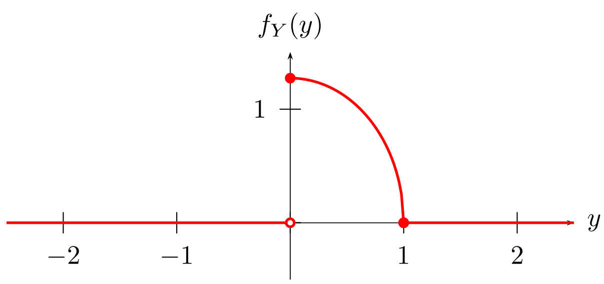
s grafem



a podobně

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{4}{\pi}\sqrt{1-y^2} & ,\ y \in \langle 0,1\rangle \\ 0 & ,\ \text{jinak,} \end{cases}$$

s grafem



(b) Veličiny X a Y jsou nezávislé právě když

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)\cdot F_Y(y) \ \text{ pro všechna } \ (x,y) \in \mathbb{R}^2\ .$$

V případě existence sdružené hustoty je to ekvivalentní tomu, že

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y) \ \text{ pro SKORO všechna } \ (x,y) \in \mathbb{R}^2\ .$$

Tedy množina, kde to neplatí, má nulový obsah.

Speciálně, pro nezávislé veličiny musí platit následující (pouze nutná podmínka!):

Nechť

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f_{X,Y}(x,y) \neq 0\}$$

a $\pi_1, \pi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jsou projekce na jednotlivé souřadné osy, tj. $\pi_1(x,y) = x$ a $\pi_2(x,y) = y$. Pokud jsou veličiny X a Y *nezávislé*, má množina

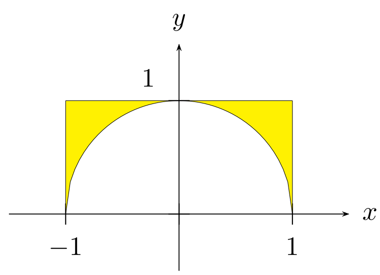
$$\Big(\pi_1(S) \times \pi_2(S)\Big) \setminus S$$

nulový obsah.

V našem konkretním případě $S = E$ a $\pi_1(E) = \langle -1, 1\rangle$ a $\pi_2(E) = \langle 0, 1\rangle$. Ovšem množina

$$\Big(\pi_1(E) \times \pi_2(E)\Big) \setminus E \;\; = \;\; \text{“obdélník”} \;\; \setminus \;\; \text{“půlkruh”}$$

tj.



zřejmě nulový obsah NEMÁ. Veličiny X a Y tudíž NEJSOU nezávislé.

(d) Jev “$X \leq Y$” je množina $\Phi^{-1}(F)$, kde $\Phi = (X,Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ je náš náhodný vektor a

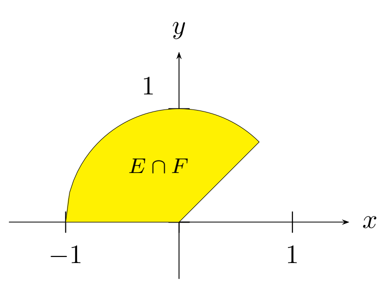
$$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$$

tj. $\Phi^{-1}(F)$ je vzor množiny $F \subseteq \mathbb{R}^2$ při zobrazení Φ. Pravděpodobnost tohoto jevu tak dostaneme zintegrováním hustoty přes množinu F, neboli

$$P(X \leq Y) = \iint\limits_{F = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq b\}} f_{X,Y}(x,y)\; dx\; dy = \iint\limits_{E \cap F} \tfrac{2}{\pi}\; dx\; dy\;.$$

Množina $E \cap F$ je tvaru

$$E \cap F : \quad x^2 + y^2 \leq 1 \quad \wedge \quad x \leq y \quad \wedge \quad y \geq 0$$



Protože rozdělení pravděpodobnosti je rovnoměrné na E, jedná se prostě o geometrickou pravděpodobnost, a protože plocha $E \cap F$ jsou $\frac{3}{4}$ plochy E (přitom obsah plochy E je evidentně $\frac{\pi}{2}$), tak máme ihned, že

$$P(X \le Y) = \frac{\iint\limits_{E\cap F} 1 \; dx \; dy}{\frac{\pi}{2}} = \frac{\text{obsah } E \cap F}{\text{obsah } E} = \tfrac{3}{4} \; .$$

Ale stejně si integrál ještě spočítáme explicitně a to pomocí substituce polárními souřadnicemi

$$P(X \le Y) = \iint\limits_{E\cap F} \tfrac{2}{\pi} \; dx \; dy = \begin{bmatrix} \scriptstyle x=r\cos\varphi \\ \scriptstyle y=r\sin\varphi \\ \scriptstyle 0\le r\le 1 \\ \scriptstyle \frac{\pi}{4}\le\varphi\le\pi \end{bmatrix} = \tfrac{2}{\pi} \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \int\limits_{0}^{1} r \; dr \; d\varphi =$$

$$= \tfrac{2}{\pi} \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \left[\tfrac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=1} \; d\varphi = \tfrac{1}{\pi} \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} 1 \; d\varphi = \tfrac{\pi - \frac{\pi}{4}}{\pi} = \tfrac{3}{4} \; .$$

6.10 (spojitý náhodný vektor)

Náhodný vektor (X, Y) má spojité rovnoměrné rozdělení v množině

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \ge 0, x + y \le 1, y - x \le 1\} \; .$$

Určete:

(a) sdruženou hustotu $f_{X,Y}$.

(b) marginální hustoty f_X, f_Y.

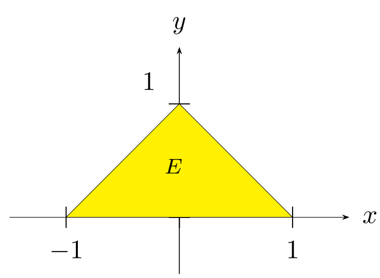
(c) zda jsou náhodné veličiny X a Y závislé či nezávislé.

(d) hodnotu $P(X + Y \ge \frac{1}{2})$.

Řešení:

Příklad 3: `https://math.feld.cvut.cz/prucha/psi/wcv4.pdf`

(d) Množina E je trojúhelník



Sdružená hustota je tedy dána jako

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 1 & , \; (x, y) \in E \\ 0 & , \; \text{jinak}, \end{cases}$$

tedy tak, aby byla konstantní na E, nulová mimo E a integrál z hustoty byl roven 1.

Jev "$X + Y \ge \frac{1}{2}$" je množina $\Phi^{-1}(F)$, kde $\Phi = (X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ je náš náhodný vektor a

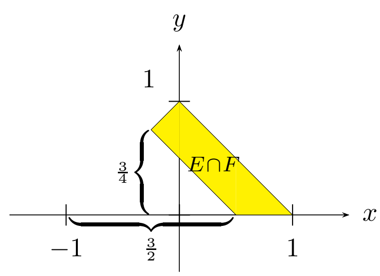
$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \ge \frac{1}{2}\}$$

tj. $\Phi^{-1}(F)$ je vzor množiny $F \subseteq \mathbb{R}^2$ při zobrazení Φ. Pravděpodobnost tohoto jevu tak dostaneme zintegrováním hustoty přes množinu F, neboli

$$P(X+Y \geq \tfrac{1}{2}) = \iint\limits_{F=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 \mid a+b\geq\frac{1}{2}\}} f_{X,Y}(x,y)\ dx\ dy = \iint\limits_{E\cap F} 1\ dx\ dy\ .$$

Množina $E \cap F$ je tvaru

$$E \cap F: \quad \tfrac{1}{2} \leq x+y \leq 1 \quad \wedge \quad y-x \leq 1 \quad \wedge \quad y \geq 0$$



Protože rozdělení pravděpodobnosti je rovnoměrné na E, jedná se prostě o geometrickou pravděpodobnost. Velikost plochy $E\cap F$ spočítáme snadněji pomocí doplňkové plochy (tj. trojúhelníka s výškou $\frac{3}{4}$ a základnou $\frac{3}{2}$) do původního trojúhelníka E (s plochou 1):

$$P(X+Y \geq \tfrac{1}{2}) = 1 - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{3}{2} = \tfrac{7}{16}\ .$$