Vstupní test 4.10.2017

Zadání A

(1) [4 body] V osudí jsou čísla od 1 do 100. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybrané číslo bude dělitelné 2 nebo 5?

Řešení:
Čísel 1 do 100 dělitelných 2 je 50. Čísel 1 do 100 dělitelných 5 je 20. Čísel 1 do 100 dělitelných současně 2 a 5 (neboli dělitelných 10) je 10. Počet čísel dělitelných 2 NEBO 5 tak je $50 + 20 - 10 = 60$.

(2) [4 body] Krychle o hraně 10 má všechny své stěny obarveny. Je rozřezána na krychličky o hraně 1. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná krychlička bude mít právě dvě stěny obarveny?

Řešení:
Rozřezáním vznikne 10^3 krychliček. Krychličky, které mají právě 2 strany obarveny, jsou na hranách. Hran je 12 a na každé je právě 8 takovýchto krychliček. Pravděpodobnost tedy je $\frac{8\cdot 12}{1000} = 0.096$.

Zadání B

(1) [4 body] Jaká je pravděpodobnost, že v náhodně zvoleném 4-místném čísle se právě jedna cifra bude opakovat právě dvakrát?

Řešení:
Počet všech 4-místných čísel je $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$. Čtyřmístné číslo, ve kterém se právě jedná cifra bude opakovat právě dvakrát, je takové, které obsahuje právě tři různé cifry a, b, c. Dále bude jednodušší spočítat počet posloupnosti délky 4 sestavených z cifer $\{0, \dots, 9\}$, ve kterých jsou použity jen 3 různé cifry (tj. dovolíme začínat i 0) a odečteme počet právě těch, co začínají nulou.

Předpokládejme nejdříve, že posloupnost se skládá z cifer a, b, c a cifra a se opakuje dvakrát. Když toto složení z cifer pevně zafixujeme, pak takových čísel lze složit $\frac{4!}{2!\cdot 1!\cdot 1!} = 4 \cdot 3 = 12$ (jsou to variace s opakováním z opakujících se předmětů různého druhu). Přitom cifru a lze vybrat 10 způsoby a množinu $\{b, c\}$ zbylých cifer $\binom{10-1}{2} = \binom{9}{2} = 9 \cdot 4 = 36$ způsoby. Celkem tedy $12 \cdot 10 \cdot 36$ způsoby.

Nyní nechť uvedena posloupnost délky 4 číslo začíná cifrou 0. Číslo je tedy tvaru $0 * * *$.

- Pokud se na zbylých místech označených $*$ vyskytuje cifra 0, pak se na těchto zbylých pozicích vyskytují 3 různé cifry 0, d, e (tj. je to bez opakování). Při pevně zvolených d a e máme $3! = 6$ možností a množinu $\{d, e\}$ lze vybrat $\binom{9}{2} = 36$ způsoby. Tedy celkem $6 \cdot 36$ způsobů.
- Pokud se na zbylých místech označených $*$ nevyskytuje cifra 0, pak se na zbylých pozicích vyskytují dvě různé nenulové cifry d, e a cifra d se opakuje dvakrát. Při pevně zvolených d a e máme $\frac{3!}{2!\cdot 1!} = 3$ možností a uspořádanou dvojici (d, e) lze vybrat $9 \cdot 8 = 72$ způsoby. Tedy celkem $3 \cdot 72$ způsobů.

Výsledná pravděpodobnost je proto $\frac{12\cdot 10\cdot 36-(6\cdot 36+3\cdot 72)}{9000} = \frac{60-(3+3)}{125} = \frac{54}{125} = 0.432$.

(2) [4 body] Kolika způsoby můžeme posadit na 12 židlí za kruhový stůl 6 manželských párů, pokud vždy chtějí sedět vedle sebe manžel s manželkou. Pro každého z nich není důležité místo na kterém sedí, ale jen to, kdo je jeho soused zprava a kdo je soused zleva.

Řešení:
Spočítáme nejdříve kolika způsoby se rozesadí do rovné řady na 12 míst 6 manželských párů tak, aby vždy vedle sebe seděl manžel s manželkou. Manžela s manželkou tak můžeme považovat za nedělitelnou jednotku. Tyto páry můžeme rozmístit 6! způsoby a v rámci páru pak máme vždy 2 způsoby jak dvojici rozesadit. Do rovné řady tak můžeme manželské páry rozesadit $2^6 \cdot (6!)$ způsoby.

Tato rozesazení do řad pak vytvoří rozesazení kolem kruhového stolu, přičemž dvě řadová rozesazení R_1 a R_2 dají stejné kruhové rozesazení právě když R_1 můžeme převést na R_2 cyklickým posunem. Protože řadová uspořádání jsou tvořena ze dvojic jednotlivých manželských párů, je takovýchto různých cyklických posunů právě 6.

Celkem je tedy počet všech hledaných rozesazení kolem kruhového stolu roven $\frac{2^6 \cdot (6!)}{6} = 2^6 \cdot (5!) = 7680$.