Vstupní test 4.10.2017

Zadání A

(1) [4 body] Kolik je trojciferných čísel, která mají ciferný součet rovný 9 a jsou sestavena z různých cifer?

Řešení:
Dané číslo je tvaru abc, kde a, b, c jsou různé cifry, a je nenulová a $a + b + c = 9$.

Nejdříve se podíváme, kolik je ostře klesajících posloupností z cifer $a' > b' > c'$ takových, že $a' + b' + c' = 9$:

$8, 1, 0$
$7, 2, 0$
$6, 3, 0$
$6, 2, 1$
$5, 4, 0$
$5, 3, 1$
$4, 3, 2$

Máme 4 posloupnosti obsahující 0 a z každé z nich lze permutaci vytvořit 4 různá trojciferná čísla (tedy $4 \cdot 4 = 16$ možnosti). A dále máme 3 posloupnosti neobsahující 0 a z každé z nich lze permutaci vytvořit $3! = 6$ různých trojciferných čísel (tedy $3 \cdot 6 = 18$ možností).

Celkem tedy je $16 + 18 = 34$ takových čísel.

(2) [4 body] Hodíme-li desetkrát kostkou, s jakou pravděpodobností padne právě 8 sudých čísel?

Řešení:
Protože sudých i lichých čísel je na kostce stejně, je to analogické jako když házíme mincí a ptáme se s jakou pravděpodobností z 10 hodů padne 8 krát líc. Všech uspořádaných posloupností je $2^{10} = 1024$. Příznivých možností je $\binom{10}{2} = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = 5 \cdot 9$. Pravděpodobnost je tedy $p = \frac{45}{1024} \doteq 0.0439$.

Zadání B

(1) [4 body] Určete počet čtyřciferných čísel, která začínají cifrou 1 a nekončí cifrou 2, nebo končí cifrou 2 a nezačínají cifrou 1.

Řešení:
Čtyřciferných čísel tvaru $1 * * a$, kde $a \neq 2$ je $10 \cdot 10 \cdot 9 = 900$. Čtyřciferných čísel tvaru $b * * 2$, kde $b \notin \{0, 2\}$ je $8 \cdot 10 \cdot 10 = 800$. Celkem tedy máme $900 + 800 = 1700$ čísel.

(2) [4 body] Kolika způsoby lze na šachovnici (8×8 polí) postavit bílou a černou věž tak, aby se navzájem neohrožovaly (tj. nebyly ve stejném řádku ani sloupci)?

Řešení:
Černou věž můžeme postavit 64 způsoby. Zbývající bílou věž postavíme na $64 - 15 = 49$ míst (odečetli jsme místa z jednoho řádku a jednoho sloupce). Celkem tedy $64 \cdot 49 = 3136$ způsobů.