1. cvičení z PST

3. října 2018

Uvažujme výběr z n různých předmětů, které vybíráme k-krát. Počet všech jednotlivých možností pro různé způsoby výběru uvádí následující tabulka:

Výběr	bez vracení	s vracením
uspořádaný	$n(n-1)\cdots(n-k+1)$	n^k
neuspořádaný	$\binom{n}{k}$	$\binom{n+k-1}{k}$

1.1 Určete kolik má rovnice $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$ (kde $k \in \mathbb{N}_0$) nezáporných celočíselných řešení.

Řešení:

Řešením rozumíme uspořádanou n-tici $(x_1, \ldots, x_n)$. Tuto n-tici můžeme jednoznačně vyjádřit také tak, že pro k nerozlišitelných koulí a n různých přihrádek bude x_i znamenat počet koulí v i-té přihrádce.

Tato situace odpovídá kombinacím bez opakování (máme n druhů prvků v dostatečném množství a vybíráme z nich k prvků, při výběru přitom rozlišujeme vždy, jen kolik je od kterého druhů prvků).

Rozdělení koulí do přihrádek můžeme zakódovat pomocí $n-1$ nerozlišitelných přihrádek a k nerozlišitelných koulí. To ale odpovídá permutacím s opakováním (pro dva druhy předmětů). Celkový počet řešení tak je kombinační číslo

$$\binom{n-1+k}{k} = \frac{(n-1+k)!}{(n-1)! \cdot k!} = \binom{n-1+k}{n-1} .$$

1.2 Kolik různých slov můžeme vytvořit přeskupením písmen slov:

(a) MISSISSIPPI,

(b) PROBLÉM (kde písmena B a R nestojí vedle sebe)?

Řešení:

Jde o permutace s opakováním. Pro n prvků, z nichž

- k_1 je 1. druhu, k_2 je 2. druhu atd. až k_ℓ je m-tého druhu,
- přičemž $k_1 + \cdots + k_\ell = n$ a prvky stejného druhu jsou navzájem nerozlišitelné,

je počet všech uspořádaných n-tic roven $\frac{n!}{k_1! \cdots k_\ell!}$.

(a) Písmeno M se vyskytuje $1\times$, písmeno I pak $4\times$, písmeno S také $4\times$ a písmeno P máme $2\times$. Počet znaků ve slově je $1 + 4 + 4 + 2 = 11$. Počet různých slov je tedy

$$\frac{11!}{1! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 2!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 = 34650 .$$

(b) Jednodušší je zjistit počet zbylých slov, tj. těch, kde písmena B a R *stojí* vedle sebe, a odečíst je od počtu všech přesmyček původního slova. Skupinu slov B a R budeme považovat za jeden nedělitelný prvek, který se může vyskytovat ve 2! různých stavech: BR nebo RB. Budeme tedy permutovat 6 prvků: P, O, L, É, M a X (kde X={B, R}). Počet slov, kde písmena B a R *stojí* vedle sebe je tak $2! \cdot 6!$.

Počet slov, kde písmena B a R *nestojí* vedle sebe tudíž bude

$$7! - 2! \cdot 6! = 5 \cdot (6!) = 3600 \ .$$

1.3 Na jedné poličce je náhodně rozestavěno 10 knih. Jaká je pravděpodobnost, že 3 určité knihy jsou postaveny vedle sebe?

Řešení:
Podobně jako v předchozím příkladu budeme dané 3 knihy považovat za jednu nedělitelnou skupinu. Dostaneme tak 8 prvků. V rámci nedělitelné skupiny máme 3! možností. Počet požadovaných rozestavení je proto

$$3! \cdot 8! = 241\ 920 \ .$$

1.4 Kolika různými způsoby může sportovec rozmístit 10 různých pohárů do 5 polic, jestliže se na každou polici vejde všech 10 pohárů?

Řešení:
Dané rozestavení můžeme jednoznačně vyjádřit také tak, že k 10 různým pohárům přidáme 4 $(= 5 - 1)$ navzájem nerozlišitelné přepážky, a budeme uvažovat permutace $10 + 4 = 14$ prvků s opakováním. V rámci tohoto "zakódování", ty poháry, které stojí *před* 1. přepážkou půjdou do 1. police, ty *mezi* 1. a 2. přepážkou do druhé police atd.

Počet všech různých rozmístění tak je

$$\frac{14!}{1! \cdots 1! \cdot 4!} = \frac{14!}{4!} = 3\ 632\ 428\ 800 \doteq 3.6 \cdot 10^9 \ .$$

Pokud jde o numerický výpočet, můžeme ho také srovnat s přibližným *Stirlingovým* vzorcem

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

kde přibližnost znamená, že v *podíl* obou hodnot se blíží k 1 pro $n \to \infty$. Pro $n = 14$ máme

$$\frac{14!}{4!} \doteq \frac{\sqrt{2\pi 14}}{24} \left(\frac{14}{e}\right)^{14} = \frac{\sqrt{7\pi}}{12} \left(\frac{14}{e}\right)^{14} \doteq 3\ 610\ 875\ 072 \ .$$

1.5 Kolika způsoby můžeme do 5 různých důlků vybrat po jedné kouli, jestliže máme

(a) 5 bílých, 11 modrých a 6 červených koulí?

(b) 4 bílé, 4 modré a 3 červené koule?

Koule stejné barvy považujeme za nerozlišitelné.

Řešení:

(a) Od každé barvy *máme* dostatek koulí pro úplné zaplnění všech 5 důlků jednou barvou. To odpovídá variacím 5-té třídy nad 3 prvky s opakováním (tj. máme 3 barvy a 5 pozic). Počet způsobů tak je

$$V(5,3) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 243 \ .$$

(b) Od každé barvy tentokrát *nemáme* dostatek koulí pro úplné zaplnění všech 5 důlků jednou barvou. Počet koulí se tomuto číslu ale blíží. Proto bude výhodnější předpokládat dostatek koulí od každé barvy a v rámci nich spočítat raději počet nepříznivých možností (tj. těch, co se *nedají* sestavit pomocí zadaného počtu 4 bílých, 4 modrých a 3 červených koulí). K takovéto sestavě bychom tak museli použít buď více jak 4 bílé nebo více jak 4 modré nebo více jak 3 červené koule.

Nepříznivé možnosti jsou pak tyto:

- použili jsme ≥ 5 bílých koulí (taková možnost je jen 1).
- použili jsme ≥ 5 modrých koulí (opět jen 1 možnost).
- použili jsme ≥ 4 červené koule:
  - máme ≥ 5 červených koulí (opět jen 1 možnost),
  - máme právě 4 červené a buď 1 bílou nebo 1 modrou kouli ($2 \cdot 5 = 10$ možností).

Celkem tedy 13 nepříznivých možností z celkového počtu $3^5 = 243$ všech možností. Počet hledaných sestav koulí tak je

$$243 - 13 = 230 \ .$$

1.6 (výběr bez vracení)

Série, kterou tvoří 100 výrobků, obsahuje 5 vadných součástek. Jestliže je při kontrole mezi 5 náhodně vytaženými součástkami nějaká vadná, celá série se nepřijme. Jaká je pravděpodobnost, že k tomu dojde?

Řešení:

Máme jev

$A =$"alespoň jedna z 5 vytažených součástek je vadná".

Spočítáme pravděpodobnost doplňkového jevu:

$\overline{A} =$"všech 5 vytažených součástek je v pořádku"

Podle zadání máme 100 součástek a z nich 5 vadných. Takže s použitím variací 5-té třídy bez opakování dostaneme

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{95 \cdot 94 \cdot 93 \cdot 92 \cdot 91}{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96} \doteq 1 - 0.7696 = 0.2304 \ .$$