11. cvičení z PSI

12. prosince 2018

11.1 (test střední hodnoty normálního rozdělení při známém rozptylu)

Teploměrem, o jehož chybě předpokládáme, že má normální rozdělení se směrodatnou odchylkou $\sigma = 3°$, jsme provedli 30 měření stejné teploty. Průměrný výsledek byl 101°. Otestujte na hladině významnosti 5 %, zda teplota nepřesahuje 100°.

Řešení:
Naše veličina $X =$ *"naměřená teplota"* (v jednotkách °) má podle předpokladu rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$, kde $\sigma = 3°$.

Podle zadání máme otestovat hypotézu o střední hodnotě

$\mathbf{H}_0 : \mu \leq \mu_0 (= 100°)$

proti alternativní hypotéze:

$\mathbf{H}_1 : \mu > \mu_0 (= 100°)$.

Realizaci testovací statistiky $T = \frac{\overline{\mathbf{X}} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$ pro $n = 30$

$$t = \frac{\overline{\boldsymbol{x}} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} = \frac{101 - 100}{3} \sqrt{30} \doteq 1.8257$$

porovnáme s kvantilem $\Phi^{-1}(1-\alpha) = \Phi^{-1}(0.95) \doteq 1.64$ pro $\alpha = 0.05$. Protože je splněno zamítací kritérium

$$\Phi^{-1}(1-\alpha) < t$$

tak nulovou hypotézu $\mathbf{H}_0$ zamítáme.

11.2 (test střední hodnoty normálního rozdělení při neznámém rozptylu)

Výrobce tvrdí, že spotřeba automobilu je $\mu_0 = 8$ litrů na 100 km. Průměrná spotřeba $n = 49$ uživatelů však byla $\overline{\boldsymbol{x}} = 8.4$ litru na 100 km s výběrovým rozptylem $s^2_{\boldsymbol{x}} = 2.56$. Testujte na hladině významnosti $\alpha = 5\%$, zda má výrobce pravdu, a uveďte použité předpoklady.

Řešení:
K provedení testu střední hodnoty (s neznámým rozptylem) potřebujeme předpokládat, že testovaná veličina spotřeby X má normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ a že měření odpovídají náhodnému výběru (tj. jsou nezávislá). Protože předpokládáme (přesné) normální rozdělení, nemusíme (jako u CLV) mít zase tak velký rozsah souboru.

Podle zadání máme otestovat hypotézu o střední hodnotě

$\mathbf{H}_0 : \mu = \mu_0 (= 8)$

proti alternativní hypotéze:

$\mathbf{H}_1 : \mu \neq \mu_0 (= 8)$.

Hodnotu rozptylu neznáme, takže je nutné použít testovací statistiku, která obsahuje odhad směrodatné odchylky σ pomocí $S_{\boldsymbol{X}}$:

$$T = \frac{\overline{\boldsymbol{X}} - \mu_0}{S_{\boldsymbol{X}}} \sqrt{n} \; .$$

Kritérium pro **ZAMÍTNUTÍ** je tvaru

$$|t| > q_{t(n-1)}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \text{zamítáme } \mathbf{H}_0 \text{ (na dané hladině } \alpha) \; .$$

Zdůvodnění tvaru zamítacího kritéria: Za předpokladu platnosti nulové hypotézy, tj. pokud $E(X) = \mu_0$, bude mít statistika T tzv. Studentovo t-rozdělení s $n-1$ stupni volnosti (speciálně tedy bude platit $E(T) = 0$) a očekávané hodnoty takovéto statistiky by se měly pohybovat blízko nuly. Pokud se příliš odchýlí (více než bude dovolovat hladina α omezující chybu 1. druhu), bude to důvod k zamítnutí nulové hypotézy.

Odchýlení opět znamená, že realizované hodnoty t statistiky T spadnou do kritického oboru W (pro statistiku T), který je symetrický vzhledem k 0 z hlediska pravděpodobnosti. Bude tedy tvaru $W: \ (-\infty, u_0) \cup (u_1, \infty)$, kde $P(T < u_0) = \frac{\alpha}{2} = P(u_1 < T)$ (což je omezení chyby 1. druhu, tj. že bychom se spletli a zamítli něco, co platí). Dostáváme tak $u_0 = q_{t(n-1)}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -q_{t(n-1)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = -u_1$, tudíž

$$W: \quad \Big(-\infty, -q_{t(n-1)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\Big) \cup \Big(q_{t(n-1)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right), \infty\Big)$$

a kritérium pro **ZAMÍTNUTÍ** je tak skutečně tvaru

$$|t| > q_{t(n-1)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \text{zamítáme } \mathbf{H}_0 \text{ (na dané hladině } \alpha).$$

Teď už tedy dosadíme konkrétní hodnoty. Realizace testovací statistiky je

$$t = \frac{\overline{\boldsymbol{x}} - \mu_0}{\sqrt{s^2_{\boldsymbol{x}}}}\sqrt{n} = \frac{8.4 - 8}{\sqrt{2.56}}\sqrt{49} = \frac{0.4}{1.6} \cdot 7 = 1.75 \ .$$

Protože

$$|t| = 1.75 \not> 2.011 \doteq q_{t(48)}(0.975) = q_{t(n-1)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \ ,$$

nulovou hypotézu **NEZAMÍTÁME**.

Naše měření tak nejsou dostačující na to, abychom mohli zamítnout tvrzení výrobce na hladině významnosti 5%. Je dobré si ještě zjistit, jak moc bychom si museli dovolit být nejistí, abychom už tvrzení výrobce zamítli. Tato hladina α_0 je určena jako

$$q_{t(n-1)}\left(1-\frac{\alpha_0}{2}\right) = |t| \ ,$$

tedy

$$\alpha_0 = 2 - 2 \cdot F_{t(n-1)}(|t|) = 2 - 2 \cdot F_{t(n-1)}(1.75) \doteq 2 - 2 \cdot 0.9567 = 0.0866 \ .$$

Pokud tedy budeme posuzovat hypotézu na hladině významnosti **VYŠŠÍ** než $8,66\%$, dojdeme k jejímu zamítnutí. (A naopak čím více si chceme být jistí, že jsme se nespletli (tj. zmenšujeme hodnoty α), tím víc "prohřešků" od výrobce budeme muset tolerovat.)

Poznámka: Podle zadání jsme uvažovali případ, kde se ptáme na rovnost (tj. $\mu = \mu_0$). V této situaci máme jedinou možnost, jak zvolit nulovou hypotézu - a sice výše uvedeným způsobem. Jako nulovou hypotézu není možné zvolit případ $\mu \neq \mu_0$, protože množina $\{\mu \in \mathbb{R} \mid \mu \neq \mu_0\}$ není uzavřená.

V úvahu vzhledem k zadání by ale mohl ještě přicházet jednostranný test, protože výrobce určitě raději tvrdí, že $\mu \leq \mu_0$. V tomto případě pak buď můžeme testovat $\mathbf{H}_0'$: $\mu \leq \mu_0$, ale mohli bychom také testovat $\mathbf{H}_0''$: $\mu \geq \mu_0$.

V případě testu hypotézy $\mathbf{H}_0'$: $\mu \leq \mu_0$ se snažíme vyhnout tomu, že bychom omylem poškodili *výrobce*, a výsledek testu bude

$$t = 1.75 > 1.6772 \doteq q_{t(48)}(0.95) = q_{t(n-1)}\left(1-\alpha\right)$$

takže hypotézu výrobce **ZAMÍTNEME**. (Pozor, jde o jednostranný test, takže kvantil je jiný! Veškerou chybu jsme spotřebovali jen na ty vysoké hodnoty. A toto malé zvětšení, oproti oboustrannému testu, už stačilo na zamítnutí.)

A v případě testu hypotézy $\mathbf{H}_0''$: $\mu \geq \mu_0$ se snažíme vyhnout tomu, že bychom omylem poškodili *uživatele*, a výsledek testu bude

$$t = 1.75 \not< -1.6772 \doteq -q_{t(48)}(0.95) = q_{t(n-1)}\left(\alpha\right)$$

takže hypotézu uživatelů **NEZAMÍTNEME**.

11.3 (test rozptylu normálního rozdělení)

Generátor náhodných čísel s normovaným normálním rozdělením $N(0,1)$ dal následující výsledky:

$$(-0.503,\ 0.811,\ 1.078,\ -0.501,\ 0.562,\ -1.032,\ 0.152,\ 0.859,\ -0.156,\ 2.213)$$

Posuďte na hladině významnosti 5 %, zda data odpovídají předpokládanému rozptylu.

Řešení:
Rozsah souboru je $n = 10$, součet hodnot je $\sum_i x_i = 3.483$ a součet kvadrátů je $\sum_i x_i^2 = 9.387373$. Předpokládaný

rozptyl je $\sigma_0^2 = 1$ a výběrový rozptyl je

$$s_{\boldsymbol{x}}^2 = \frac{1}{(n-1)n}\left(n\sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i\right)^2\right) = \frac{93.87373 - (3.483)^2}{90} \doteq 0.9082\ .$$

Pro oboustranný odhad použijeme testovací statistiku s realizací

$$\frac{(n-1)\, s_{\boldsymbol{x}}^2}{\sigma_0^2} \doteq 9 \cdot 0.9082 \doteq 8.174\,,$$

která má rozdělení χ^2 s $n-1 = 9$ stupni volnosti. Hodnotu statistiky porovnáme s kvantily $q_{\chi^2(9)}(0.025) \doteq 2.7$ a $q_{\chi^2(9)}(0.975) \doteq 19.02$ a nulovou hypotézu nezamítáme.

11.4 (test rozptylu normálního rozdělení)

Do laboratoře bylo odesláno $n = 5$ stejných vzorků krve ke stanovení obsahu alkoholu X (v promilích alkoholu). Výsledkem byla realizace

$$\boldsymbol{x} = (0.8,\quad 1,\quad 0.6,\quad 1.4,\quad 0.9)\ .$$

Posuďte na hladině významnosti $\alpha = 0.05$, zda směrodatná odchylka měření je nejvýše $\sigma_0 = 0.1$ promile alkoholu. Předpokládejte, že obsah alkoholu X má normální rozdělení a jednotlivá měření jsou nezávislá.

Řešení:
Naše veličina X, udávající obsah alkoholu v krvi v promilích, má normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$. Místo testu směrodatné odchylky σ budeme (ekvivalentně) testovat rozptyl σ^2 a sice nulovou hypotézu tvaru

$\mathbf{H}_0 : \sigma^2 \leq (0.1)^2\ (= \sigma_0)^2$

proti alternativní hypotéze:

$\mathbf{H}_1 : \sigma^2 > (0.1)^2$

na hladině významnosti $\alpha = 0.05$.

Tentokrát budeme používat statistiku

$$T = \frac{(n-1)\, S_{\mathbf{X}}^2}{\sigma_0^2}\ ,$$

která má pro případ $\sigma = \sigma_0$ tzv. χ^2-rozdělení s $n-1$ stupni volnosti. Obecněji, teprve veličina $\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} \cdot T$ bude mít χ^2-rozdělení. Za předpokladu nulové hypotézy, tj. pro $0 \leq \sigma \leq \sigma_0$, budou očekávané hodnoty statistiky T především v intervalu $(-\infty, 1\rangle$ (ve skutečnosti to bude jen interval $\langle 0, 1\rangle$, protože T je nezáporná veličina). Kritický obor tak bude

$$W:\ \left(q_{\chi^2(n-1)}(1-\alpha),\quad \infty\right)$$

a kritérium pro **ZAMÍTNUTÍ** proto bude tvaru

$$t > q_{\chi^2(n-1)}\,(1-\alpha) \quad \Rightarrow \quad \text{zamítáme } \mathbf{H}_0 \text{ (na dané hladině } \alpha)\ .$$

Dosadíme opět konkrétní hodnoty:

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{0.8 + 1 + 0.6 + 1.4 + 0.9}{5} = \frac{4.7}{5} = 0.94\ ,$$

$$s_{\boldsymbol{x}}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{\boldsymbol{x}})^2 = \frac{0.14^2 + 0.06^2 + 0.34^2 + 0.46^2 + 0.04^2}{4} = \frac{0.352}{4} = 0.088\ .$$

Realizace testovací statistiky je

$$t = \frac{(n-1)\, s_{\boldsymbol{x}}^2}{\sigma_0^2} = \frac{4 \cdot 0.088}{(0.1)^2} = 35.2$$

a hodnota kvantilu je

$$q_{\chi^2(n-1)}\,(1-\alpha) = q_{\chi^2(4)}(0.95) \doteq 9.49\ .$$

Protože

$$t \doteq 35.2 \not> 9.49 \doteq q_{\chi^2(4)}(0.95)\ ,$$

nulovou hypotézu **ZAMÍTÁME**.

Zdůvodnění tvaru kritického oboru: Opět si vyznačme závislost X a T na parametru σ jako

$$T_\sigma = \frac{(n-1)S^2_{\mathbf{X}_\sigma}}{(\sigma_0)^2} .$$

Kritický obor má být tvaru

$$W: \quad (u_1, \infty) ,$$

kde požadujeme, aby $u_1 \in \mathbb{R}$ bylo nejmenší takové, aby chyba 1. druhu byla nejvýše α, tj.

$$(\forall\ 0 \leq \sigma \leq \sigma_0) \quad P(T_\sigma \in W) = P(u_1 < T_\sigma) \leq \alpha .$$

Opět případ $\sigma = \sigma_0$ je za předpokladu $\mathbf{H}_0$ ten "nejhorší" možný, jak je vidět z následujícího:

$$\sigma \leq \sigma_0 \quad \Rightarrow \quad T_\sigma \ = \ \underbrace{\frac{\sigma^2}{(\sigma_0)^2}}_{\leq 1} \ \cdot \ \frac{(n-1)S^2_{\mathbf{X}_\sigma}}{\sigma^2} \ \leq \ \underbrace{\frac{(n-1)S^2_{\mathbf{X}_\sigma}}{\sigma^2}}_{\chi^2-\text{rozdělení}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad P\Big(u_1 < T_\sigma\Big) \leq P\left(u_1 < \frac{(n-1)S^2_{\mathbf{X}_\sigma}}{\sigma^2}\right) = 1 - F_{\chi^2(n-1)}(u_1) = P\Big(u_1 < T_{\sigma_0}\Big)$$

Vidíme tedy, že $P\Big(u_1 < T_\sigma\Big) \leq P\Big(u_1 < T_{\sigma_0}\Big)$ a hledané u_1 tak musí splňovat

$$P\Big(u_1 < T_{\sigma_0}\Big) = \alpha$$

tedy

$$u_1 = q_{\chi^2(n-1)}(1-\alpha) ,$$

a kritický obor je tak skutečně tvaru

$$W: \quad \Big(q_{\chi^2(n-1)}(1-\alpha), \quad \infty\Big) .$$

11.5 (test střední hodnoty dvou normálních rozdělení se stejným neznámým rozptylem)

Z realizací náhodných veličin X a Y (s normálním rozdělením) jsme z výběrů daného rozsahu obdrželi tyto realizace odhadů:

X	Y
$m = 11$	$n = 21$
$\overline{\boldsymbol{x}} = 10$	$\overline{\boldsymbol{y}} = 12,$
$s_{\boldsymbol{x}} = 2$	$s_{\boldsymbol{y}} = 3$

Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$

(a) posuďte hypotézu, že rozptyly náhodných veličin X a Y jsou stejné.

(b) za předpokladu platnosti podmínky dle (a) posuďte hypotézu, že střední hodnoty náhodných veličin X a Y jsou stejné.

Řešení:

(a) **Test stejného rozptylu:** Předpokládáme, že veličiny X a Y jsou *nezávislé* s normálními rozděleními po řadě $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ s $N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Jednotlivá měření pro X a Y považujeme *všechna navzájem za nezávislá.*

Budeme testovat nulovou hypotézu o rovnosti rozptylů

$\mathbf{H}_0' : \ \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

proti alternativní hypotéze

$\mathbf{H}_1' : \ \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

Testovací statistika je

$$T' = \frac{S^2_{\boldsymbol{X}}}{S^2_{\boldsymbol{Y}}} \ ,$$

a má za předpokladu $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ tzv. Fisherovo-Snedecorovo $F(m-1, n-1)$ - rozdělení s $m-1$ a $n-1$ stupni volnosti (v tomto pořadí!).

Za předpokladu nulové hypotézy $\mathbf{H}_0'$ je očekávaná hodnota statistiky T' rovna 1 a kritický obor tak (podobně jako v některých předchozích příkladech) bude

$$W: \ \left(-\infty, \ q_{F(m-1,n-1)}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) \cup \left(q_{F(m-1,n-1)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right), \ \infty\right) \ .$$

Kritérium pro **ZAMÍTNUTÍ** je proto tvaru

$$\left[\ t' < q_{F(m-1,n-1)}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad \text{nebo} \quad q_{F(m-1,n-1)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) < t' \ \right] \quad \Rightarrow \quad \text{zamítáme } \mathbf{H}_0' \text{ (na dané hladině } \alpha) \ .$$

Realizace testovací statistiky je

$$t' = \frac{s^2_{\boldsymbol{x}}}{s^2_{\boldsymbol{y}}} = \frac{4}{9} \doteq 0,444$$

a hodnoty kvantilů jsou

$$q_{F(m-1,n-1)}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = q_{F(10,20)}(0.025) = \frac{1}{q_{F(20,10)}(0.975)} \doteq \frac{1}{3.42} \doteq 0.2924$$

a

$$q_{F(m-1,n-1)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = q_{F(10,20)}(0.975) \doteq 2.77 \ .$$

Protože

$$t' \doteq 0.444 \in \left\langle 0.2924, \ 2.77 \right\rangle \ ,$$

hypotézu $\mathbf{H}_0'$, že X *a* Y *mají stejný rozptyl*, **NEZAMÍTÁME**.

(b) **Test rovnosti středních hodnot se stejným neznámým rozptylem:**

Předpokládáme, že veličiny X a Y jsou *nezávislé* s normálními rozděleními po řadě $N(\mu_1, \sigma^2)$ s $N(\mu_2, \sigma^2)$. Tento předpoklad je podložen předchozím testem rovnosti rozptylů, který jsme nezamítli. Jednotlivá měření pro X a Y považujeme opět *všechna navzájem za nezávislá.*

Budeme testovat nulovou hypotézu o rovnosti středních hodnot

$\mathbf{H}_0: \ \mu_1 = \mu_2$

proti alternativní hypotéze

$\mathbf{H}_1: \ \mu_1 \neq \mu_2$.

Testovací statistika je

$$T = \frac{\overline{\boldsymbol{X}} - \overline{\boldsymbol{Y}}}{S\sqrt{1/m + 1/n}} \ ,$$

kde

$$S^2 = \frac{m-1}{m+n-2} \cdot S^2_{\mathbf{X}} + \frac{n-1}{m+n-2} \cdot S^2_{\mathbf{Y}}$$

je (vážený) odhad rozptylu. Za předpokladu nulové hypotézy $\mathbf{H}_0$, tj. $\mu_1 = \mu_2$, má statistika T Studentovo $t(m+n-2)$-rozděleni s $m+n-2$ stupni volnosti.

Kritérium pro **ZAMÍTNUTÍ** bude proto (očekávatelně) tvaru

$$|t| > q_{t(m+n-2)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \text{zamítáme } \mathbf{H}_0 \text{ (na dané hladině } \alpha) \ .$$

Po dosazení máme

$$s^2 = \frac{(m-1)s^2_{\boldsymbol{x}} + (n-1)s^2_{\boldsymbol{y}}}{m+n-2} = \frac{10 \cdot 2^2 + 20 \cdot 3^2}{10+20} = \frac{22}{3}$$

a

$$t = \frac{\overline{\boldsymbol{x}} - \overline{\boldsymbol{y}}}{s\sqrt{1/m+1/n}} = \frac{10-12}{\sqrt{\frac{22}{3}}\sqrt{\frac{1}{11}+\frac{1}{21}}} = -\frac{3}{4}\sqrt{7} \doteq -1.984 \ .$$

Hodnota kvantilu je

$$q_{t(m+n-2)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = q_{t(30)}(0.975) \doteq 2.042 \ .$$

Protože

$$|t| \doteq 1.984 \not> 2.042 \doteq q_{t(m+n-2)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \ ,$$

hypotézu $\mathbf{H}_0$, ze X *a* Y *mají stejnou střední hodnotu*, také **NEZAMÍTÁME**.

11.6 (párový pokus)

U $n = 8$ praváků jsme změřili délku prostředníčku na pravé a levé ruce, hodnoty v milimetrech uvádí tabulka.

Levá	81	74	90	84	77	67	59	70
Pravá	84	76	89	85	80	69	58	68

Na hladině významnosti $\alpha = 5\%$ posuďte hypotézu, že praváci mají delší prostředníček na levé ruce, a uveďte předpoklady.

Řešení:
Označme si jako veličinu X délku prostředníčku na levé ruce a jako veličinu Y délku prostředníčku na pravé ruce (u téhož člověka, zde navíc praváka). Pokud na jednom subjektu provádíme měření více veličin (zde X a Y), pak už jejich vzájemné hodnoty nemůžeme považovat za nezávislé. Za nezávislá ovšem samozřejmě považujeme měření dvojice veličin (X, Y) (tj. náhodného vektoru) u různých lidí.

U veličiny $\Delta := X - Y$, která představuje rozdíly mezi veličinami můžeme přirozeně předpokládat normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ (neboť jde o odchylky, které obvykle tuto vlastnost mají). Máme tedy nezávislá měření s hodnotami $\boldsymbol{\delta} = (x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n)$ a naše původní hypotéza $E(X) \geq E(Y)$ lze ekvivalentně vyjádřit pomocí $0 \leq E(X) - E(Y) = E(\Delta) = \mu$ jako nulová hypotéza

$$\mathbf{H}_0 : \ \mu \geq 0$$

kterou otestujeme proti alternativní hypotéze

$$\mathbf{H}_1 : \ \mu < 0 \, .$$

na hladině významnosti $\alpha = 5\%$.

Půjde tedy o obvyklý test střední hodnoty (veličiny s normálním rozdělením) při neznámém rozptylu. Použijeme tudíž statistiku

$$T = \frac{\overline{\boldsymbol{\Delta}}}{S_{\boldsymbol{\Delta}}} \sqrt{n}$$

a kritérium pro **ZAMÍTNUTÍ** bude tvaru

$$t < q_{t(n-1)}(\alpha) \quad \Rightarrow \quad \text{zamítáme } \mathbf{H}_0 \text{ (na dané hladině } \alpha) \, .$$

Určíme si hodnoty realizace $\boldsymbol{\delta}$ veličiny $\boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{X} - \boldsymbol{Y}$

$\boldsymbol{x}$	81	74	90	84	77	67	59	70
$\boldsymbol{y}$	84	76	89	85	80	69	58	68
$\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$	-3	-2	1	-1	-3	-2	1	2

Spočteme její výběrový průměr a rozptyl (pro $n = 8$):

$$\overline{\boldsymbol{\delta}} = -\frac{7}{8} = -0.875 \, , \quad s_{\boldsymbol{\delta}}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(\delta_i - \overline{\boldsymbol{\delta}} \right)^2 = \frac{215}{56} \doteq 3.8393 \, ,$$

určíme realizaci statistiky

$$t = \frac{\overline{\boldsymbol{\delta}}}{s_{\boldsymbol{\delta}}} \sqrt{n} = -\frac{7\sqrt{7}}{\sqrt{215}} \doteq -1.263$$

a příslušný kvantil

$$q_{t(n-1)}(\alpha) = -q_{t(n-1)}(1 - \alpha) = -q_{t(7)}(0.95) \doteq -1.895 \, .$$

Protože

$$t \doteq -1.263 \not< -1.895 \doteq q_{t(7)}(0.05) \, ,$$

nulovou hypotézu, že praváci mají delší levý prostředníček než pravý, **NEZAMÍTÁME**.

11.7 (test nekorelovanosti dvou výběrů z normálních rozdělení)

Pro realizace

X	22	15	30	27	29
Y	10	6	8	4	8

náhodných výběrů z veličin X, Y testujte na hladině významnosti $\alpha = 5\,\%$ jejich korelovanost.

Řešení:

Pro test korelovanosti je potřeba předpoklad, že náhodný vektor (X, Y) ma dvourozměrné normální rozdělení.

Poznámka: Každé takové rozdělení je tvaru

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}}_{\mathbb{A}} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$$

kde matice $\mathbb{A}$ je regulární, $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ a veličiny X', Y' jsou nezávislé s normovaným normálním rozdělením $N(0, 1)$.

Označme si ještě $\vec{u} = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ a $\vec{v} = (\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2$. Snadno je pak vidět, že

$$E(X) = \mu_1, \quad E(Y) = \mu_2, \quad D(X) = \|\vec{u}\|^2, \quad D(Y) = \|\vec{v}\|^2$$

a pro korelaci máme

$$\varrho(X, Y) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

což je právě kosinus úhlu mezi vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

My budeme testovat hypotézu o koeficientu korelace $\varrho(X, Y)$ mezi náhodnými veličinami X a Y,

$\mathbf{H}_0 :\ \varrho(X, Y) = 0$ (tj. náhodné veličiny X a Y jsou nekorelované)

proti alternativní hypotéze

$\mathbf{H}_1 :\ \varrho(X, Y) \neq 0$ (tj. náhodné veličiny X a Y jsou korelované.)

K testování použijeme výběrový koeficient korelace $R(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ a testovou statistiku

$$T = \frac{R(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})\sqrt{n-2}}{\sqrt{1 - R^2(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})}} \ ,$$

která má Studentovo rozdělení $\mathrm{t}(n-2)$, kde n je rozsah výběrů. Realizaci $r(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ výběrového koeficientu korelace $R(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ vypočteme ze vzorce

$$r(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{\sqrt{\left(n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right) \cdot \left(n \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2\right)}} = \frac{n}{n-1} \frac{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j\, y_j - \overline{\boldsymbol{x}}\, \overline{\boldsymbol{y}}}{s_{\boldsymbol{x}}\, s_{\boldsymbol{y}}} \ .$$

Za předpokladu nulové hypotézy $\mathbf{H}_0$, tj. $\varrho(X, Y) = 0$, je očekávaná hodnota statistiky T rovna 0. Kritérium pro **ZAMÍTNUTÍ** proto (podobně jako pro některé předchozí testy) bude tvaru

$$|t| > q_{t(n-2)}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \text{zamítáme } \mathbf{H}_0 \text{ (na dané hladině } \alpha) \ .$$

Je $n = 5$,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 123, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i = 36, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 3\,179, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 280, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 890 \ .$$

Po dosazení hodnot dostaneme

$$r(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{4450 - 4428}{\sqrt{766 \cdot 104}} = \frac{11}{2\sqrt{4979}} \doteq 0.07794$$

$$t = \frac{r(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\sqrt{n-2}}{\sqrt{1 - r^2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}} = \sqrt{\frac{363}{19795}} \doteq 0.1354.$$

Z tabulek nalezneme kvantil

$$q_{t(n-2)}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = q_{\mathrm{t}(3)}(0.975) \doteq 3.18 \ .$$

Protože

$$|t| \doteq 0.1354 \not> 3.18 \doteq q_{\mathrm{t}(3)}(0.975) \ ,$$

hypotézu $\mathbf{H}_0$ **NEZAMÍTÁME**.

+++

11.8 (test střední hodnoty při známém rozptylu)

Posuďte na hladině významnosti $\alpha = 0.01$ hypotézu, že mince je symetrická, jestliže

(a) při $n = 200$ hodech padl líc $80\times$,

(b) při $n = 100$ hodech padl líc $40\times$.

(tj. v obou případech to bylo 40% výsledků).

(**Návod:** Použijte vhodnou statistiku s přibližně normálním rozdělením odvozenou na základě centrální limitní věty pro náhodnou veličinu $X(líc) = 1$, $X(rub) = 0$.)

Řešení:

Situace, kdy přesně známe rozptyl daného (normálního) rozdělení, není příliš obvyklá. Většinou jej máme jen odhadnutý a pak musíme používat Studentovo rozdělení namísto normálního. Výjimkou jsou ale případy, kdy rozptyl nějakého rozdělení (alternativního, exponenciálního, Poissonova, atd.) je svázaný se střední hodnotou tohoto rozdělení prostřednictvím nějakého parametru.

Může se zdát, že pak se ale nedá použít obvyklý postup pro *test střední hodnoty se známým rozptylem*, protože nemáme normální rozdělení. To si ale můžeme vyrobit (přibližně) pomocí CLV.

Výsledky hodu mincí představují náhodnou veličinu $X(líc) = 1$, $X(rub) = 0$ s alternativním rozdělením s parametrem p, tj. $P(X = 1) = p$.

Naše nulová hypotéza tedy bude

$\mathbf{H}_0 : p = p_0$

proti alternativní hypotéze:

$\mathbf{H}_1 : p \neq p_0$

kde $p_0 = \frac{1}{2}$.

Vezmeme si nezávislé náhodné veličiny (kopie veličiny X)

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{, při } i\text{-tém pokusu padl líc,} \\ 0 & \text{, při } i\text{-tém pokusu padl rub .} \end{cases}$$

Za předpokladu nulové hypotézy budeme pro veličinu

$$\overline{\boldsymbol{X}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

mít $E(\overline{\boldsymbol{X}}) = \frac{1}{2}$ a $D(\overline{\boldsymbol{X}}) = \frac{1}{4n}$, takže podle CLV má (normovaná) statistika

$$T = \frac{\overline{\boldsymbol{X}} - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4n}}} = \frac{\overline{\boldsymbol{X}} - 0.5}{0.5}\sqrt{n},$$

přibližně (normované) normální rozdělení $N(0, 1)$.

Poznámka: Tato statistika je analogií statistiky

$$T' = \frac{\overline{\boldsymbol{X}}' - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n},$$

pro případ veličiny X' s normálním rozdělením $N(\mu, \sigma)$ a pro nulovou hypotézu

$$\mathbf{H}_0' : \mu = \mu_0 \ .$$

Pozor! Nenaznačujeme tím, že by naše původní veličina X s alternativním rozdělením snad měla vlastnosti nějaké jiné veličiny X' s normálním rozdělením! Jde tu o to, ze při hledání kritického oboru pro X (při dané hladině významnosti α) je postup principiálně stejný jako pro případ, kdy X' má normální rozdělení - viz dále.

Kritérium pro **ZAMÍTNUTÍ** je tvaru

$$|t| > \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \text{zamítáme } \mathbf{H}_0 \text{ (na dané hladině } \alpha\text{)} \ .$$

Zdůvodnění tvaru zamítacího kritéria: Nulová hypotéza je tvaru $\mathbf{H}_0 : p = p_0$ a hodnotu p aproximujeme pomocí $\overline{\boldsymbol{x}}$. Chceme si proto zvolit takovou dolní hranici $u_1 \in \mathbb{R}$ a takovou horní hranici $u_2 \in \mathbb{R}$, aby pravděpodobnost, že je hodnota veličiny $\overline{\boldsymbol{X}}$ překročí, byla nejvýše rovna hodnotě $\alpha = 1\%$ (zvolená hladina významnosti) a navíc tak, že překročení směrem výše bude stejně pravděpodobně jako směrem níže (neboli na každou stranu $\alpha/2$). Jinými slovy, má platit, že

$$P(\overline{\boldsymbol{X}} < u_1) = \frac{\alpha}{2} = P(u_2 < \overline{\boldsymbol{X}})$$

neboli

$$u_1 = q_{\overline{\boldsymbol{X}}}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad \text{a} \quad u_2 = q_{\overline{\boldsymbol{X}}}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

(u veličiny $\overline{\boldsymbol{X}}$ předpokládáme normální rozdělení.)

Pokud nastane jedno z překročení (tj. pro realizaci $\overline{\boldsymbol{x}}$ máme $\overline{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R} \setminus \langle u_1, u_2 \rangle$), budeme to považovat za přílišné porušení nulové hypotézy (pro danou toleranci chyby) a zamítneme ji. Místo veličiny $\overline{\boldsymbol{X}}$ a jejích kvantilů si ale raději vezmeme už zmíněnou statistiku $T = \frac{\overline{\boldsymbol{X}} - 0.5}{0.5}\sqrt{n}$, která je jen transformací veličiny $\overline{\boldsymbol{X}}$, a problém pomocí ní ekvivalentně přeformulujeme. Veličina T má přibližně rozdělení $N(0, 1)$, takže meze pro T snadno najdeme:

$$P\left(T < \Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) = \frac{\alpha}{2} = P\left(\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) < T\right) \; .$$

Tedy kritériem pro **ZAMÍTNUTÍ** nulové hypotézy je případ, kdy pro realizaci t statistiky T nastane

$$t < \Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad \text{nebo} \quad \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) < t$$

neboli

$$|t| > \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \; ,$$

protože máme rovnost $\Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$.

Nyní stačí už jen dosadit:

(a) Zde máme $n = 200$, $\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{80}{200} = 0.4$ a $1 - \frac{\alpha}{2} = 0.995$ takže

$$|t| = \left|\frac{\overline{\boldsymbol{x}} - 0.5}{0.5}\sqrt{n}\right| = \left|\frac{0.4 - 0.5}{0.5}\sqrt{200}\right| \doteq 2,828 > 2,576 \doteq \Phi^{-1}(0.995) \; .$$

Hypotézu $\mathbf{H}_0 : p = \frac{1}{2}$ tedy **ZAMÍTÁME** na dané hladině $\alpha = 1\%$.

(b) Zde máme $n = 100$ a opět $\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{40}{100} = 0.4$ a $1 - \frac{\alpha}{2} = 0.995$ takže

$$|t| = \left|\frac{\overline{\boldsymbol{x}} - 0.5}{0.5}\sqrt{n}\right| = \left|\frac{0.4 - 0.5}{0.5}\sqrt{100}\right| = 2 \;\not>\; 2,576 \doteq \Phi^{-1}(0.995) \; .$$

Hypotézu $\mathbf{H}_0 : p = \frac{1}{2}$ tedy **NEZAMÍTÁME** na dané hladině $\alpha = 1\%$.

Jak je vidět, za předpokladu, že mince je symetrická se jen 40% úspěšných pokusů dá ještě tolerovat při $n = 100$ hodech, ale už ne při $n = 200$ hodech.