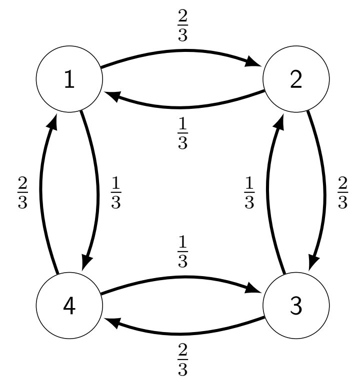
13. cvičení z PSI

2. ledna 2019

13.1 (Markovovy řetězce - sestavení matice, klasifikace stavů, pravděpodobnosti přechodu po několika krocích)

Markovovův řetězec je dán grafem:



(a) Napište matici přechodu, klasifikujte stavy a stanovte všechny komponenty.

(b) Stanovte pravděpodobnosti přechodu ze stavu 1 do stavu 4 po právě 3 krocích.

(c) Popište Markovovův řetěz, který vznikne aplikováním π kroků, kde π je perioda původních stavů.

Řešení:

Cvičení 1.1: `http://cmp.felk.cvut.cz/~navara/stat/MarkovCvic_print.pdf`

(a) Odpovídající matice přechodu je

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} .$$

Všechny stavy jsou trvalé a navzájem propojené cestami. Tvoří tedy jedinou komponentu. V komponentě mají všechny stavy stejnou periodu π. Její hodnotu zjistíme takto:

Perioda π dané komponenty musí dělit délku libovolné uzavřené cesty, tj. musí být buď $\pi = 1$ nebo $\pi = 2$ (protože v grafu určitě máme uzavřenou cestu délky 2).

Pokud je perioda $\pi > 1$, pak množina všech trvalých stavů musí být rozložitelná na π navzájem disjunktních množin stavů $M_1, \ldots, M_\pi$, které jsou určeny tak, že

- stavy a a b jsou ve stejné množině M_i (pro nějaké $i = 1, \ldots, \pi$), jestliže jsou spojeny orientovanou cestou, jejíž délka je dělitelná π.

Tyto množiny splňují toto:

($*$) Uvnitř těchto množin M_i nesmějí vést mezi stavy šipky. Naopak všechny šipky z dané množiny M_i musí směrovat do nějaké jiné množiny M_j pro $j \neq i$.

Na druhou stranu, pokud pro nějaké číslo $d > 1$ existují množiny $N_1, \dots, N_d$, které mají vlastnost $(*)$, pak d dělí periodu π.

Zkusíme tedy množiny s takovýmito vlastnostmi vytvořit pro $d = 2$ (a to tak, že se díváme, kam se z daného stavu určitě dostaneme po sudém počtu kroků). Zřejmě stačí vzít množiny stavů $\{1, 3\}$ a $\{2, 4\}$, pro které je vlastnost $(*)$ splněna. Tedy dostáváme, že $d = 2$ dělí π a $\pi \leq 2$ a proto $\pi = 2$.

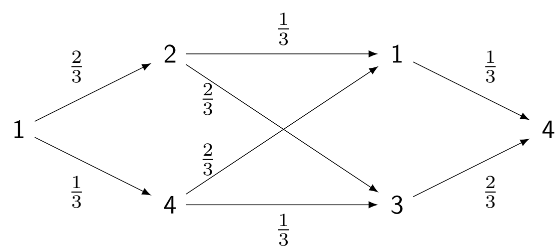
Poznámka: Dá se snadno ověřit, že jediné rozdělení pravděpodobnosti $\boldsymbol{p}$ takové, že $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p} \cdot \mathbf{P}$ (tzv. stacionární rozdělení), je v tomto případě právě jen $\boldsymbol{p} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. Takovéto rozdělení pravděpodobnosti se tedy během kroků nemění. Současně platí, že

$$\left(\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}, 0\right) \cdot \mathbf{P} = \left(0, \tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}\right)$$

$$\left(0, \tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}\right) \cdot \mathbf{P} = \left(\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}, 0\right)$$

takže tato dvě rozdělení $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0\right)$ a $\left(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ oscilují navzájem mezi sebou, což je způsobeno právě periodou rovnou 2. Také vidíme, ze tato dvě rozdělení NEKONVERGUJÍ ke stacionárnímu rozdělení.

(b) Všechny cesty z 1 do 4 ve třech krocích jsou popsány takto:



Cesty jsou celkem 4, přičemž jejich pravděpodobnosti jsou:

$$P(1 \to 4 \to 3 \to 4) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$$

$$P(1 \to 4 \to 1 \to 4) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$$

$$P(1 \to 2 \to 3 \to 4) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$$

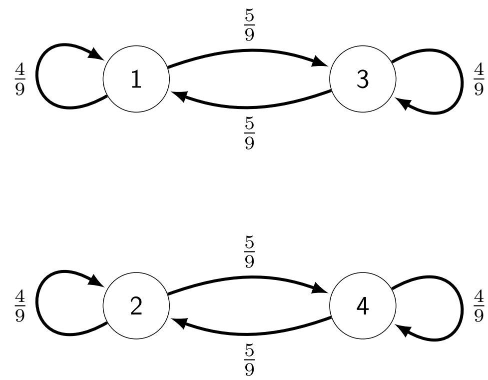
$$P(1 \to 2 \to 1 \to 4) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$$

Tedy pravděpodobnost přechodu z 1 do 4 ve třech krocích je součet těchto pravděpodobností, tedy $\frac{2}{27} + \frac{2}{27} + \frac{8}{27} + \frac{2}{27} = \frac{14}{27}$.

(c) Řetězec daný aplikováním π kroků je určený maticí $\mathbf{P}^{\pi}$ a rozpadne se na π komponent, z nichž každá bude mít periodu 1.

Máme:

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/9 & 0 & 5/9 & 0 \\ 0 & 4/9 & 0 & 5/9 \\ 5/9 & 0 & 4/9 & 0 \\ 0 & 5/9 & 0 & 4/9 \end{pmatrix}.$$



13.2 (Markovovy řetězce - pravděpodobnosti přechodu po několika/mnoha krocích)
Pro řetězec z příkladu **13.1**:

(a) Stanovte pravděpodobnosti stavů po 4 krocích, jestliže počáteční stav je v jednom pevně vybraném vrcholu.

(b) Konverguje rozdělení stavů ke stacionárnímu? Za jakých podmínek? Odůvodněte.

(c) Stanovte rozdělení pravděpodobností stavů po 1000 krocích, pokud jsme vyšli ze stavu 1.

Řešení:
Cvičení 1.1: `http://cmp.felk.cvut.cz/~navara/stat/MarkovCvic_print.pdf`

(a) Graf je symetrický z hlediska všech vrcholů, takže si bez újmy na obecnosti zvolíme jako počáteční stav zvolíme např. stav 1. Počáteční rozdělení pravděpodobnosti tak bude

$$\boldsymbol{p}(0) = (1, 0, 0, 0)\ .$$

Rozdělení pravděpodobnosti $\boldsymbol{p}(n+1)$ v $n+1-$tém kroku se spočítá pomocí rozdělení pravděpodobnosti $\boldsymbol{p}(n)$ v $n-$tém kroku jako

$$\boldsymbol{p}(n+1) = \boldsymbol{p}(n) \cdot \mathbf{P}\ .$$

Rozdělení pravděpodobnosti po 4 krocích je tedy

$$\boldsymbol{p}(4) = \boldsymbol{p}(0) \cdot \mathbf{P}^4\ .$$

Jednodušší než počítat 4-tou mocninu matice je ale spočítat postupně vektory $\boldsymbol{p}(i)$, protože výpočtů tak uděláme méně:

$$\boldsymbol{p}(1) = \boldsymbol{p}(0) \cdot \mathbf{P} = \left(0, \tfrac{2}{3}, 0, \tfrac{1}{3}\right)$$
$$\boldsymbol{p}(2) = \boldsymbol{p}(1) \cdot \mathbf{P} = \left(\tfrac{4}{9}, 0, \tfrac{5}{9}, 0\right)$$
$$\boldsymbol{p}(3) = \boldsymbol{p}(2) \cdot \mathbf{P} = \left(0, \tfrac{13}{27}, 0, \tfrac{14}{27}\right)$$
$$\boldsymbol{p}(4) = \boldsymbol{p}(3) \cdot \mathbf{P} = \left(\tfrac{41}{81}, 0, \tfrac{40}{81}, 0\right)$$

Jak je vidět, dvojice protilehlých stavů se stále střídají a přitom se jejich pravděpodobnosti stále více vyrovnávají.

(b) Řetězec je sice nerozložitelný (tj. má jen jednu komponentu), ale není ergodický (protože má periodu větší než 1). Tedy ne každé počáteční rozdělení konverguje ke stacionárnímu.

Speciálně ještě platí, že:

Věta: Pro Markovův řetězec s komponentami $K_1, \ldots, K_\ell$ a jejich periodami $\pi_1, \ldots, \pi_\ell$ platí, že:

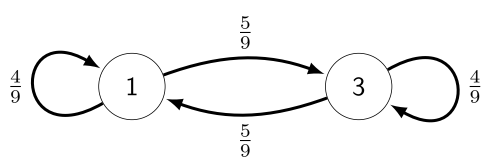
(i) Každá komponenta K_i má *jediné* své stacionární rozdělení $\boldsymbol{p}_i$ takové, že jeho hodnoty jsou nenulové na stavech z K_i a nulové na stavech mimo K_i. Libovolné další stacionární rozdělení $\boldsymbol{p}$ na celém řetězci je pak nějakou konvexní kombinací těchto speciálních rozdělení, tedy existují $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell \geq 0$ taková, že $\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i = 1$ a $\boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \boldsymbol{p}_i$ (a naopak libovolná konvexní kombinace stacionárních rozdělení je opět stacionární).

(ii) Každé počáteční rozdělení konverguje k *nějakému* stacionárnímu $\Leftrightarrow$ každá komponenta K_i tohoto řetězce má periodu $\pi_i = 1$.

(iii) Každé počáteční rozdělení konverguje k *jedinému* stacionárnímu $\Leftrightarrow$ řetězec má jedinou komponentu s periodu 1 (tedy je nerozložitelný a neperiodický, neboli *ergodický*).

.

(c) Když začínáme ve stavech množiny $\{1, 3\}$, pak v sudém počtu kroků se budeme opět nacházet v množině $\{1, 3\}$ (a v lichém počtu kroků v množině $\{2, 4\}$). Rozložení pravděpodobnosti po velkém sudém počtu kroků pak bude blízké stacionárnímu rozdělení na Markovově řetězci na množině $\{1, 3\}$, který vznikne z původního řetězce aplikací vždy dvou kroků (viz obrázek v bodě (c) příkladu **13.1**):



Ze symetrie stavů 1 a 3 vyplývá, že stacionární rozdělení na těchto stavech bude mít stejné hodnoty, tj. 1/2. Výsledné rozdělení po 1000 krocích tak bude přibližně rovno $(1/2, 0, 1/2, 0)$.

13.3 (Markovovy řetězce - sestavení diagramu, klasifikace stavů, uzavřené množiny)

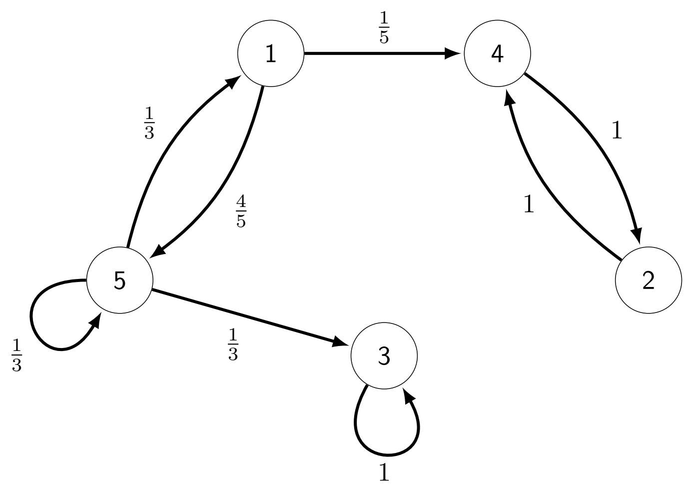
V Markovově řetězci s následující maticí přechodu P oklasifikujte všechny stavy a najděte všechny uzavřené množiny trvalých stavů.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/5 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Řešení:

Cvičení 1.2: `http://cmp.felk.cvut.cz/~navara/stat/MarkovCvic_print.pdf`

Nakreslíme si příslušný orientovaný graf přiřazený matici $\mathbf{P}$:



Z něj už je snadno vidět, že

- stav 3 je trvalý, dokonce absorpční (tudíž má periodu 1),
- stavy 2 a 4 jsou trvalé (s periodou 2) a
- stavy 1 a 5 jsou přechodné.

Všechny uzavřené množiny trvalých stavů (tj. množiny trvalých stavů, ze kterých nevedou ven žádné šipky) jsou

$$\emptyset,\ \{3\},\ \{2,4\},\ \{2,3,4\}\ .$$

Poznámka: Postupné změny rozdělení pravděpodobnosti během jednotlivých kroků si můžeme představovat také tak, že máme k dispozici dané množství kapaliny (o objemu 1), které se přelévá mezi jednotlivými stavy. Přechodné stavy se pak vyznačují tím, že to, co z nich "odteče" do trvalých stavů, se už do nich nevrátí, takže celkové množství kapaliny v těchto stavech se postupně v limitě sníží až k nule.

13.4 (Markovovy řetězce - klasifikace stavů, uzavřené množiny, stacionární rozdělení, konvergence) Markovův řetězec má matici přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

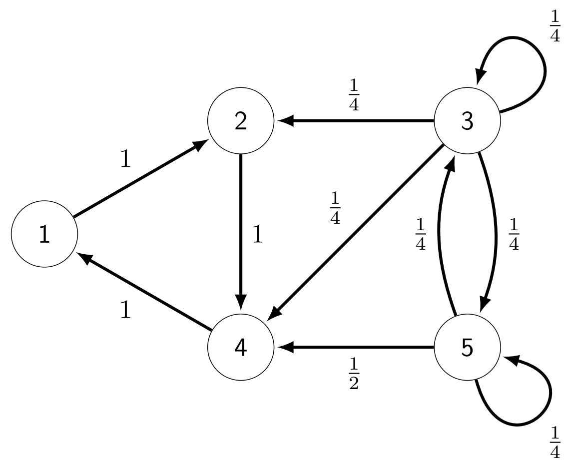
(a) Klasifikujte všechny stavy.

(b) Najděte všechny uzavřené množiny stavů.

(c) Najděte všechna stacionární rozdělení pravděpodobností a posuďte, zda řetězec k některému z nich konverguje.

Řešení:

Cvičení 1.8: `http://cmp.felk.cvut.cz/~navara/stat/MarkovCvic_print.pdf`



13.5 (Maximálně věrohodné odhady)

Odhadněte stav i a k Markovova řetězce s maticí přechodu

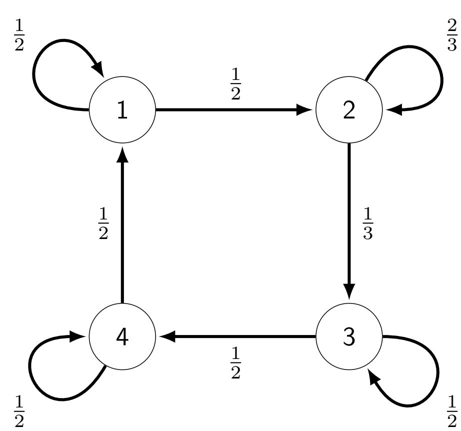
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

z pozorované posloupnosti stavů $(2, i, k, 3)$.

Řešení:

Cvičení 3.1: `http://cmp.felk.cvut.cz/~navara/stat/MarkovCvic_print.pdf`

Pro větší názornost si nakreslíme diagram:



Stav odhadneme pomocí maximální věrohodnosti

$$L(i,k) = P\Big(X_0 = 2,\ X_1 = i,\ X_2 = k,\ X_3 = 3\Big).$$

Protože

$$P\Big(X_0 = i_0\ ,\dots,\ X_n = i_n\Big) =$$

$$= P\Big(X_n = i_n \Big| X_0 = i_0\ ,\dots,\ X_{n-1} = i_{n-1}\Big)\cdot P\Big(X_0 = i_0\ ,\dots,\ X_{n-1} = i_{n-1}\Big) =$$

$$= P\Big(X_n = i_n \Big| X_{n-1} = i_{n-1}\Big)\cdot P\Big(X_0 = i_0\ ,\dots,\ X_{n-1} = i_{n-1}\Big) =$$

$$= p_{i_{n-1},i_n}\cdot P\Big(X_0 = i_0\ ,\dots,\ X_{n-1} = i_{n-1}\Big)\ ,$$

dostaneme postupně, že

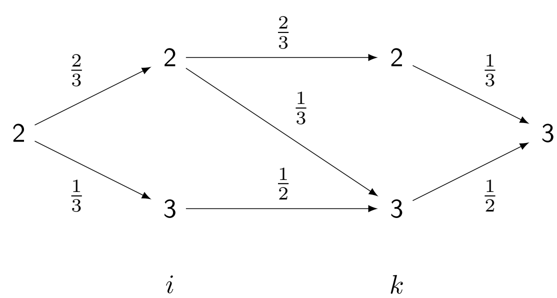
$$P\Big(X_0 = i_0\ ,\dots,\ X_n = i_n\Big) = P\Big(X_0 = i_0\Big)\cdot p_{i_0,i_1}\cdot p_{i_1,i_2}\cdots p_{i_{n-1},i_n}\ ,$$

kde $p_{j,\ell}$ je prvek matice $\mathbf{P}$ v j-tém řádku a ℓ-tém sloupci.

V našem případě tak máme

$$L(i,k) = P(X_0 = 1)\cdot p_{2,i}\cdot p_{i,k}\cdot p_{k,3}\ .$$

Hodnotu počáteční pravděpodobnosti $c := P(X_0 = 1)$ sice neznáme, ale ani jí nepotřebujeme k výpočtu (za předpokladu, že byla nenulová). Abychom zjistili, které stavy i a k vůbec přicházejí (pro nenulovou věrohodnost) v úvahu, nakreslíme následující obrázek:



Vypsali jsme všechny stavy, na které přejde v jednom kroku počáteční stav 2 (druhý sloupec) a pak všechny stavy, které přejdou na koncový stav 3 (třetí sloupec). Mezi těmito dvěma sloupci nakreslíme všechny možné způsoby přechodu. Celkem máme tři možné cesty z počátečního 2 do koncového 3. Pak snadno dostáváme:

$$\begin{array}{rcccl} L(2,2) &=& c\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} &=& \frac{4}{27}\cdot c \\ L(2,3) &=& c\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} &=& \frac{1}{9}\cdot c = \frac{3}{27}\cdot c \\ L(3,3) &=& c\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} &=& \frac{1}{12}\cdot c \\ L(i,k) &=& 0\ , & & \text{jinak.} \end{array}$$

Případ, pro který je hodnota věrohodnosti nejvyšší, je tedy $i = 2$ a $k = 4$ (za předpokladu, že $P(X_0 = 1) > 0$, jinak jsou všechny čtyři stavy stejně věrohodné).

13.6 (Stacionární rozdělení)

Najděte všechna stacionární rozdělení pravděpodobnosti stavů Markovova řetězce s maticí přechodu

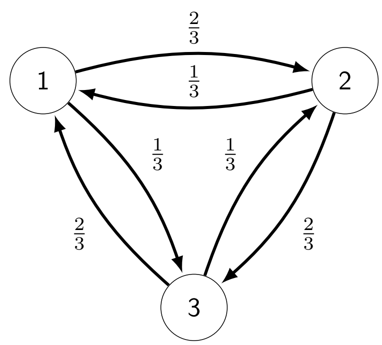
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

a posuďte, zda k nim rozdělení stavů konverguje.

Řešení:

Cvičení 4.7: `http://cmp.felk.cvut.cz/~navara/stat/MarkovCvic_print.pdf`

Pro větší názornost si opět nakreslíme diagram:



Stacionární rozdělení pravděpodobnosti pro matici $\mathbf{P}$ je takový vektor $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$, s nezápornými složkami, pro který platí $\sum_j p_j = 1$ a

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p} \cdot \mathbf{P} \quad \text{neboli} \quad \boldsymbol{p} \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{I}_3) = 0 \ .$$

Ekvivalentní zápis je

$$\mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{p}^T = \boldsymbol{p}^T \quad \text{neboli} \quad (\mathbf{P}^T - \mathbf{I}_3^T) \cdot \boldsymbol{p}^T = 0^T \ .$$

Je tedy třeba najít vlastní vektor matice $\mathbf{P}^T$ pro její vlastní číslo 1.

Pozor! Přechod k transponované matici je nezbytný, pokud budeme při Gaussově eliminaci používat ekvivalentní ŘÁDKOVÉ úpravy soustavy $(\mathbb{A}|0)$. Ta totiž odpovídá rovnici $\mathbb{A}x = 0$, kdy x je SLOUPCOVÝ vektor.

Pomocí Gaussovy eliminace najdeme tudíž řešení soustavy $(\mathbf{P}^T - \mathbf{I}_3^T) \cdot \boldsymbol{p}^T = 0$ reprezentované maticí

$$\mathbf{P}^T - \mathbf{I}_3^T = \begin{pmatrix} -1 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -1 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tato soustava má hodnost 2, tedy má pouze $3 - 2 = 1$ lineárně nezávislých řešení, např. $(1, 1, 1)$. Po jeho znormování pak dostaneme

$$\boldsymbol{p} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) \ .$$

Pozor! NEJEDNÁ se o eukleidovskou normu $\|\boldsymbol{p}\|_2 := \left(\sum_i |p_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, ALE o normu tvaru $\|\boldsymbol{p}\|_1 := \sum_i |p_i|$.

Jedinečnost řešení plyne také z toho, že

- daný řetězec má všechny stavy *trvalé* a *neperiodické* (tj. ergodické) a

- samotný řetězec je *nerozložitelný* (tj. jediná uzavřená neprázdná množina trvalých stavů je množina *všech* těchto stavů, neboli všechny stavy jsou propojené nějakou cestou, nebo to také prostě můžeme říct tak, že graf má jedinou komponentu souvislosti).

Tyto vlastnosti se dají ihned odvodit z orientovaného grafu výše.

13.7 (Markovovy řetězce - klasifikace stavů, uzavřené množiny, stacionární rozdělení, konvergence) Markovův řetězec má matici přechodu

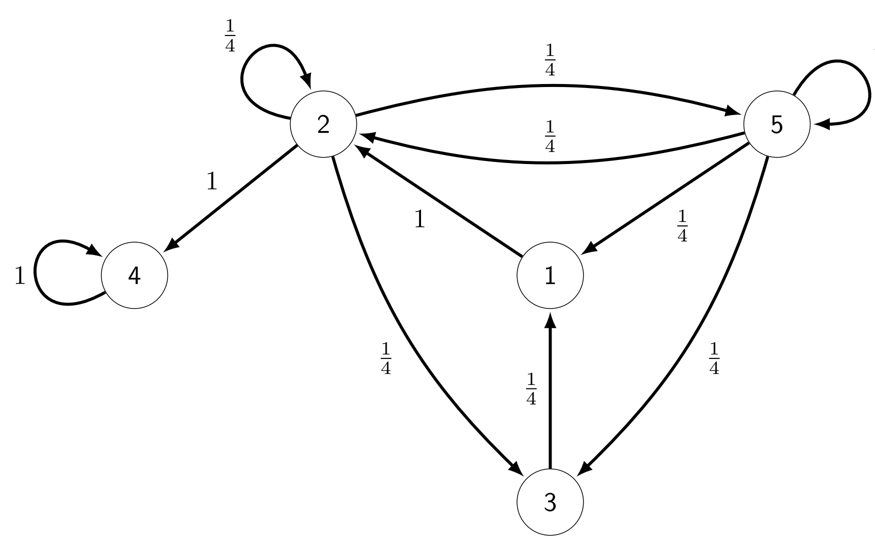
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

(a) Klasifikujte všechny stavy.

(b) Najděte všechny uzavřené množiny stavů.

(c) Najděte všechna stacionární rozdělení pravděpodobností a posuďte, zda řetězec k některému z nich konverguje.

Řešení:



(a) Stavy 1, 2, 3 a 5 jsou přechodné; stav 4 je trvalý absorpční.

(b) Jediné uzavřené množiny stavů jsou $\emptyset$ a $\{4\}$.

(c) Jediné stacionární řešení je tvaru $(0, 0, 0, 1, 0)$ (tj. setrvávání ve stavu 4) a řetězec k němu vždy konverguje z jakéhokoliv počátečního rozdělení (protože řetězec skládající se pouze ze stavu 4 je zjevně ergodický).