# 3. cvičení z PST

17. října 2018

**3.1** ((ne)závislost jevů)

Pro hod dvěma mincemi uvažujme jevy:

$A =$ "na první minci padl líc",
$B =$ "na druhé minci padl rub",
$C =$ "na mincích padly různé výsledky".

Jak je to s nezávislostí jevů $A, B, C$?

**Řešení:**
Jevové pole bude $\Omega = \{\text{líc, rub}\} \times \{\text{líc, rub}\}$ a každý elementární jev bude stejně pravděpodobný. Pak máme

$$P(A) = P(B) = P(C) = \tfrac{1}{2}$$

a

$$A \cap B = A \cap C = B \cap C = A \cap B \cap C$$

Tedy

$$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = P(A \cap B \cap C) = \tfrac{1}{4}\ .$$

a proto máme

$$P(A \cap B) = \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = P(A) \cdot P(B)$$

a podobně je to pro ostatní případy, zatímco

$$P(A \cap B \cap C) = \tfrac{1}{4} \neq \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C).$$

Jevy jsou tak po dvou nezávislé, ale ne celkově nezávislé.

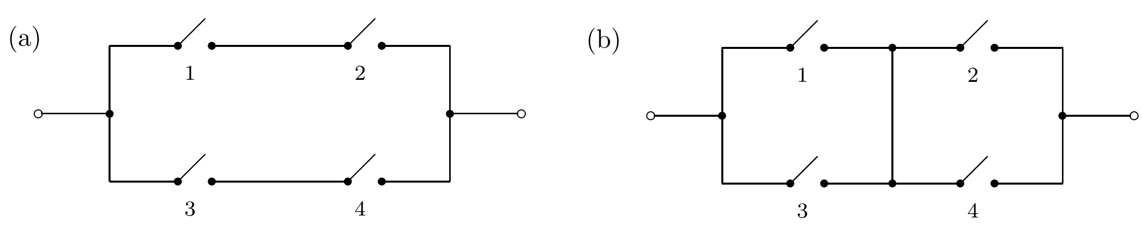
**3.2** (operace s nezávislými jevy)

Čtyři spínače v zabezpečovacím zařízení pracují nezávisle, každý s pravděpodobností $p \in (0, 1)$. Jsou zapojeny (viz obrázek)

(a) po dvou sériově a pak paralelně

(b) po dvou paralelně a pak sériově.

S jakou pravděpodobností bude zařízení propouštět proud v jednotlivých případech? Pro které zapojení je tato pravděpodobnost větší?



**Řešení:**
Pro $i = 1,2,3,4$ si označme jevy

$A_i$= "*i-tý spínač je zapnutý*"

$B$= "*zařízením prochází proud*"

Víme, že jevy $A_1, \ldots, A_4$ jsou nezávislé a $P(A_i) = p$.

(a) Aby proud procházel zařízením, musí jít buď horní větví nebo spodní větví:

$$B = (A_1 \cap A_2) \cup (A_3 \cap A_4) \ .$$

Pro pravděpodobnost pak (díky nezávislosti) máme

$$P(B) = P\Big((A_1 \cap A_2) \cup (A_3 \cap A_4)\Big) = P(A_1 \cap A_2) + P(A_3 \cap A_4) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) =$$

$$= p^2 + p^2 - p^4 = p^2(2 - p^2) \ .$$

(b) Aby proud procházel zařízením, musí projít levou částí a současně pravou částí:

$$B = (A_1 \cup A_3) \cap (A_2 \cup A_4) \ .$$

Z nezávislosti jevů $A_i$ vyplývá, že jevy $A_1 \cup A_3$ a $A_2 \cup A_4$ jsou také nezávislé. Můžeme tak psát

$$P(B) = P\Big((A_1 \cup A_3) \cap (A_2 \cup A_4)\Big) = P(A_1 \cup A_3) \cdot P(A_2 \cup A_4) =$$

$$= \Big(P(A_1) + P(A_3) - P(A_1) \cdot P(A_3)\Big) \cdot \Big(\cdots\Big) = (2p - p^2)^2 = p^2(2 - p)^2 \ .$$

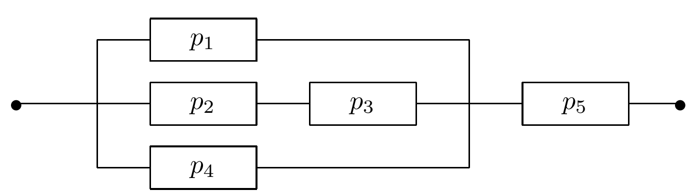
Už ze schématu zapojení je jasné, že obecně větší pravděpodobnost průchodu proudu zařízením je v případě (b), kde je jeden spoj navíc. To lze potvrdit i z vypočtené pravděpodobnosti:

$$p^2(2 - p^2) < p^2(2 - p)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < 2p^2(p - 1)^2 \ .$$

Použili jsme to, že pokud jevy $A_1, \ldots, A_n$ jsou nezávislé, pak také jevy $A_1 \cup A_2, A_3, \ldots, A_n$ jsou nezávislé. Nezávislé jevy tedy můžeme libovolně sdružovat (daný jev vždy sjednotíme vždy jen s jednou skupinou jevu) a výsledek jsou opět nezávislé jevy.

**3.3** (operace s nezávislými jevy)

Zařízení na obrázku je tvořeno zapojením bloků, které pracují nezávisle na sobě a pravděpodobností výskytu poruch jsou zadány. Vypočtěte pravděpodobnost poruchy funkce celého zařízení.

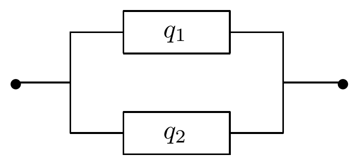



Pravděpodobnosti vyčíslete pro $p_1 = 0.2$, $p_2 = p_3 = 0.4$, $p_4 = 0.3$ a $p_5 = 0.1$.

**Řešení:**

Úlohu si zjednodušíme tím, že budeme postupně nahrazovat více bloků jedním blokem, který bude mít stejnou pravděpodobnost poruchy.

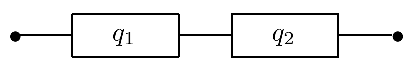
- Pro paralelní zapojení




a jevy $A_1$ =“horní blok má poruchu” a $A_2$ =“dolní blok má poruchu” je pravděpodobnost poruchy tohoto zapojení rovna

$$P(\text{“porucha paralelního zapojení”}) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = q_1 \cdot q_2 \ .$$

- Pro sériové zapojení




a jevy $B_1$ =“levý blok má poruchu” a $B_2$ =“pravý blok má poruchu” je pravděpodobnost poruchy tohoto zapojení rovna

$$P(\text{“porucha sériového zapojení”}) = P(B_1 \cup B_2) = P(B_1) + P(B_2) - P(B_1 \cap B_2) =$$

$$= q_1 + q_2 - q_1 \cdot q_2 = 1 - (1 - q_1)(1 - q_2) \ .$$

Pro vyřešení původního zadání teď

(a) nejdříve nahradíme sériové zapojení dvou bloků s pravděpodobnostmi poruch $p_2 = 0.4$ a $p_3 = 0.4$ jediným blokem s pravděpodobností poruchy

$$p_{2,3} = 1 - (1 - p_2)(1 - p_3) = 1 - 0.6 \cdot 0.6 = 0.64 \ .$$

(b) dále nahradíme paralelní zapojení tří bloků s pravděpodobnostmi poruch $p_1 = 0.2$, $p_{2,3} = 0.64$ a $p_4 = 0.3$ jediným blokem s pravděpodobností poruchy

$$p_{1,2,3,4} = p_1 \cdot p_{2,3} \cdot p_4 = 0.2 \cdot 0.64 \cdot 0.3 = 0.0384 \ .$$

(c) a nakonec nahradíme sériové zapojení dvou bloků s pravděpodobnostmi poruch $p_{1,2,3,4} = 0.0384$ a $p_5 = 0.1$ jediným blokem, který odpovídá celému zařízení a má pravděpodobnost poruchy

$$p_{1,2,3,4,5} = 1 - (1 - p_{1,2,3,4})(1 - p_5) = 1 - 0.9616 \cdot 0.9 = 1 - 0,86544 = 0.13456 \ .$$

**3.4** (bayesovská pravděpodobnost)

Máme 3 krabice stejného vzhledu. V první jsou 3 bílé a 2 černé koule, ve druhé jsou 2 bílé a 2 černé koule, ve třetí je 1 bílá a 4 černé koule.

(a) Určete pravděpodobnost, že z náhodně vybrané krabice náhodně vytáhneme bílou kouli.

(b) Pokud nám někdo řekl, že náhodně vybral jednu z krabic a vytáhl 1 kouli, která byla bílá, s jakou pravděpodobností můžeme usuzovat, že v téže krabici se nachází alespoň 3 černé koule?

**Řešení:**
Označme jevy:

$A_i$ = "byla vybrána $i$-tá krabice",
$B$ = "koule vytažená z vybrané krabice je bílá".

pro $i = 1, 2, 3$. Víme, že $A_1$, $A_2$ a $A_3$ je úplný disjunktní systém jevů, o kterých předpokládáme, že jsou stejně pravděpodobné. Tedy

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \tfrac{1}{3}$$

$$P(B|A_1) = \tfrac{3}{5} \qquad P(B|A_2) = \tfrac{2}{4} \qquad P(B|A_3) = \tfrac{1}{5}\ .$$

(a) Z věty o úplné pravděpodobnosti máme

$$P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(B|A_i) \cdot P(A_i) = \tfrac{1}{3} \cdot \left(\tfrac{3}{5} + \tfrac{2}{4} + \tfrac{1}{5}\right) = \tfrac{13}{30} \doteq 0.4333\ .$$

(b) Protože jediná krabice obsahující alespoň 3 černé koule je třetí krabice, zajímá nás $P(A_3|B)$. Z Bayesovy věty máme:

$$P(A_3|B) = \frac{P(B|A_3) \cdot P(A_3)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{13}{30}} = \tfrac{2}{13} = 0.1538\ .$$

Ještě je dobré uvědomit si, jak vypadá Kolmogorův model, speciálně jaké jsou pravděpodobnosti elementárních jevů:

- elementární jev $\omega$ bude dvojice "(výběr krabice, vytažení koule z této krabice)"a $\Omega$ bude tedy množina všech takových $\omega$,
- $A_i = \{\omega \in \Omega \mid \omega = (\text{výběr } i\text{-té krabice, vytažení koule z této krabice})\}$,
- pro počet krabic $k = 3$ a počet koulí $k_i$ v $i$-té krabici pak pro $\omega \in A_i$ máme $P(\{\omega\}) = \frac{1}{k \cdot k_i}$,
- pravděpodobnost jevu $A_i$, tedy výběr $i$-té krabice, pak je $P(A_i) = \sum_{\omega \in A_i} \frac{1}{k \cdot k_i} = \frac{k_i}{k \cdot k_i} = \frac{1}{k}$.

Můžeme si tedy všimnout, že pravděpodobnost vytažení koule z dané vybrané krabice nejsou všechny stejné, zatímco pravděpodobnosti výběru dané krabice ano.

Jak by situace vypadala, kdybychom v zadání předpokládali, že koule nevybíráme z krabic, ale sesypeme je do jedné nádoby, přičemž si na každou z nich napíšeme z jaké krabice pochází? Pravděpodobností se pak změní:

- elementární jev $\omega'$ bude dvojice "(číslo krabice, koule pocházející z krabice s tímto číslem)"a $\Omega'$ bude tedy množina všech takových $\omega'$,
- jev $A'_i = \{\omega' \in \Omega' \mid \omega' = (i, \text{koule pocházející z } i\text{-té krabice})\}$ představuje všechny koule, které pocházejí z $i$-té krabice,
- protože nyní taháme koule z nádoby, budeme považovat pravděpodobnost jejich vytažení za stejnou pro všechny koule, tj. $P(\{\omega\}) = \frac{1}{K}$, kde $K = \sum_j k_j$,
- pravděpodobnost jevu $A'_i$, tedy podíl počtu koulí z $i$-té krabice, pak bude $P(A'_i) = \sum_{\omega \in A'_i} \frac{1}{K} = \frac{k_i}{K}$.

Sesypáním koulí jsme tak způsobili to, že šance na vytažení kterékoliv koule se teď vyrovnaly a naopak pravděpodobnosti "příslušející krabicím"jsou různé. Pokud bychom tedy řešili takto pozměněné zadání, tak pro jev

$B'$ = "koule vytažená z nádoby je bílá"

a úplný disjunktní systém jevů $A'_1$, $A'_2$ a $A'_3$ dostáváme (s celkovým počtem koulí $5 + 4 + 5 = 14$), že

$$P(A'_1) = \tfrac{5}{14} \qquad P(A'_2) = \tfrac{4}{14} \qquad P(A'_3) = \tfrac{5}{14}$$

$$P(B'|A'_1) = \tfrac{3}{5} \qquad P(B'|A'_2) = \tfrac{2}{4} \qquad P(B'|A'_3) = \tfrac{1}{5}\ .$$

Opět jediná krabice obsahující alespoň 3 černé koule je třetí krabice, takže nás bude zajímat $P(A_3'|B')$. Z Bayesovy věty máme:

$$P(A_3'|B') = \frac{P(B'|A_3') \cdot P(A_3')}{P(B')}$$

$$P(B') = \sum_{i=1}^{3} P(B'|A_i') \cdot P(A_i') = \tfrac{3}{5} \cdot \tfrac{5}{14} + \tfrac{2}{4} \cdot \tfrac{4}{14} + \tfrac{1}{5} \cdot \tfrac{5}{14} = \tfrac{3}{7} = 0.4286$$

(což se snadněji dalo spočítat prostě podílem bílých koulí v nádobě jako $P(B') = \frac{3+2+1}{14} = \frac{3}{7}$) a tedy

$$P(A_3'|B') = \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{14}}{\frac{3}{7}} = \tfrac{1}{6} \doteq 0.1667$$

(což se opět snadněji dalo spočítat prostě podílem bílých koulí pocházejících ze 3. krabice v rámci všech bílých koulí, tj. $P(A_3'|B') = \frac{1}{3+2+1} = \frac{1}{6}$).

**3.5** (bayesovská pravděpodobnost)

V dílně pracuje 10 dělníků rozdělených do tří skupin, přičemž každý z dělníků vyrobí stejný počet výrobků. První skupina se skládá z 5 dělníků, druhá skupina ze 3 a třetí skupina ze 2 dělníků. Z výrobků první skupiny je jich 96% standardních, ze druhé skupiny je to 90% a z výrobků třetí skupiny je jich jen 85% standardních. Všechny výrobky jdou do skladu, ze kterého náhodně vybíráme jeden výrobek.

(a) Jaká je pravděpodobnost, že výrobek je standardní?

(b) Zjistili jsme, že výrobek je standardní. Jaká je pravděpodobnost, že ho vyrobil někdo z první skupiny?

**Řešení:**
Označme si jevy:

$A_i$ = "vybraný výrobek je vyrobený $i$-tou skupinou",
$S$ = "vybraný výrobek je standardní".

Víme, že $A_1$, $A_2$ a $A_3$ je úplný disjunktní systém jevů a vzhledem k tomu, že každý dělník přispěje do skladu stejným počtem výrobků, je pravděpodobnost $P(A_i)$ úměrná počtu dělníků v $i$-té skupině. Tedy

$$P(A_1) = 0.5 \qquad P(A_2) = 0.3 \qquad P(A_3) = 0.2$$

$$P(S|A_1) = 0.96 \qquad P(S|A_2) = 0.9 \qquad P(S|A_3) = 0.85$$

(a) Z věty o úplné pravděpodobnosti máme:

$$P(S) = \sum_{i=1}^{3} P(S|A_i) \cdot P(A_i) = 0.96 \cdot 0.5 + 0.9 \cdot 0.3 + 0.85 \cdot 0.2 = 0.92$$

(b) Zajímá nás $P(A_1|S)$. Z Bayesovy věty máme:

$$P(A_1|S) = \frac{P(S|A_1) \cdot P(A_1)}{P(S)} = \frac{0.96 \cdot 0.5}{0.92} = \frac{12}{23} \doteq 0.5217\ .$$

I tady se podíváme, jak vypadá Kolmogorův model:

- $\Omega =$ "sklad výrobků", počet výrobků ve skladu je $N := |\Omega|$
- elementární jev $\omega \in \Omega$ je tedy vytažení daného výrobku ze skladu
- pravděpodobnost vytažení daného výrobku ze skladu bude dána Laplaceovou pravděpodobnosti, tj. $P(\{\omega\}) = \frac{1}{N}$
- $A_i = \{\omega \in \Omega \mid \text{vytažení } \omega \text{ takového výrobku, který byl vyroben } i\text{-tou skupinou}\}$
- pokud každý dělník vyrobí právě $K$ výrobků a počet dělníků v $i$-té skupině je $m_i$ a celkový počet dělníků je $m = 10$, pak je $N = K \cdot m$ a $|A_i| = K \cdot m_i$ a tedy $P(A_i) = \sum_{\omega \in A_i} \frac{1}{K \cdot m} = \frac{K \cdot m_i}{K \cdot m} = \frac{m_i}{m}$

Každý výrobek ze skladu má stejnou šanci, že ho vybereme.

Zase se můžeme zeptat, jak by situace vypadala, kdybychom v zadání předpokládali, že každá skupina má svůj sklad a ten kdo vybírá výrobky si nejdříve vybere náhodně sklad a v něm pak výrobek. Otázka pak bude, jaká je pravděpodobnost, že výrobek, který dostaneme a který je standardní, byl vybrán z prvního skladu. Pravděpodobnosti pak budou jiné:

- elementární jev $\omega'$ bude dvojice "(číslo skladu, výrobek pocházející z tohoto skladu)" a $\Omega'$ bude tedy množina všech takových $\omega'$,
- jev $A'_i = \{\omega' \in \Omega' \mid \omega' = (i, \text{výrobek pocházející z } i\text{-tého skladu})\}$ představuje všechny výrobky, které pocházejí z $i$-tého skladu,
- pro počet skladů $k = 3$ a počet výrobků $k_i$ v $i$-tém skladu pak pro $\omega \in A'_i$ máme $P(\{\omega\}) = \frac{1}{k \cdot k_i}$,
- pravděpodobnost jevu $A'_i$, tedy výběr $i$-tého skladu, pak je $P(A'_i) = \sum_{\omega \in A'_i} \frac{1}{k \cdot k_i} = \frac{k_i}{k \cdot k_i} = \frac{1}{k}$.

Rozdělením výrobků do skladu jsme dostali to, že šance na výběr výrobků z různých skladů jsou různé (a výběry skladů považujeme za rovnocenné). Pokud bychom tedy řešili takto pozměněné zadání, tak pro jev

$S' =$ "vybraný výrobek je standardní"

a úplný disjunktní systém jevů $A'_1$, $A'_2$ a $A'_3$ dostáváme, že

$$P(A'_1) = P(A'_2) = P(A'_3) = \tfrac{1}{3}$$

$$P(S'|A'_1) = 0.96 \qquad P(S'|A'_2) = 0.9 \qquad P(S'|A'_3) = 0.85\ .$$

Zajímá nás $P(A'_3|S')$. Z Bayesovy věty máme:

$$P(A'_3|S') = \frac{P(S'|A'_3) \cdot P(A'_3)}{P(S')}$$

$$P(S') = \sum_{i=1}^{3} P(S'|A'_i) \cdot P(A'_i) = \Big(0.96 + 0.9 + 0.85\Big) \cdot \tfrac{1}{3} = \tfrac{271}{300} \doteq 0.9033$$

a tedy

$$P(A'_3|S') = \frac{0.85 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{271}{300}} = \tfrac{85}{271} \doteq 0,3137$$

(což se snadněji dalo spočítat prostě podílem standardních výrobků pocházejících ze třetího skladu v rámci všech standardních výrobků, tj. $P(A'_3|B') = \frac{0.85 \cdot N}{0.96 \cdot N + 0.9 \cdot N + 0.85 \cdot N} = \frac{85}{271}$).

**3.6** (bayesovská pravděpodobnost)

Po skončení aktivní služby odchází do důchodu 60 námořních kapitánů. Z této skupiny jich 5 zažilo ztroskotání. Podle statistiky při ztroskotání zahyne třetina kapitánů. Odhadněte pravděpodobnost, že kapitán během své aktivní služby zažije ztroskotání. (Možnost opakovaného ztroskotání a úmrtí z jiné příčiny během aktivní služby zanedbáváme.)

**Řešení:**

Uvažujme jevy:

$A =$ "kapitán se dožije důchodu",
$B =$ "kapitán zažije ztroskotání" .

Ze zadání máme vztahy

$$P(B|A) = \tfrac{5}{60} = \tfrac{1}{12}\ , \qquad P(\overline{A}|B) = \tfrac{1}{3} \quad \text{a} \quad \overline{A} \subseteq B$$

kde poslední vztah odpovídá tomu, že během aktivní služby nemůže nastat úmrtí z jiné příčiny než kvůli ztroskotání. Z posledního vztahu plyne také $\overline{B} \subseteq A$ a tudíž dostáváme tyto podmíněné pravděpodobnosti

$$P(B|\overline{A}) = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = 1 \quad \text{a} \quad P(A|\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = 1\ .$$

Nás zajímá $P(B)$. Z Bayesovy věty máme:

$$P(B) = \frac{P(B|A)}{P(A|B)} \cdot P(A) = \frac{\frac{1}{12}}{1-\frac{1}{3}} \cdot P(A) = \tfrac{1}{8} \cdot P(A)\ .$$

Pomocí věty o úplné pravděpodobnosti můžeme teď zase $P(A)$ vyjádřit pomocí $P(B)$:

$$P(A) = P(A|B) \cdot P(B) + P(A|\overline{B}) \cdot P(\overline{B}) = \Big(1 - \tfrac{1}{3}\Big) \cdot P(B) + 1 \cdot \Big(1 - P(B)\Big) = \\ = 1 - \tfrac{1}{3} P(B)\ .$$

Celkem tedy

$$P(B) = \tfrac{1}{8}\Big(1 - \tfrac{1}{3}P(B)\Big) \quad \text{a} \quad P(B) = \tfrac{3}{25} = 0.12\ .$$

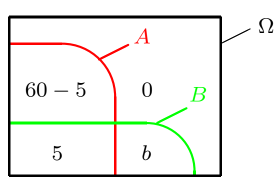
Použitý vzorec je obecně:

$$P(B) = \frac{P(B|A)}{P(A|B)} \cdot P(A) = \frac{P(B|A)}{P(A|B)} \cdot \Big[P(A|B) \cdot P(B) + P(A|\overline{B}) \cdot \big(1 - P(B)\big)\Big]$$

neboli

$$P(B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A|\overline{B})}{P(B|A) \cdot P(A|\overline{B}) + \big(1 - P(B|A)\big) \cdot P(A|B)} = \\ = \frac{P(B|A) \cdot P(A|\overline{B})}{P(B|A) \cdot P(A|\overline{B}) + P(\overline{B}|A) \cdot P(A|B)} = \\ = \frac{\frac{1}{12} \cdot 1}{\frac{1}{12} \cdot 1 + \frac{11}{12} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{3}{25}\ .$$

Můžeme také použít intuitivnější přístup:




kde čísla znamenají velikost dané množiny ve smyslu geometrické pravděpodobnosti (např. $\mathrm{vol}(A \cap B) = 5$ apod.). Přitom víme ještě, že

$$\frac{1}{3} = P(\overline{A}|B) = \frac{b}{5+b}$$

takže

$$\mathrm{vol}(B \setminus A) = b = 2.5\ .$$

Proto máme

$$P(B) = \frac{5+b}{60+b} = \frac{5+2.5}{60+2.5} = \frac{3}{25}\ .$$

**3.7** (bayesovská pravděpodobnost)

U 10% řidičů, kteří způsobili dopravní nehodu, bylo prokázáno požití alkoholu. Rozsáhlý průzkum ukázal, že riziko nehody se požitím alkoholu zvyšuje 7×. Odhadněte, kolik procent řidičů požilo alkohol.

**Řešení:**
Označme jevy

$A =$ "požil alkohol,"

$H =$ "způsobil nehodu."

Pak máme $P(A|H) = 0.1$ a $P(H|A) = 7 \cdot P\left(H|\overline{A}\right)$. Zajímá nás $P(A)$. Z Bayesovy věty a z věty o úplné pravděpodobnosti tak postupně máme

$$P(A) = \frac{P(A|H)}{P(H|A)} \cdot P(H) = \frac{P(A|H)}{P(H|A)} \cdot \left[P(H|A) \cdot P(A) + P\left(H|\overline{A}\right) \cdot P\left(\overline{A}\right)\right] =$$

$$= P(A|H) \cdot \left[P(A) + \frac{P\left(H|\overline{A}\right)}{P(H|A)} \cdot \big(1 - P(A)\big)\right] = 0.1 \cdot \left[P(A) + \tfrac{1}{7} \cdot \big(1 - P(A)\big)\right]$$

a tedy

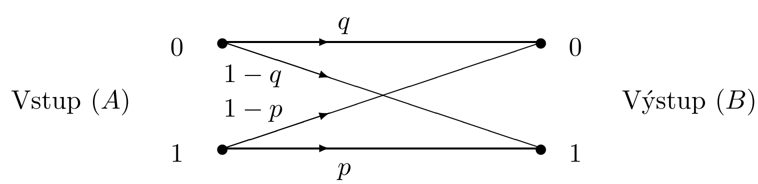
$$10 \cdot P(A) = \tfrac{1}{7} + \tfrac{6}{7} \cdot P(A)$$

Výsledek je

$$P(A) = \frac{\frac{1}{7}}{10 - \frac{6}{7}} = \tfrac{1}{70-6} = \tfrac{1}{64}\ .$$

**3.8** (bayesovská pravděpodobnost v informačním kanálu se šumem)

Binární komunikační kanál přenáší symboly 0 a 1 ze vstupu (jevy $A_0$ a $A_1$) na výstup (jevy $B_0$ a $B_1$) podle uvedeného schématu, kdy je vlivem šumu s určitou pravděpodobností zaměněn symbol 1 za symbol 0 nebo naopak.




Jestliže je $q = P(B_0|A_0) = 0.9$, $p = P(B_1|A_1) = 0.8$ a $P(A_0) = 0.7$, $P(A_1) = 0.3$, určete:

(a) pravděpodobnosti $P(B_0)$ a $P(B_1)$ výskytu symbolů na výstupu;

(b) pravděpodobnost toho, že vyslaný symbol bude přenesen správně.

**Řešení:**
Pro $i = 0, 1$ máme jevy:

$A_i =$ "byl vyslán znak $i$,"

$B_i =$ "byl přijat znak $i$."

(a) Pravděpodobnosti výskytu symbolů na výstupu určíme pomocí vzorce pro úplnou pravděpodobnost (tj. pomoci stochastických matic). Je tedy

$$\begin{bmatrix} P\left(B_0\right), & P\left(B_1\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P\left(A_0\right), & P\left(A_1\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P\left(B_0|A_0\right) & P\left(B_1|A_0\right) \\ P\left(B_0|A_1\right) & P\left(B_1|A_1\right) \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 0.7, & 0.3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.69, & 0.31 \end{bmatrix}$$

(b) Zajímá nás jev $C =$ “vyslaný znak bude přečten správně,” který je vyjádřen jako

$$C = (A_0 \cap B_0) \cup (A_1 \cap B_1)$$

Pravděpodobnost správného přenosu symbolů 0 a 1 tedy je

$$P(C) = P(A_0 \cap B_0) + P(A_1 \cap B_1) =$$
$$= P(B_0|A_0) \cdot P(A_0) + P(B_1|A_1) \cdot P(A_1) = 0.9 \cdot 0.7 + 0.8 \cdot 0.3 = 0.87\,.$$

**3.9** (bayesovská pravděpodobnost v informačním kanálu se šumem)

Na vstupu informačního kanálu jsou posílány znaky ”0”a ”1”, přitom znak ”1”je posílán s pravděpodobností $p$. Na výstupu je daný znak přečten s pravděpodobností chyby $r = 0.1$, která nezávisí na frekvenci s jakou znak chodí (tj. na hodnotě $p$). Určete podmíněné pravděpodobnosti vstupu při známém výstupu, je-li

(a) $p = 0.4$,

(b) $p = 0.1$.

**Řešení:**

Máme jevy

$A_i =$ ”vyšleme znak $i$”,
$B_i =$ ”zachytíme znak $i$”,

kde $i$ je nula nebo jednička. Víme, že

$$\overline{A_0} = A_1 \qquad \overline{B_0} = B_1 \qquad \text{a} \qquad P(A_1) = p \qquad \text{(Toto je vlastnost zprávy.)}$$

Pravděpodobnost $r$ chyby znaku ”1”na výstupu je dána procentem zachycených znaku ”0”v množině odeslaných znaku ”1”, tj.

$$r = \frac{P(B_0 \cap A_1)}{P(A_1)} = P(B_0|A_1) \qquad \text{(Toto je vlastnost přijímacího zařízení.)}$$

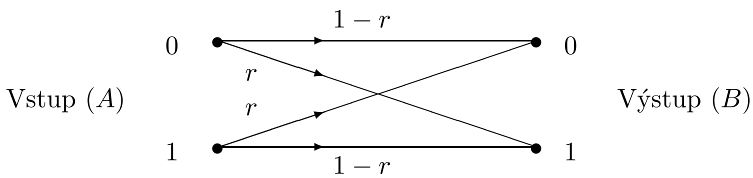
Podobně $r = P(B_1|A_0)$. Pro zjednodušení si uvědomíme, že funkce $\tilde{P}(A) := P(A|B)$ je pravděpodobnost v proměnné $A$, speciálně tedy

$$P(B_0|A_0) = 1 - P(B_1|A_0) = 1 - r$$

a

$$P(B_1|A_1) = 1 - P(B_0|A_1) = 1 - r.$$

Informační kanál je tedy popsán schématem:




Nás zajímají podmíněné pravděpodobnosti

$$P(A_i|B_j) \quad \text{pro} \quad i, j \in \{0, 1\}$$ (Toto zajímá toho, kdo zprávy přijímá.)

Podle Bayesovy věty a věty o úplné pravděpodobnosti teď máme

$$P(A_0|B_0) = \frac{P(B_0|A_0)P(A_0)}{P(B_0|A_0)P(A_0) + P(B_0|A_1)P(A_1)} = \frac{(1-r)\cdot(1-p)}{(1-r)\cdot(1-p) + r\cdot p} = \frac{1}{1 + \frac{r\cdot p}{(1-r)\cdot(1-p)}}$$

a

$$P(A_1|B_1) = \frac{P(B_1|A_1)P(A_1)}{P(B_1|A_1)P(A_1) + P(B_1|A_0)P(A_0)} = \frac{(1-r)\cdot p}{(1-r)\cdot p + r\cdot(1-p)} = \frac{1}{1 + \frac{r\cdot(1-p)}{(1-r)\cdot p}} \; .$$

Pro zbylé podmíněné pravděpodobnosti máme opět vztahy $P(A_0|B_1) = 1 - P(A_1|B_1)$ a $P(A_1|B_0) = 1 - P(A_0|B_0)$.

Vzorce uvádíme v tomto výsledném tvaru, aby se zvýraznila závislost na jednotlivých parametrech. Při praktickém počítání je ale vhodnější to nechat v původním zápisu a nepřevádět na tvar $\frac{1}{1+\text{něco}}$.

(a) Pro $p = 0.4$ tak máme

$$P(A_0|B_0) = \frac{1}{1 + \frac{0.1\cdot 0.4}{0.9\cdot 0.6}} = \frac{27}{29} \doteq 0.93$$

$$P(A_1|B_0) = 1 - \frac{27}{29} = \frac{2}{29} \doteq 0.07$$

$$P(A_1|B_1) = \frac{1}{1 + \frac{0.1\cdot 0.6}{0.9\cdot 0.4}} = \frac{6}{7} \doteq 0.86$$

$$P(A_0|B_1) = 1 - \frac{6}{7} = \frac{1}{7} \doteq 0.14$$

Tedy poměrně vysoká spolehlivost pro oba znaky.

(b) Pro $p = 0.1$ bude situace podstatně jiná:

$$P(A_0|B_0) = \frac{1}{1 + \frac{0.1\cdot 0.1}{0.9\cdot 0.9}} = \frac{81}{82} \doteq 0.99$$

$$P(A_1|B_0) = 1 - \frac{81}{82} = \frac{1}{82} \doteq 0.01$$

$$P(A_1|B_1) = \frac{1}{1 + \frac{0.1\cdot 0.9}{0.9\cdot 0.1}} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$P(A_0|B_1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 0.5$$

Pokud procento vysílaných znaku "1" dosáhne hladiny šumu, tj. $p = r$, nedá se pak při zachyceni znaku "1" určit, jestli pochází z vyslaného signálu (tj. znaku "1") nebo naopak ze šumu (tj. chyby při vyslání znaku "0").

Situaci si ještě můžeme znázornit obrázkem:

| | chybně zachyceno | správně zachyceno |
|---|---|---|
| odeslané jedničky ($A_1$) | $a_0$ | $a_1$ |
| odeslané nuly ($A_0$) | $b_1$ | $b_0$ |

Zde $a_i$ a $b_j$ znamenají počty daných znaků v rámci daného jevu (např. $b_1$ je počet odeslaných znaků 0, které byly zachyceny jako znaky 1, neboli $|A_0 \cap B_1| = b_1$). Dale je např. $|A_0| = b_1 + b_0$ a $|B_1| = a_1 + b_1$. Speciálně máme

$$P(A_0|B_1) = \frac{|A_0 \cap B_1|}{|B_1|} = \frac{b_1}{a_1 + b_1}$$

a

$$P(A_1|B_1) = \frac{|A_1 \cap B_1|}{|B_1|} = \frac{a_1}{a_1 + b_1} \ .$$

Problém s rozpoznáním znaku 1 nastane právě když

$$\frac{a_1}{a_1 + b_1} = P(A_0|B_1) = P(A_1|B_1) = \frac{b_1}{a_1 + b_1}$$

tedy když

$$a_1 = b_1 \ .$$

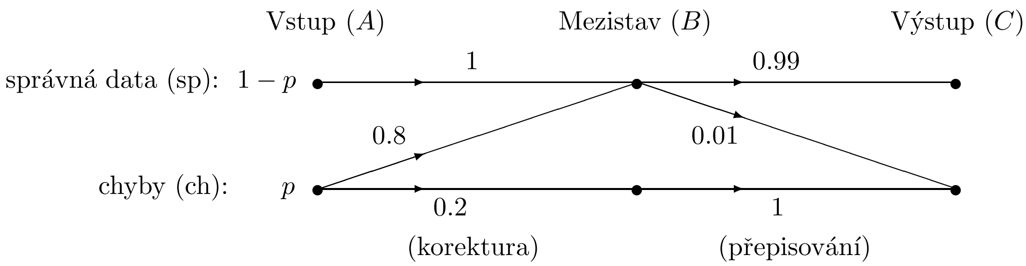
**3.10** (stochastické matice)

Při korektuře dat se opraví 80% chybných položek. Při následném přepisování dat se do 1% položek dostanou nové chyby. Pro jaké počáteční procento chyb se po přepisu jejich počet sníží?

**Řešení:**

Data, která zde uvažujeme jsou zapsány pomocí mnoha různých znaků (nejde tedy o binární abecedu) a tudíž pokud je nějaký znak chybný a znovu se chybně přepíše budeme považovat i tento výsledek za chybný (v binární abecedě by se dvakrát přepsaná chyba stala naopak správným znakem).

Výsledný proces můžeme vyjádřit následujícím schématem, které je spojením schématu korektury (levá část) a přepisování (pravá část):




Zde

$$\begin{bmatrix}1-p, & p\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}P(A_{sp}), & P(A_{ch})\end{bmatrix}$$

je vstupní vektor rozložení správných dat a chyb, kde $p \in (0,1)$. Otázka je, pro jaké hodnoty $p$ bude $P(C_{ch}) < P(A_{ch})$.

Všechny vektory i matice, které zde používáme, mají tu vlastnost, že součet hodnot v každém řádku je roven 1 (a samozřejmě všechny vstupy jsou nezáporná čísla) - jsou to tzv. stochastické matice.

V konkrétním vyjádření pro jednotlivé procesy pak máme

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}P(B_{sp}), & P(B_{ch})\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}P(A_{sp}), & P(A_{ch})\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}P(B_{sp}|A_{sp}) & P(B_{ch}|A_{sp}) \\ P(B_{sp}|A_{ch}) & P(B_{ch}|A_{ch})\end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix}1-p, & p\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0.8 & 0.2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1-0.2p, & 0.2p\end{bmatrix}\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}P(C_{sp}), & P(C_{ch})\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}P(B_{sp}), & P(B_{ch})\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}P(C_{sp}|B_{sp}) & P(C_{ch}|B_{sp}) \\ P(C_{sp}|B_{ch}) & P(C_{ch}|B_{ch})\end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix}1-0.2p, & 0.2p\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0.99 & 0.01 \\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.99-0.198p, & 0.01+0.198p\end{bmatrix} \ .\end{aligned}$$

Podmínka

$$0.01 + 0.198p = P(C_{ch}) < P(A_{ch}) = p$$

je tedy ekvivalentní podmínce

$$p > \frac{0.01}{0.802} \doteq 0.0125 \ .$$

Pokud je tedy na počátku v datech více než 1.25% chyb, tak po proběhlých procesech jejich podíl klesne. V opačném případě se jejich podíl zvětší (nebo, v jediném případě $p = 1.25\%$, se jejich podíl nezmění).

Můžeme si ještě všimnout, že při mnohonásobném opakování tohoto procesu se z jakéhokoliv počátečního procenta chyb $p_0$ podíl chyb nakonec přiblíží právě hodnotě $p = 1.25\%$, protože rekurentně daná posloupnost $p_{n+1} = 0.198p_n + 0.01$ má za limitu právě uvedenou hodnotu.