8. cvičení z PST

21. listopadu 2018

8.1 (náhodný vektor - pokračování z minula)
Náhodný vektor (X, Y) má sdruženou pravděpodobnostní funkci $p_{X,Y}$ dánu tabulkou:

$p_{X,Y}(x,y)$: y / x	0	1	2
0	1/18	1/9	1/6
1	1/9	1/18	1/9
2	1/6	1/6	1/18

Určete pravděpodobnostní funkci p_Z pro veličinu $Z = X + Y$.

Řešení:
U veličin X a Y předpokládáme obory hodnot určené tabulkou (ostatní hodnoty mohou být také případně nabyty, ale s nulovou pravděpodobností). Obor hodnot veličiny Z je pak určen jako

$$\{i + j \mid i, j = 0, 1, 2\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

a pravděpodobnostní funkce vznikne nasčítáním pravděpodobností pro jednotlivé případy

$$p_Z(k) = P(X + Y = k) = \sum_{\substack{i+j=k \\ i,j\in\mathbb{R}}} \underbrace{P(X = i,\ Y = j)}_{p_{X,Y}(i,j)} = \begin{cases} \frac{1}{18} & , k = 0 \\ \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9} & , k = 1 \\ \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \frac{1}{6} = \frac{7}{18} & , k = 2 \\ \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{5}{18} & , k = 3 \\ \frac{1}{18} & , k = 4 \\ 0 & , \text{jinak.} \end{cases}$$

8.2 (náhodný vektor - pokračování z minula)
Náhodný vektor (X, Y) má sdruženou pravděpodobnostní funkci $p_{X,Y}$ dánu tabulkou:

$p_{X,Y}(x,y)$: y / x	0	1	2
1	1/8	0	1/8
3	0	1/4	1/4
4	1/8	1/8	0

Určete pravděpodobnostní funkci p_Z pro veličinu $Z = X \cdot Y$.

Řešení:
U veličin X a Y předpokládáme obory hodnot určené tabulkou (ostatní hodnoty mohou být také případně nabyty, ale s nulovou pravděpodobností). Obor hodnot veličiny Z je pak určen jako

$$\{i \cdot j \mid i = 1, 3, 4;\ j = 0, 1, 2\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8\}\ .$$

Pravděpodobnostní funkce vznikne nasčítáním pravděpodobností pro jednotlivé případy, přičemž některé hodnoty (konkrétně 1 a 8) budou mít nulovou pravděpodobnost (ty pak nebudeme explicitně vypisovat).

$$p_Z(k) = P(X \cdot Y = k) = \sum_{\substack{i \cdot j = k \\ i,j \in \mathbb{R}}} \underbrace{P(X = i,\ Y = j)}_{p_{X,Y}(i,j)} = \begin{cases} \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} & , \ k = 0 \\ \frac{1}{8} & , \ k = 2 \\ \frac{1}{4} & , \ k = 3 \\ \frac{1}{8} & , \ k = 4 \\ \frac{1}{4} & , \ k = 6 \\ 0 & , \ \text{jinak.} \end{cases}$$

8.3 (kovarianční a korelační matice)

Náhodný vektor (X, Y) má kovarianční matici.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Rozhodněte, zda jsou náhodné veličiny X a Y závislé či nezávislé.

(b) Napište korelační matici náhodného vektoru (X, Y).

(c) Napište korelační a kovarianční matice náhodných vektorů $(X, -Y)$ a $(X, 2Y - 1)$.

Řešení:

Příklad 8.9: `https://math.feld.cvut.cz/prucha/psi/18cv8.pdf`

8.4 (kovariance, kovarianční a korelační matice)

Pro náhodné veličiny X a Y platí, že

$$D(X) = 3, \quad D(Y) = 4, \quad \text{cov}(X, Y) = -2.$$

Pro náhodné veličiny

$$U = 3X + 4Y - 1 \quad \text{a} \quad V = -2X + 2Y + 3$$

určete

(a) koeficient kovariance $\text{cov}(U, V)$.

(b) rozptyl $D(X + Y)$.

(c) kovarianční a korelační matice náhodných vektorů (X, Y) a $(X, -2Y)$.

Řešení:

(a) Díky bilinearitě kovariance můžeme jednotlivé složky "roznásobit":

$$\text{cov}(U, V) = \text{cov}(3X + 4Y - 1,\ -2X + 2Y + 3) = \text{cov}(3X + 4Y,\ -2X + 2Y) =$$
$$= 3 \cdot (-2) \cdot \text{cov}(X, X) + 3 \cdot 2 \cdot \text{cov}(X, Y) + 4 \cdot (-2) \cdot \text{cov}(Y, X) + 4 \cdot 2 \cdot \text{cov}(Y, Y) =$$
$$= (-6) \cdot D(X) + (-2) \cdot \text{cov}(X, Y) + 8 \cdot D(Y) = (-6) \cdot 3 + (-2) \cdot (-2) + 8 \cdot 4 = 18\ .$$

Jak je vidět, znalost $E(X)$ a $E(Y)$ jsme vůbec nepotřebovali!

Poznámka: Vlastnosti kovariance si můžeme zapamatovat pomocí definice

$$\mathrm{cov}(Z,W) = \pi(Z) \bullet \pi(W) \ ,$$

kde $\pi(Z) = Z - E(Z)$ a $\bullet$ je skalární součin daný jako střední hodnota součinu veličin.

Je dobré si všimnout, ze díky bilinearitě můžeme také používat přehlednější maticový zápis:

$$\mathrm{cov}(aX+bY, cX+dY) = (a,b) \begin{pmatrix} \mathrm{cov}(X,X) & \mathrm{cov}(X,Y) \\ \mathrm{cov}(Y,X) & \mathrm{cov}(Y,Y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

V našem případě tedy

$$\mathrm{cov}(U,V) = (3,4) \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = (3,4) \begin{pmatrix} -10 \\ 12 \end{pmatrix} = 18 \ .$$

(b) Využijeme vlastnosti kovariance:

$$\begin{aligned} D(X+Y) = \mathrm{cov}(X+Y, X+Y) &= \mathrm{cov}(X,X) + \mathrm{cov}(X,Y) + \mathrm{cov}(Y,X) + \mathrm{cov}(Y,Y) = \\ &= D(X) + 2 \cdot \mathrm{cov}(X,Y) + D(Y) = \\ &= 3 + 2 \cdot (-2) + 4 = 3 \ . \end{aligned}$$

(c) Kovarianční matice pro (X,Y):

$$\begin{pmatrix} \mathrm{cov}(X,X) & \mathrm{cov}(X,Y) \\ \mathrm{cov}(Y,X) & \mathrm{cov}(Y,Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D(X) & \mathrm{cov}(X,Y) \\ \mathrm{cov}(X,Y) & D(Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Korelační matice pro (X,Y):

$$\begin{pmatrix} \varrho(X,X) & \varrho(X,Y) \\ \varrho(Y,X) & \varrho(Y,Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)\cdot D(Y)}} \\ \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)\cdot D(Y)}} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \end{pmatrix}$$

protože máme $\varrho(X,Y) = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)\cdot D(Y)}} = \frac{-2}{\sqrt{3\cdot 4}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Podobně pro vektor $(X,-2Y)$ máme korelační matici:

$$\begin{pmatrix} D(X) & \mathrm{cov}(X,-2Y) \\ \mathrm{cov}(X,-2Y) & D(-2Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D(X) & -2\cdot\mathrm{cov}(X,Y) \\ -2\cdot\mathrm{cov}(X,Y) & (-2)^2\cdot D(Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}$$

a korelační matici:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{\sqrt{3\cdot 16}} \\ \frac{4}{\sqrt{3\cdot 16}} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \end{pmatrix}$$

což není překvapení, protože díky definici korelace máme, že:

$$\varrho(aX, bY) = \mathrm{sgn}(a) \cdot \mathrm{sgn}(b) \cdot \varrho(X,Y)$$

pro $a \neq 0$ a $b \neq 0$.

8.5 (spojitý náhodný vektor)

Náhodný vektor (X,Y) má spojité rovnoměrné rozdělení v množině

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0,\ x+y \leq 1,\ y-x \leq 1\} \ .$$

Určete:

(a) sdruženou hustotu $f_{X,Y}$.

(b) marginální hustoty f_X, f_Y.

(c) zda jsou náhodné veličiny X a Y závislé či nezávislé.

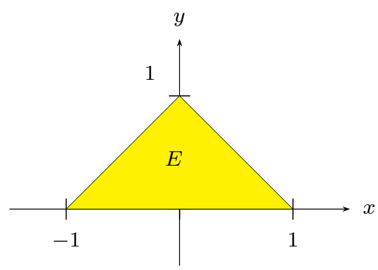
(d) hodnotu $P(X+Y \geq \frac{1}{2})$.

(e) koeficient korelace $\varrho(X,Y)$.

Řešení:

Příklad 8.6: `https://math.feld.cvut.cz/prucha/psi/18cv8.pdf`

(d) Množina E je trojúhelník



Sdružená hustota je tedy dána jako

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1 & , \ (x,y) \in E \\ 0 & , \ \text{jinak}, \end{cases}$$

tedy tak, aby byla konstantní na E, nulová mimo E a integrál z hustoty byl roven 1.

Jev "$X + Y \geq \frac{1}{2}$" je množina $\Phi^{-1}(F)$, kde $\Phi = (X,Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ je náš náhodný vektor a

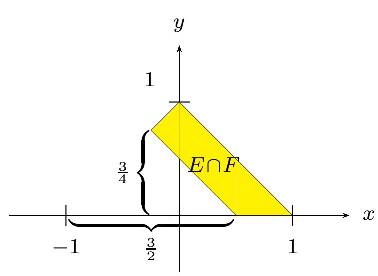
$$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \geq \frac{1}{2}\}$$

tj. $\Phi^{-1}(F)$ je vzor množiny $F \subseteq \mathbb{R}^2$ při zobrazení Φ. Pravděpodobnost tohoto jevu tak dostaneme zintegrováním hustoty přes množinu F, neboli

$$P(X + Y \geq \tfrac{1}{2}) = \iint\limits_{F=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 \ \mid \ a+b\geq\frac{1}{2}\}} f_{X,Y}(x,y)\ dx\ dy = \iint\limits_{E\cap F} 1\ dx\ dy\ .$$

Množina $E \cap F$ je tvaru

$$E \cap F: \quad \tfrac{1}{2} \leq x + y \leq 1 \quad \wedge \quad y - x \leq 1 \quad \wedge \quad y \geq 0$$



Protože rozdělení pravděpodobnosti je rovnoměrné na E, jedná se prostě o geometrickou pravděpodobnost. Velikost plochy $E \cap F$ spočítáme snadněji pomocí doplňkové plochy (tj. trojúhelníka s výškou $\frac{3}{4}$ a základnou $\frac{3}{2}$) do původního trojúhelníka E (s plochou 1):

$$P(X + Y \geq \tfrac{1}{2}) = 1 - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{3}{2} = \tfrac{7}{16}\ .$$

(e) Pro kovarianci máme

$$\varrho(X,Y) = \frac{E(XY) - E(X)\cdot E(Y)}{\sqrt{D(X)\cdot D(Y)}}\ .$$

Přitom je

$$E(XY) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} xy \cdot f_{X,Y}(x,y)\ dx\ dy = \iint\limits_{A} 2xy\ dx\ dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \int\limits_{y-1}^{1-y} 2xy\ dx\ dy = \int\limits_0^1 y\ \underbrace{\left[x^2\right]_{x=y-1}^{x=1-y}}_{=0}\ dy = 0.$$

To, že tento integrál vyjde nula bylo vidět už na začátku z lichosti integrované funkce (tj. $xy \cdot f_{X,Y}(x,y)$) vzhledem k proměnné x (lichost této funkce je pochopitelně určena i tím, že množina A je symetrická podle osy y). Ze stejných důvodů bude nulový i následující integrál:

$$E(X) = \iint_{\mathbb{R}^2} x \cdot f_{X,Y}(x,y)\; dx\; dy = 0$$

Takže $\varrho(X,Y) = 0$, ačkoliv veličiny X a Y nezávislé nejsou (viz (c)).

8.6 (spojitý náhodný vektor)

Náhodný vektor (X,Y) má spojité rovnoměrné rozdělení v množině

$$E = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1,\; y \geq 0\}\ .$$

Určete:

(a) sdruženou hustotu $f_{X,Y}$.

(b) marginální hustoty f_X, f_Y.

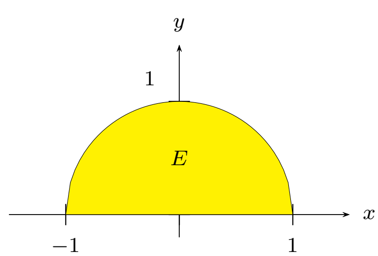
(c) zda jsou náhodné veličiny X a Y závislé či nezávislé.

(d) hodnotu $P(X \leq Y)$.

(e) koeficient kovariance $cov(X,Y)$.

Řešení:

Množina E je půlkruh



(a) Sdružená hustota je tedy dána jako

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c & ,\ (x,y) \in E \\ 0 & ,\ \text{jinak}, \end{cases}$$

kde c je konstanta taková, aby integrál z hustoty byl roven 1, tedy

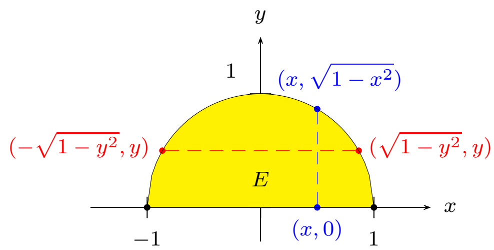
$$1 = \iint_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)\; dx\; dy = \iint_E c\; dx\; dy = c \iint_E 1\; dx\; dy = c \cdot \frac{\pi}{2}$$

neboli

$$c = \frac{2}{\pi}\ .$$

Integrál $\iint_E 1\; dx\; dy$ jsme mohli buď skutečně spočítat (např. pomocí polárních souřadnic) nebo prostě využít jeho geometrickou interpretaci, tj. že je to obsah půlkruhu o poloměru 1.

(b) Marginální hustota je nyní jen příslušně parciálně zintegrovaná sdružená hustota. Funkci $f_{X,Y}$ tedy vždy integrujeme podél vhodného řezu množiny E:



Pro $x \in \langle -1, 1\rangle$ tak máme

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\ dy = \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{\pi}\ dy = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}$$

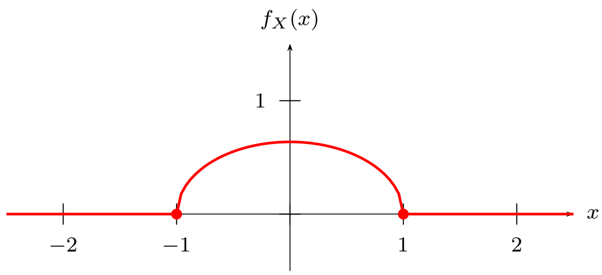
a pro $y \in \langle 0, 1\rangle$ máme

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\ dx = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{2}{\pi}\ dx = \frac{4}{\pi}\sqrt{1-y^2}\ .$$

Celkově tedy

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} & ,\ x \in \langle -1, 1\rangle \\ 0 & ,\ \text{jinak,} \end{cases}$$

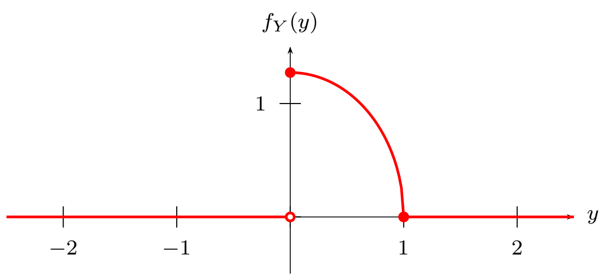
s grafem



a podobně

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{4}{\pi}\sqrt{1-y^2} & ,\ y \in \langle 0, 1\rangle \\ 0 & ,\ \text{jinak,} \end{cases}$$

s grafem



(c) Veličiny X a Y jsou nezávislé právě když

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) \ \text{ pro všechna } \ (x,y) \in \mathbb{R}^2\ .$$

V případě existence sdružené hustoty je to ekvivalentní tomu, že

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \quad \text{pro SKORO všechna} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ .$$

Tedy množina, kde to neplatí, má nulový obsah.

Speciálně, pro nezávislé veličiny musí platit následující (pouze nutná podmínka!):

Nechť

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f_{X,Y}(x,y) \neq 0\}$$

a $\pi_1, \pi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jsou projekce na jednotlivé souřadné osy, tj. $\pi_1(x,y) = x$ a $\pi_2(x,y) = y$. Pokud jsou veličiny X a Y *nezávislé*, má množina

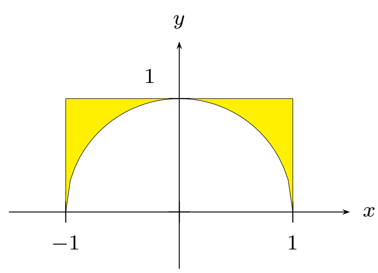
$$\Big(\pi_1(S) \times \pi_2(S)\Big) \setminus S$$

nulový obsah.

V našem konkretním případě $S = E$ a $\pi_1(E) = \langle -1, 1\rangle$ a $\pi_2(E) = \langle 0, 1\rangle$. Ovšem množina

$$\Big(\pi_1(E) \times \pi_2(E)\Big) \setminus E \ = \ \text{“obdélník”} \ \setminus \ \text{“půlkruh”}$$

tj.



zřejmě nulový obsah NEMÁ. Veličiny X a Y tudíž NEJSOU nezávislé.

(d) Jev “$X \leq Y$” je množina $\Phi^{-1}(F)$, kde $\Phi = (X,Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ je náš náhodný vektor a

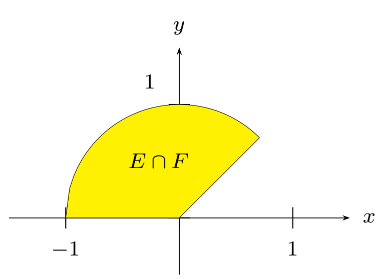
$$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$$

tj. $\Phi^{-1}(F)$ je vzor množiny $F \subseteq \mathbb{R}^2$ při zobrazení Φ. Pravděpodobnost tohoto jevu tak dostaneme zintegrováním hustoty přes množinu F, neboli

$$P(X \leq Y) = \iint\limits_{F=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 \ \mid \ a \leq b\}} f_{X,Y}(x,y) \ dx \ dy = \iint\limits_{E\cap F} \tfrac{2}{\pi} \ dx \ dy \ .$$

Množina $E \cap F$ je tvaru

$$E \cap F : \quad x^2 + y^2 \leq 1 \quad \wedge \quad x \leq y \quad \wedge \quad y \geq 0$$



Protože rozdělení pravděpodobnosti je rovnoměrné na E, jedná se prostě o geometrickou pravděpodobnost, a protože plocha $E \cap F$ jsou $\frac{3}{4}$ plochy E (přitom obsah plochy E je evidentně $\frac{\pi}{2}$), tak máme ihned, že

$$P(X \leq Y) = \frac{\iint\limits_{E\cap F} 1 \ dx \ dy}{\frac{\pi}{2}} = \frac{\text{obsah } E \cap F}{\text{obsah } E} = \frac{3}{4} \ .$$

Ale stejně si integrál ještě spočítáme explicitně a to pomocí substituce polárními souřadnicemi

$$P(X \le Y) = \iint\limits_{E\cap F} \frac{2}{\pi}\ dx\ dy = \begin{bmatrix} \scriptstyle x=r\cos\varphi \\ \scriptstyle y=r\sin\varphi \\ \scriptstyle 0\le r\le 1 \\ \scriptstyle \frac{\pi}{4}\le\varphi\le\pi \end{bmatrix} = \frac{2}{\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\int\limits_{0}^{1} r\ dr\ d\varphi =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=1} d\varphi = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} 1\ d\varphi = \frac{\pi-\frac{\pi}{4}}{\pi} = \frac{3}{4}\ .$$

(e) Pro kovarianci máme

$$cov(X,Y) = E(XY) - E(X)\cdot E(Y)\ .$$

Přitom je

$$E(XY) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} xy\cdot f_{X,Y}(x,y)\ dx\ dy = \iint\limits_{A} \frac{2}{\pi}xy\ dx\ dy = \begin{bmatrix} \scriptstyle x=r\cos\varphi \\ \scriptstyle y=r\sin\varphi \\ \scriptstyle 0\le r\le 1 \\ \scriptstyle 0\le\varphi\le\pi \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\int\limits_{0}^{1} r^3\cos\varphi\sin\varphi\ dr\ d\varphi = \frac{2}{\pi}\left(\int\limits_{0}^{1} r^3\ \ dr\right)\cdot\left(\int\limits_{0}^{\pi}\cos\varphi\sin\varphi\ d\varphi\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{4}\cdot\left[\frac{\sin^2\varphi}{2}\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} = 0$$

To, že tento integrál vyjde nula bylo vidět už na začátku z lichosti integrované funkce (tj. $xy\cdot f_{X,Y}(x,y)$) vzhledem k proměnné x (lichost této funkce je pochopitelně určena i tím, že množina A je symetrická podle osy y). Ze stejných důvodů bude nulový i následující integrál:

$$E(X) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} x\cdot f_{X,Y}(x,y)\ dx\ dy = 0$$

Máme tedy

$$cov(X,Y) = 0$$

a připomeňme si, že veličiny X a Y přitom nezávislé nejsou (viz tvar množiny A). Z cvičných důvodů si ještě spočítáme $E(Y)$:

$$E(Y) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} y\cdot f_{X,Y}(x,y)\ dx\ dy = \iint\limits_{A} \frac{2}{\pi}y\ dx\ dy = \begin{bmatrix} \scriptstyle x=r\cos\varphi \\ \scriptstyle y=r\sin\varphi \\ \scriptstyle 0\le r\le 1 \\ \scriptstyle 0\le\varphi\le\pi \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\int\limits_{0}^{1} r^2\sin\varphi\ dr\ d\varphi = \frac{2}{\pi}\left(\int\limits_{0}^{1} r^2\ \ dr\right)\cdot\left(\int\limits_{0}^{\pi}\sin\varphi\ d\varphi\right) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{3}\cdot 2 = \frac{4}{3\pi}\ .$$

8.7 (normální rozdělení)

Nechť veličina X má normované normální rozdělení $N(0,1)$. Určete $P(X^2 < 3X-2)$ a najděte takové číslo ε, že $P(|X|<\varepsilon) = 0.95$.

Řešení:
Máme

$$P(X^2 < 3X-2) = P(X^2-3X+2<0) = P\Big((X-1)(X-2)<0\Big) = P\Big(1<X<2\Big) =$$

$$= \Phi(2)-\Phi(1) \doteq 0.97725 - 0.84134 = 0.13591\ .$$

A dále je

$$0.95 = P(|X|<\varepsilon) = P(-\varepsilon<X<\varepsilon) = \Phi(\varepsilon)-\Phi(-\varepsilon) = 2\Phi(\varepsilon)-1$$

a tedy

$$\varepsilon = \Phi^{-1}\left(\frac{1+0.95}{2}\right) = \Phi^{-1}(0.975) \doteq 1.96\ .$$

8.8 (normální rozdělení)

Náhodná veličina U má normované normální rozdělení $N(0,1)$. Pro hodnoty koeficientu spolehlivosti $1-\alpha = 0.95$ stanovte

(a) oboustranný interval spolehlivosti a

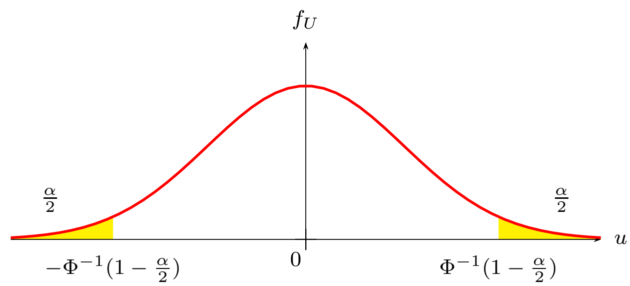
(b) oba jednostranné intervaly spolehlivosti.

Řešení:

(a) Oboustranný (a symetrický) $1-\alpha = 95\%$-ní interval spolehlivosti pro hodnotu veličiny U (s rozdělením $N(0,1)$) je

$$U \in \left\langle -\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right),\ \Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right\rangle = \left\langle -\Phi^{-1}(0.975),\ \Phi^{-1}(0.975)\right\rangle \doteq$$
$$\doteq \langle -1.96,\ 1.96\rangle$$

Zde $\Phi(t)$ je distribuční funkce normovaného normálního rozdělení $N(0,1)$, které má hustotu $f_U(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ s grafem:



Proč to tak je: Oboustranný symetrický $1-\alpha = 95\%$-ní interval spolehlivosti pro hodnotu veličiny U je dán jako

$$U \in \langle u_1,\ u_2\rangle\ ,$$

kde

$$P(u_1\ \leq\ U\ \leq\ u_2) = 1-\alpha$$

a současně platí, že

$$P(U\ <\ u_1) = \frac{\alpha}{2} = P(u_2\ <\ U)\ .$$

Požadujeme tedy, aby pravděpodobnost, že U překročí dolní mez intervalu byla stejná, jako že překročí horní mez intervalu a celkově aby tato pravděpodobnost byla rovna α - žluté plochy (to je právě ta symetričnost). Hodnoty u_1 a u_2 evidentně určuje druhá z podmínek. Tedy

$$\frac{\alpha}{2} = P(U < u_1) = F_U(u_1) \quad \Rightarrow \quad u_1 = F_U^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = q_U\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\frac{\alpha}{2} = P(u_2 < U) = 1 - F_U(u_2) \quad \Rightarrow \quad u_2 = F_U^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = q_U\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = \Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$$

Přitom díky sudosti hustoty f_U platí, že

$$\Phi(-x) = 1-\Phi(x) \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}$$

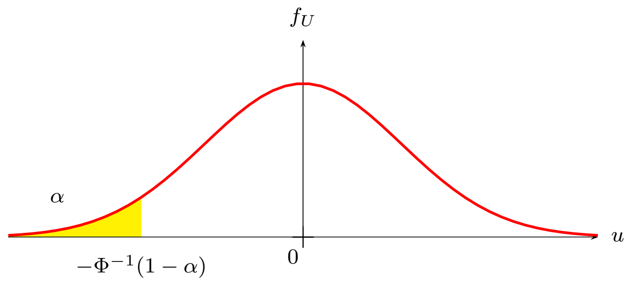
a

$$\Phi^{-1}(\beta) = -\Phi^{-1}(1-\beta) \quad \text{pro všechna } \beta \in (0,1)\ .$$

(b) Podobně dostaneme jednostranné intervaly spolehlivosti. Tentokrát se nám pravděpodobnost překročení intervalu spotřebuje vždy jen na jednu ze stran (žlutá plocha).

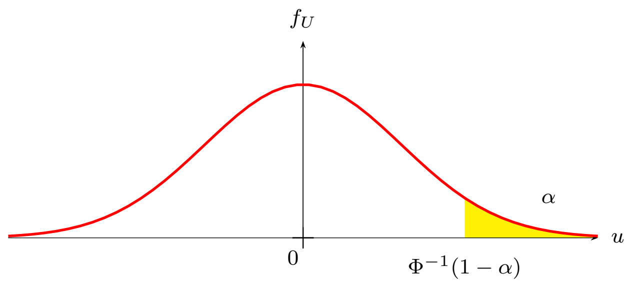
Dolní interval spolehlivosti:

$$T \in \Big\langle -\Phi^{-1}(1-\alpha),\ +\infty\Big) = \Big\langle -\Phi^{-1}(0.95),\ +\infty\Big) \doteq \Big\langle -1.645,\ +\infty\Big)$$



Horní interval spolehlivosti:

$$T \in \big(-\infty,\ \Phi^{-1}(1-\alpha)\big\rangle = \big(-\infty,\ \Phi^{-1}(0.95)\big\rangle \doteq \big(-\infty,\ 1.645\big\rangle$$



8.9 (normální rozdělení)

Rychlost aut v úseku, kde je omezení na maximální povolenou rychlost 50 km/hod, je náhodná veličina X, která má normální rozdělení $N(\mu;\sigma^2)$. Z naměřených hodnot vyplývá, že $P(X > 60) = 0.45$ a $P(X > 70) = 0.2$. Určete

(a) parametry μ a σ^2;

(b) pravděpodobnosti $P(X < 50)$ a $P(X > 90)$.

Řešení:
Příklad 17: `https://math.feld.cvut.cz/prucha/psi/wcv6.pdf`
Dokument není dostupný, ale postup je stejný jako v příkladu níže.

8.10 (normální rozdělení)

Náhodná veličina X má normální rozdělení $N(\mu,\sigma^2)$ a $P(X < 85) = 0.9$, $P(X < 95) = 0.95$. Určete parametry rozdělení μ a σ^2 a pravděpodobnost $P(X > 60)$.

Řešení:
Příklad 7.9: `https://math.feld.cvut.cz/prucha/psi/18cv7.pdf`