9. cvičení z PST

28. listopadu 2018

9.1 (alternativní rozdělení, odhad pravděpodobnosti - CLV a Čebyševova nerovnost)
Házíme 1000 krát mincí a počítáme počet rubů. Pro náhodnou veličinu X, která je počtem rubů,

(a) určete odhad pravděpodobnosti $P\big(|X - E(X)| < 50\big)$ pomocí Čebyševovy nerovnosti;

(b) vypočtěte pravděpodobnost $P\big(|X - E(X)| < 50\big)$ pomocí centrální limitní věty.

Řešení:
Příklad 9.2: `https://math.feld.cvut.cz/prucha/psi/18cv9.pdf`

Připomeneme si, co říká centrální limitní věta. Pro náhodnou veličinu X s konečným rozptylem, položme

$$\mathrm{norm}(X) := \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}} \ .$$

Speciálně tedy vidíme, že $E(\mathrm{norm}(X)) = 0$ a $\|\mathrm{norm}(X)\| = \sqrt{D(\mathrm{norm}(X))} = 1$.

Centrální limitní věta (CLV): Nechť $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ pro $i \in \mathbb{N}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin, které mají stejné rozdělení se střední hodnotou μ a (konečným) rozptylem σ^2. Položme

$$\widetilde{X}_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

a

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{\widetilde{X}_n}{n} \ .$$

Pak

$$\mathrm{norm}(\widetilde{X}_n) = \frac{\widetilde{X}_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n} = \mathrm{norm}(\overline{X}_n)$$

a

$$\lim_{n\to\infty} F_{\mathrm{norm}(\widetilde{X}_n)}(t) = \lim_{n\to\infty} P\Big(\mathrm{norm}(\widetilde{X}_n) \le t\Big) = \Phi(t)$$

pro každé $t \in \mathbb{R}$ (kde Φ je distribuční funkce normovaného normálního rozdělení, tj. pro $N(0,1)$).

Rychlost konvergence v CLV: Pokud pro veličiny X_i v CLV navíc ještě je $\rho := E(|X_i - \mu|^3) < \infty$, pak platí Berry–Esseenův odhad (pro všechna $t \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$):

$$\Big|F_{\mathrm{norm}(\widetilde{X}_n)}(t) - \Phi(t)\Big| \le C_1 \cdot \frac{\rho}{\sigma^3\sqrt{n}}$$

kde C_1 je nějaké konstanta. Nejlepší současný odhad pro C_1 zatím je, že $C_1 < 0.4748$.
Kromě toho platí ještě odhad (opět pro všechna $t \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$):

$$\Big|F_{\mathrm{norm}(\widetilde{X}_n)}(t) - \Phi(t)\Big| \le \frac{C_2}{(1+|t|)^3} \cdot \frac{\rho}{\sigma^3\sqrt{n}}$$

kde C_2 je konstanta. Její současný odhad je $C_2 < 30.84$.

Odhad chyby v CLV pro alternativní rozdělení: Pokud mají veličiny X_i alternativní rozdělení s parametrem p, tj. $P(X_i = 1) = p$, pak

$$\mu = E(X_i) = p, \qquad \sigma = \sqrt{D(X_i)} = \sqrt{p(1-p)}$$

$$\rho = E(|X_i - p|^3) = p(1-p)\big(p^2 + (1-p)^2\big) = \sigma^2\big(p^2 + (1-p)^2\big)$$

čímž dostáváme odhady

$$\Big|F_{\mathrm{norm}(\widetilde{X}_n)}(t) - \Phi(t)\Big| \quad \le \quad C_1 \cdot \frac{p^2 + (1-p)^2}{\sqrt{np(1-p)}} \quad < \quad 0.4748 \cdot \frac{p^2 + (1-p)^2}{\sqrt{np(1-p)}}$$

a

$$\left|F_{\mathrm{norm}(\widetilde{X}_n)}(t)-\Phi(t)\right| \quad\le\quad \frac{C_2}{(1+|t|)^3}\cdot\frac{p^2+(1-p)^2}{\sqrt{np(1-p)}} \quad<\quad \frac{30.84}{(1+|t|)^3}\cdot\frac{p^2+(1-p)^2}{\sqrt{np(1-p)}}\ .$$

Druhý odhad je tedy lepší než první pro $|t|>3.0198$.

Pěkně zpracováno je to v bakalářské práci:
Rastislav Rehák: Rýchlosť konvergencie v centrálnej limitnej vete
`http://is.muni.cz/th/394214/prif_b/BakalarskaPraca.pdf`

Obvyklý způsob použití CLV: Veličina $\mathrm{norm}(\widetilde{X}_n)=\mathrm{norm}(\overline{X}_n)$ má přibližně rozdělení $N(0,1)$. Pro výpočty se tedy užívá, že

- veličina $\widetilde{X}_n$ se střední hodnotou $E(\widetilde{X}_n)=n\mu$ a rozptylem $D(\widetilde{X}_n)=n\sigma^2$ má přibližně rozdělení $N(n\mu,n\sigma^2)$,
- veličina $\overline{X}_n$ se střední hodnotou $E(\widetilde{X}_n)=\mu$ a rozptylem $D(\widetilde{X}_n)=\frac{\sigma^2}{n}$ má přibližně rozdělení $N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$.

9.2 (obecné rozdělení, odhad pravděpodobnosti - CLV a Čebyševova nerovnost)

Výška mužů (určitého věku) je náhodná veličina o střední hodnotě 180 cm a směrodatnou odchylkou 12 cm. Určete pravděpodobnost, že průměrná výška $n=150$ mužů bude v intervalu 177.5 cm a 182.5 cm

(a) pomocí centrální limitní věty,

(b) pomocí Čebyševovy nerovnosti.

Řešení:
Výšku i-tého muže (pro $i=1,\dots,n$) si označíme jako X_i. Veličiny X_i považujeme za nezávislé, se střední hodnotou $E(X_i)=180$ cm a směrodatnou odchylkou $\sigma_i=\sqrt{D(X_i)}=10$ cm.

Průměrná výška se pak vyjádří jako

$$\overline{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\ .$$

Zajímá nás $P(177.5\le\overline{X}_n\le 182.5)$. Budeme potřebovat:

$$E(\overline{X}_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=180$$

a

$$D(\overline{X}_n)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2=\frac{12^2}{n}=\frac{144}{150}=0.96\ .$$

(a) Odhad pomocí centrální limitní věty - veličina $\overline{X}_n$ má přibližně rozdělení $N(180,0.96)$:

$$P(177.5\le\overline{X}_n\le 182.5)\doteq\Phi\Big(\frac{177.5-180}{\sqrt{0.96}}\Big)-\Phi\Big(\frac{182.5-180}{\sqrt{0.96}}\Big)=\Phi\Big(\frac{2.5}{\sqrt{0.96}}\Big)-\Phi\Big(-\frac{2.5}{\sqrt{0.96}}\Big)=$$

$$=2\cdot\Phi\Big(\frac{2.5}{\sqrt{0.96}}\Big)-1\doteq 2\cdot\Phi\Big(2.5516\Big)-1\doteq 2\cdot 0.99464-1=0.98928\ .$$

Tedy asi 98.93%.

(b) Odhad pomocí Čebyševovy nerovnosti - použijeme tvar, který už máme:

$$P(177.5\le\overline{X}_n\le 182.5)=P\left(\left|\overline{X}_n-180\right|\le 2.5\right)\ge 1-\frac{0.96}{(2.5)^2}=\frac{5.29}{6.25}=0.8464$$

Dostáváme tedy spodní odhad 84.64%.

9.3 (alternativní rozdělení, odhad počtu - CLV a Čebyševova nerovnost)

Házíme pravidelnou hrací kostkou a počítáme výskyt šestek. Určete, kolik musíme provést hodů, aby se relativní výskyt šestek (tj. poměr počtu šestek ku počtu hodů) lišil od $\frac{1}{6}$ nejvýše o $\varepsilon=0.05$ s pravděpodobností alespoň $p=0.95$. Použijte

(a) centrální limitní větu.

(b) Čebyševovu nerovnost.

Řešení:
Pro $i \in \mathbb{N}$ si zavedeme veličiny

$$X_i = \text{"počet šestek, které padnou v } i\text{-tém hodu"} = \begin{cases} 1 & \text{, při } i\text{-tém hodu padla šestka,} \\ 0 & \text{, při } i\text{-tém hodu nepadla šestka.} \end{cases}$$

Veličiny X_i považujeme za nezávislé, s alternativním rozdělení s parametrem $p = \frac{1}{6}$ (protože $P(X_i = 1) = p$), střední hodnotou $E(X_i) = p = \frac{1}{6}$ a rozptylem $D(X_i) = p(1-p) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$.

Relativní výskyt šestek při n hodech se pak vyjádří jako veličina

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

se střední hodnotou

$$E(\overline{X}_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = p = \frac{1}{6}$$

a rozptylem

$$D(\overline{X}_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} D(X_i) = \frac{p(1-p)}{n} = \frac{5}{36n} \; .$$

Zajímá nás teď nejmenší n tak, aby

$$P\left(\left| \overline{X}_n - \frac{1}{6} \right| \le \varepsilon \right) \ge p = 0.95 \; ,$$

kde $\varepsilon = 0.05$.

(a) Podle centrální limitní věty má veličina $\overline{X}_n$ přibližně rozdělení $N(\frac{1}{6}, \frac{5}{36n})$, konkrétně veličina $\overline{X}_n - \frac{1}{6}$ má přibližně rozdělení $N(0, \frac{5}{36n})$. Takže

$$0.95 \le P\left(\left| \overline{X}_n - \frac{1}{6} \right| \le 0.05 \right) = P\left(-0.05 \le \overline{X}_n - \frac{1}{6} \le 0.05 \right) \doteq$$

$$\doteq \Phi\left(\frac{0.05}{\sqrt{\frac{5}{36n}}} \right) - \Phi\left(-\frac{0.05}{\sqrt{\frac{5}{36n}}} \right) = 2\Phi\Big(\frac{0.3}{\sqrt{5}} \sqrt{n} \Big) - 1$$

tedy

$$\Phi\Big(\frac{0.3}{\sqrt{5}} \sqrt{n} \Big) \ge \frac{1 + 0.95}{2} = 0.975$$

$$n \ge \Big(\frac{\sqrt{5}}{0.3} \cdot \Phi^{-1}(0.975) \Big)^2 \doteq \Big(\frac{\sqrt{5}}{0.3} \cdot 1.96 \Big)^2 \doteq 213.42$$

Musíme tedy provést alespoň $n = 214$ hodů.

(b) Použijeme už upravených výrazů. Z Čebyševovy nerovnosti máme:

$$P\left(\left| \overline{X}_n - \frac{1}{6} \right| \le 0.05 \right) \ge 1 - \frac{\frac{5}{36n}}{(0.05)^2} = 1 - \frac{500}{9n} \; .$$

Pokud bude

$$1 - \frac{500}{9n} \ge 0.95$$

neboli

$$n \ge \frac{500}{9(1 - 0.95)} \doteq 1111.11 \; ,$$

pak máme určitě podmínku $P\left(\left| \overline{X}_n - \frac{1}{6} \right| \le 0.05 \right) \ge 0.95$ splněnu. Čebyševova nerovnost nám tak dává odhad, že potřebujeme udělat alespoň $n = 1112$ hodů. To je podstatně více než u centrální limitní věty, ale zato to víme přesně.

9.4 (normální rozdělení, odhad počtu - CLV a Čebyševova nerovnost)

Napětí v síti je náhodná veličina, která má normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$, kde $\mu = 235$ V a $\sigma = 3$ V. Kolik měření musíme minimálně provést, aby se průměr naměřených hodnot lišil od 235 V nejvýše o 1 V s pravděpodobností 0.95? Výpočet proveďte:

(a) pomocí odhadu pravděpodobnosti z Čebyševovy nerovnosti;

(b) z výpočtu pravděpodobnosti z centrální limitní věty.

Řešení:
Příklad 9.4: `https://math.feld.cvut.cz/prucha/psi/18cv9.pdf`

9.5 (spojité rovnoměrné rozdělení, odhad intervalu - CLV a Čebyševova nerovnost)
Chodíme náhodně k tramvaji, která jezdí po 6 minutách. Jezdíme dvakrát denně, 20 dní v měsíci. Jestliže označíme X_i náhodnou veličinu dobu čekání (při i-tém příchodu) a T průměrnou dobu čekání za měsíc, pak

(a) vypočtěte pomocí centrální limitní věty a

(b) odhadněte pomocí Čebyševovy nerovnosti

číslo $\varepsilon > 0$ tak, aby $P\Big(|T-3| < \varepsilon\Big) = 0.9$.

Řešení:
Předpokládáme, že tramvaje jezdí vždy přesně po 6 minutách, ale zato naše příchody jsou náhodné a rovnoměrně rozdělené v nějakém časovém intervalu (jehož délka je celočíselným násobkem 6 minut). Tedy doba čekání X_i má rovnoměrné rozdělení v intervalu $\langle 0, 6\rangle$ (v minutách).

Jednotlivé veličiny X_i považujeme za nezávislé, se střední hodnotou (která je uprostřed daného intervalu)

$$E(X_i) = \frac{0+6}{2} = 3 \ \text{ min}$$

a rozptylem

$$D(X_i) = E\Big((X_i - E(X_i))^2\Big) = E\Big((X_i-3)^2\Big) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} (t-3)^2 f_X(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^6 (t-3)^2 \cdot \tfrac{1}{6}\ \mathrm{d}t = \Big[\tfrac{(t-3)^3}{18}\Big]_0^6 = 3 \ \text{ min}^2 \ .$$

.

Celkový počet příchodů na zastávku během měsíce je $n = 2 \cdot 20 = 40$. Průměrna doba čekání za měsíc pak je

$$T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

se střední hodnotou

$$E(T) = E(X_i) = 3 \ \text{ min}$$

a rozptylem

$$D(T) = \frac{D(X_i)}{n} = \frac{3}{40} = 0.075 \ \text{ min}^2 \ .$$

(a) Odhad ε pomocí centrální limitní věty - veličina $\text{norm}(T) = \frac{T-E(T)}{\sqrt{D(T)}} = \frac{T-3}{\sqrt{0.075}}$ má přibližně normované normální rozdělení $N(0,1)$:

$$0.9 = P\Big(|T-3| < \varepsilon\Big) = P\Big(\Big|\underbrace{\frac{T-3}{\sqrt{0.075}}}_{\text{norm}(T)}\Big| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{0.075}}\Big) = P\Big(-\frac{\varepsilon}{\sqrt{0.075}} < \text{norm}(T) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{0.075}}\Big) \doteq$$

$$\doteq \Phi\Big(\frac{\varepsilon}{\sqrt{0.075}}\Big) - \Phi\Big(-\frac{\varepsilon}{\sqrt{0.075}}\Big) = 2\cdot\Phi\Big(\frac{\varepsilon}{\sqrt{0.075}}\Big) - 1 \ .$$

Dostaneme tedy (přibližnou) rovnost

$$0.9 = 2\cdot\Phi\Big(\frac{\varepsilon}{\sqrt{0.075}}\Big) - 1$$

$$\Phi\Big(\frac{\varepsilon}{\sqrt{0.075}}\Big) = \frac{1+0.9}{2} = 0.95$$

a konečně

$$\varepsilon = \sqrt{0.075} \cdot \Phi^{-1}(0.95) \doteq 0.2739 \cdot 1.645 \doteq 0.4505\ .$$

(b) Odhad pomocí Čebyševovy nerovnosti:

$$0.9 = P\left(\left|T-3\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D(T)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{0.075}{\varepsilon^2}$$

$$\frac{0.075}{\varepsilon^2} \geq 0.1$$

$$\varepsilon \leq \sqrt{0.75} \doteq 0.866\ .$$

9.6 (alternativní rozdělení, odhad intervalu - CLV a Čebyševova nerovnost)

Házíme 100-krát pravidelnou mincí a náhodná veličina X je počet rubů. Určete (přibližně) číslo ε tak, aby $P\Big(|X - E(X)| < \varepsilon\Big) = 0.9$:

(a) z výpočtu pravděpodobnosti z centrální limitní věty.

(b) pomocí odhadu pravděpodobnosti z Čebyševovy nerovnosti;

Řešení:
Náhodná veličina X má binomické rozdělení Bi(100, 0.5). Je tedy $E(X) = 100{\cdot}0.5 = 50$ a $D(X) = 100{\cdot}0.5{\cdot}(1-0.5) = 25$.

(a) Z centrální limitní věty vyplývá, že můžeme předpokládat pro náhodnou veličinu X přibližně normální rozdělení N(50, 25). Tedy $F_X(t) \doteq \Phi(\frac{t-50}{5})$ pro $t \in \mathbb{R}$.

Číslo ε určíme z rovnice

$$\begin{aligned}
0.9 &= P\Big(|X - E(X)| < \varepsilon\Big) = P\Big(50 - \varepsilon < X < 50 + \varepsilon\Big) = F_X(50+\varepsilon) - F_X(50-\varepsilon) \doteq \\
&\doteq \Phi\left(\frac{\varepsilon}{5}\right) - \Phi\left(\frac{-\varepsilon}{5}\right) = 2\,\Phi\left(\frac{\varepsilon}{5}\right) - 1 \\
&\Rightarrow \Phi\left(\frac{\varepsilon}{5}\right) = 0.95 \Rightarrow \frac{\varepsilon}{5} = \Phi^{-1}(0.95) \Rightarrow \varepsilon \doteq 5 \cdot 1.645 = 8.225\,.
\end{aligned}$$

(b) Odhad ε pomocí Čebyševovy nerovnosti:

$$0.9 = P\Big(|X - E(X)| < \varepsilon\Big) = P\Big(|X - 50| < \varepsilon\Big) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{25}{\varepsilon^2}$$

$$\varepsilon \leq \sqrt{\frac{25}{0.1}} \doteq 15.81$$

9.7 (intervalový odhad pro střední hodnotu a rozptyl)

Opakovaná měření stejné koncentrace látky (tj. náhodné veličiny X) vedla k následujícím výsledkům:

$$\boldsymbol{x} = (0.2,\ 0.23,\ 0.21,\ 0.16,\ 0.18,\ 0.19,\ 0.14,\ 0.18,\ 0.21)\ .$$

Najděte symetrické oboustranné 90%-ní odhady střední hodnoty a rozptylu.

Řešení:
Pro veličinu X budeme předpokládat normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ (to jednak přibližně platí a především pouze za tohoto předpokladu můžeme používat známé vzorce).

Odhadujeme parametry μ a σ^2 z realizace $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ rozsahu $n = 9$:

- realizace výběrového průměru:

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{0.2 + 0.23 + \cdots + 0.21}{9} = \frac{1.7}{9} \doteq 0.189$$

- realizace výběrového rozptylu

$$\begin{aligned} s_{\boldsymbol{x}}^2 &= \tfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{\boldsymbol{x}})^2 = \tfrac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \tfrac{n}{n-1}\overline{\boldsymbol{x}}^2 = \\ &= \tfrac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \tfrac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \\ &= \underbrace{\frac{0.2^2 + 0.23^2 + \cdots + 0.21^2}{8}}_{=\frac{2,9448}{8}=0.3681} - \frac{1.7^2}{9\cdot 8} \doteq 7.6\cdot 10^{-4}\ , \end{aligned}$$

- realizace směrodatné odchylky

$$s_{\boldsymbol{x}} = \sqrt{s_{\boldsymbol{x}}^2} \doteq 2.76\cdot 10^{-2}$$

Intervalový odhad střední hodnoty μ (pro spolehlivost $0.9 = 1-\alpha$) nyní je:

$$\begin{aligned} \mu &\in \left\langle \overline{\boldsymbol{x}} - \frac{s_{\boldsymbol{x}}}{\sqrt{n}}\, q_{\mathrm{t}(n-1)}\left(1-\tfrac{\alpha}{2}\right),\quad \overline{\boldsymbol{x}} + \frac{s_{\boldsymbol{x}}}{\sqrt{n}}\, q_{\mathrm{t}(n-1)}\left(1-\tfrac{\alpha}{2}\right) \right\rangle \doteq \\ &\doteq \left\langle 0.189 - \frac{2.76\cdot 10^{-2}}{3}\, \underbrace{q_{\mathrm{t}(8)}(0.95)}_{1.86},\quad 0.189 + \frac{2.76\cdot 10^{-2}}{3}\, q_{\mathrm{t}(8)}(0.95) \right\rangle \doteq \\ &\doteq \langle 0.172, 0.206\rangle\ . \end{aligned}$$

Intervalový odhad rozptylu σ^2 (pro spolehlivost $0.9 = 1-\alpha$) je:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &\in \left\langle \frac{(n-1)\, s_{\boldsymbol{x}}^2}{q_{\chi^2(n-1)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)},\quad \frac{(n-1)\, s_{\boldsymbol{x}}^2}{q_{\chi^2(n-1)}\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \right\rangle \doteq \\ &\doteq \left\langle \frac{(n-1)\, s_{\boldsymbol{x}}^2}{q_{\chi^2(8)}\,(0.95)},\quad \frac{(n-1)\, s_{\boldsymbol{x}}^2}{q_{\chi^2(8)}\,(0.05)} \right\rangle \doteq \\ &\doteq \left\langle \frac{8\cdot\ 7.6\cdot 10^{-4}}{15.51},\quad \frac{8\cdot\ 7.6\cdot 10^{-4}}{2.73} \right\rangle \doteq \\ &\doteq \left\langle 3.9\cdot 10^{-4},\ 22.3\cdot 10^{-4} \right\rangle\ . \end{aligned}$$

Všimněte si, že intervalový odhad výběrového rozptylu nemá střed ve svém bodovém odhadu $s_x^2 \doteq 7.6\cdot 10^{-4}$.

Poznámka: Na následujícím příkladu si ukážeme, v čem spočívá hledání intervalu spolehlivosti pro nějaký parametr. Odvodíme si oboustranný symetrický interval o spolehlivosti $1-\alpha$ pro střední hodnotu μ normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ při *neznámém* rozptylu σ^2 (při známém rozptylu by výsledek vypadal jinak a jednodušeji):

Mějme realizaci náhodného výběru $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ o rozsahu n (pro nezávislé náhodné veličiny $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$). Hledáme teď nějaké funkce $h_1, h_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (nezávislé na volbě μ i σ) takové, že

$$P\Big(h_1(X_1, \ldots, X_n)\ \le\ \mu\ \le\ h_2(X_1, \ldots, X_n)\Big) = 1-\alpha$$

(to je ta oboustrannost a $1-\alpha$ spolehlivost) a současně chceme, aby pro zbylé případy ještě platilo, že

$$P\Big(\mu\ <\ h_1(X_1, \ldots, X_n)\Big) = \tfrac{\alpha}{2} = P\Big(h_2(X_1, \ldots, X_n)\ <\ \mu\Big)$$

(to je ta symetričnost - tj. symetričnost nikoliv ve "vzdálenosti", ale v pravděpodobnosti).

Při dané realizaci $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ pak jako hledaný interval spolehlivost chápeme (číselný) interval tvaru:

$$\mu \in \Big\langle h_1(x_1, \ldots, x_n),\ h_2(x_1, \ldots, x_n) \Big\rangle\ (\subseteq \mathbb{R})$$

Je ještě dobré poznamenat, že

- *pro parametr μ žádné rozdělení pravděpodobnosti nemáme!*
- *daný interval spolehlivosti pro μ vzniká čistě na základě naměřených hodnot $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ a také se společně s nimi mění!*

A teď pro náš konkrétní případ: Vezmeme si vhodnou veličinu, jejíž rozdělení známe. V našem případě veličinu

$$T = \frac{\overline{\boldsymbol{X}} - \mu}{S_{\boldsymbol{X}}}\sqrt{n}\ ,$$

kde

$$\overline{\boldsymbol{X}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

a

$$(S_{\boldsymbol{X}})^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{\boldsymbol{X}})^2\right) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\cdot(\overline{\boldsymbol{X}})^2\right)\ .$$

Veličina T má tzv. $t(n-1)$-rozdělení (tj. Studentovo rozdělení s $n-1$ stupni volnosti). Pak pro kvantil $q_{t(n-1)}$ platí, že

$$P\Big(\underbrace{q_{t(n-1)}\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)}_{-q_{t(n-1)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \ \le\ T\ \le\ q_{t(n-1)}\left(1-\tfrac{\alpha}{2}\right)\Big) = 1-\alpha$$

a

$$P\Big(\ T\ < -q_{t(n-1)}\left(1-\tfrac{\alpha}{2}\right)\Big) = \tfrac{\alpha}{2} = P\Big(q_{t(n-1)}\left(1-\tfrac{\alpha}{2}\right)\ <\ T\ \Big)\ .$$

Výrazy uvnitř pravděpodobnosti si teď jen přepíšeme a budeme mít hledané funkce h_1 a h_2:

$$-q_{t(n-1)}\left(1-\tfrac{\alpha}{2}\right)\ \le\ \frac{\overline{\boldsymbol{X}} - \mu}{S_{\boldsymbol{X}}}\sqrt{n}\ \le\ q_{t(n-1)}\left(1-\tfrac{\alpha}{2}\right)$$

$$\underbrace{\overline{\boldsymbol{X}} - \frac{S_{\boldsymbol{X}}}{\sqrt{n}}\cdot q_{t(n-1)}\left(1-\tfrac{\alpha}{2}\right)}_{h_1(X_1,\ldots,X_n)}\ \le\ \mu\ \le\ \underbrace{\overline{\boldsymbol{X}} + \frac{S_{\boldsymbol{X}}}{\sqrt{n}}\cdot q_{t(n-1)}\left(1-\tfrac{\alpha}{2}\right)}_{h_2(X_1,\ldots,X_n)}$$

kde (jen pro pořádek) uvádíme funkce h_1 a h_2 více rozepsané:

$$h_1(z_1,\ldots,z_n) := \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} z_i\right) - \frac{q_{t(n-1)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} z_i^2 - n\cdot\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i\right)^2\right)$$

$$h_2(z_1,\ldots,z_n) := \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} z_i\right) + \frac{q_{t(n-1)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} z_i^2 - n\cdot\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i\right)^2\right)$$

Po dosazení konkrétní realizace $\boldsymbol{x}$ vektoru $\boldsymbol{X}$ pak dostaneme výše uvedený interval spolehlivosti pro μ ve tvaru

$$\mu \in \left\langle \overline{\boldsymbol{x}} - \frac{s_{\boldsymbol{x}}}{\sqrt{n}}\, q_{\mathrm{t}(n-1)}\left(1-\tfrac{\alpha}{2}\right),\quad \overline{\boldsymbol{x}} + \frac{s_{\boldsymbol{x}}}{\sqrt{n}}\, q_{\mathrm{t}(n-1)}\left(1-\tfrac{\alpha}{2}\right)\right\rangle$$

9.8 (intervalový odhad pro střední hodnotu)

Soubor dat (75, 85, 58, 72, 70, 75) je náhodným výběrem z normálního rozdělení N(μ, σ^2). Stanovte

(a) oboustranný symetrický 95% interval spolehlivosti pro střední hodnotu μ;

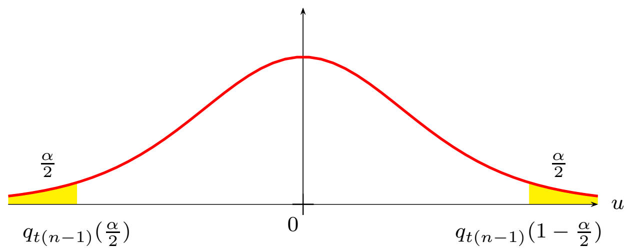
(b) horní 95% interval spolehlivosti pro střední hodnotu μ.

Řešení:
K určení intervalového odhadu použijeme statistiku

$$T = \frac{\overline{\boldsymbol{X}} - \mu}{S_{\boldsymbol{X}}}\sqrt{n}$$

která má Studentovo rozdělení $t(n-1)$, kde $n = 6$ je rozsah souboru. Poznamenejme, že zatímco centrální limitní větu používáme pro velká n, protože obvykle pro X máme nějaké "obecné" rozdělení, tak v případě, kdy X má *právě* normální rozdělení, známe rozdělení veličiny T také přesně a to pro jakákoliv n (tj. i malá).

(a) Hustota veličiny $f_{t(n-1)}$ veličiny T je:



Ze vztahu

$$P\Big(\underbrace{q_{t(n-1)}\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)}_{-q_{t(n-1)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \;\leq\; T \;\leq\; q_{t(n-1)}\left(1-\tfrac{\alpha}{2}\right)\Big) = 1-\alpha$$

(viz obrázek) dostaneme oboustranný symetrický $1-\alpha = 95\%$ interval spolehlivosti pro realizaci $t = \frac{\overline{\boldsymbol{x}}-\mu}{s_{\boldsymbol{x}}}\sqrt{n}$ veličiny T ve tvaru

$$-q_{\mathrm{t}(n-1)}(1-\tfrac{\alpha}{2}) \;\leq\; \frac{\overline{\boldsymbol{x}}-\mu}{s_{\boldsymbol{x}}}\sqrt{n} \;\leq\; q_{\mathrm{t}(n-1)}(1-\tfrac{\alpha}{2})\ .$$

Po úpravě tedy máme oboustranný symetrický $1-\alpha = 95\%$ interval spolehlivosti pro μ:

$$\overline{\boldsymbol{x}} - \frac{s_{\boldsymbol{x}}}{\sqrt{n}}\, q_{\mathrm{t}(5)}(0.975) \;\leq\; \mu \;\leq\; \overline{\boldsymbol{x}} + \frac{s_{\boldsymbol{x}}}{\sqrt{n}}\, q_{\mathrm{t}(5)}(0.975)\ .$$

Pro jeho vyčíslení potřebujeme znát realizaci výběrového průměru $\overline{\boldsymbol{x}}$ a výběrového rozptylu $s^2_{\boldsymbol{x}}$

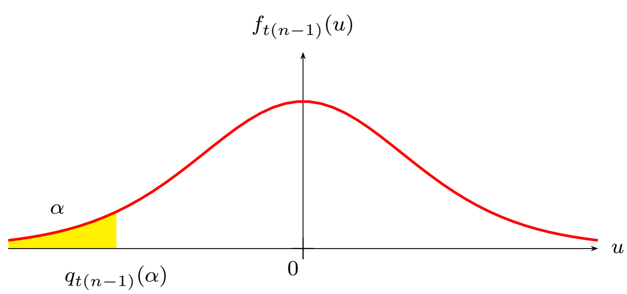
$$\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i = \frac{435}{6} = 72.5$$

$$s^2_{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{5}\left(\sum_{i=1}^{6} x_i^2 - 6\cdot(\overline{\boldsymbol{x}})^2\right) = \frac{385.5}{5} \doteq 77.1\,, \qquad s_{\boldsymbol{x}} \doteq 8.781\,.$$

Z tabulek kvantilů Studentova rozdělení dostaneme $q_{\mathrm{t}(5)}(0.975) \doteq 2.57$, a hledaný interval je tedy

$$\underbrace{72.5 - \frac{8.781}{\sqrt{6}}\cdot 2.57}_{63.29} \;\leq\; \mu \;\leq\; \underbrace{72.5 + \frac{8.781}{\sqrt{6}}\cdot 2.57}_{81.71}\ .$$

(b) Podobně dostaneme horní interval spolehlivosti pro μ:



Ze vztahu

$$P\Big(\underbrace{q_{\mathrm{t}(n-1)}(\alpha)}_{-q_{\mathrm{t}(n-1)}(1-\alpha)} \;\leq\; T\Big) = 1-\alpha$$

(viz obrázek) dostaneme pro realizaci $t = \frac{\overline{\boldsymbol{x}}-\mu}{s_{\boldsymbol{x}}}\sqrt{n}$ veličiny T dolní $1-\alpha = 95\%$ interval spolehlivosti, tj. nerovnost

$$-q_{\mathrm{t}(n-1)}\,(1-\alpha) \;\leq\; \frac{\overline{\boldsymbol{x}}-\mu}{s_{\boldsymbol{x}}}\sqrt{n}\ .$$

Po úpravě máme horní $1-\alpha = 95\%$ interval spolehlivosti pro μ:

$$\mu \;\leq\; \overline{\boldsymbol{x}} + \frac{s_{\boldsymbol{x}}}{\sqrt{n}}\, q_{\mathrm{t}(5)}(0.95)\ .$$

Z tabulek kvantilů Studentova rozdělení dostaneme $q_{\mathrm{t}(5)}(0.95) \doteq 2.02$, a hledaný interval je tedy

$$\mu \ \leq \ \underbrace{72.5 + \frac{8.781}{\sqrt{6}}\, 2.02}_{=79.741} \,.$$