Vstupní test 3.10.2018

Zadání A

(1) [4 body] V osudí jsou čísla od 1 do 100. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybrané číslo bude dělitelné 2 nebo 5?

Řešení:
Čísel 1 do 100 dělitelných 2 je 50. Čísel 1 do 100 dělitelných 5 je 20. Čísel 1 do 100 dělitelných současně 2 a 5 (neboli dělitelných 10) je 10. Počet čísel dělitelných 2 NEBO 5 tak je $50 + 20 - 10 = 60$.

(2) [4 body] Dvacet lidí, mezi kterými je 10 mužů a 10 žen, je náhodně seskupeno do dvojic. Určete pravděpodobnost toho, že každou z 10 dvojic tvoří osoby opačného pohlaví.

Řešení:
Budeme uvažovat, že jednotlivé dvojice budou označeny čísly (tj. i při stejných lidech ve dvojici, ale jiných očíslováních vzniká odlišný výběr). Počet všech výběrů 20 lidí do (očíslovaných) 10 dvojic je tak

$$\binom{20}{2} \cdot \binom{18}{2} \cdot \binom{16}{2} \cdots \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2} = \frac{20!}{2!18!} \cdot \frac{18!}{2!16!} \cdot \frac{16!}{2!14!} \cdots \frac{4!}{2!2!} \cdot \frac{2!}{2!1!} = \frac{20!}{2^{10}} \, .$$

Počet všech (očíslovaných) dvojic tvořených z mužů a žen je zřejmě $10! \cdot 10!$ (každému muži přiřadíme číslo dvojice a stejně tak i každé ženě).

Pravděpodobnost pak je

$$\frac{10! \cdot 10!}{\frac{20!}{2^{10}}} =$$

$$= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdots 2 \cdot 1 \cdot 2^{10}}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdots 12 \cdot 11} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2^5}{19 \cdot 17 \cdot 15 \cdot 13 \cdot 11} = \frac{2^8}{19 \cdot 17 \cdot 13 \cdot 11} \doteq 0.005542445 \, .$$

Take lze vyjadrit ve forme $\frac{2^{10}}{\binom{20}{10}}$.

Zadání B

(1) [4 body] Krychle o hraně 10 má všechny své stěny obarveny. Je rozřezána na krychličky o hraně 1. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná krychlička bude mít právě dvě stěny obarveny?

Řešení:
Rozřezáním vznikne 10^3 krychliček. Krychličky, které mají právě 2 strany obarveny, jsou na hranách. Hran je 12 a na každé je právě 8 takovýchto krychliček. Pravděpodobnost tedy je $\frac{8 \cdot 12}{1000} = 0.096$.

(2) [4 body] Kolika způsoby můžeme posadit na 12 židlí za kruhový stůl 6 manželských párů, pokud vždy chtějí sedět vedle sebe manžel s manželkou. Pro každého z nich není důležité místo na kterém sedí, ale jen to, kdo je jeho soused zprava a kdo je soused zleva.

Řešení:
Spočítáme nejdříve kolika způsoby se rozsadí do rovné řady na 12 míst 6 manželských párů tak, aby vždy vedle sebe seděl manžel s manželkou. Manžela s manželkou tak můžeme považovat za nedělitelnou jednotku. Tyto páry můžeme rozmístit $6!$ způsoby a v rámci páru pak máme vždy 2 způsoby jak dvojici rozesadit. Do rovné řady tak můžeme manželské páry rozesadit $2^6 \cdot (6!)$ způsoby.

Tato rozsazení do řad pak vytvoří rozsazení kolem kruhového stolu, přičemž dvě řadová rozsazení R_1 a R_2 dají stejné kruhové rozsazení právě když R_1 můžeme převést na R_2 cyklickým posunem. Protože řadová uspořádání jsou tvořena ze dvojic jednotlivých manželských párů, je takovýchto různých cyklických posunů právě 6.

Celkem je tedy počet všech hledaných rozsazení kolem kruhového stolu roven $\frac{2^6 \cdot (6!)}{6} = 2^6 \cdot (5!) = 7680$.