

Zadání A

(1) [4 body] Jeník a Mařenka si mají mezi sebou rozdělit pět hrušek a šest jablek. Kolika způsoby to mohou udělat, aby každé z dětí mělo alespoň jeden druh ovoce? (Hrušky mezi sebou považujeme za nerozlišitelné, stejně tak jablka).

Řešení:

Rozdělení je dáno uspořádanou dvojicí (a, b) , kde $a \in \{0, \dots, 5\}$ je počet hrušek a $b \in \{0, \dots, 6\}$ je počet jablek, co dostane Jeník (to, co dostane Mařenka pak už jednoznačně určíme). Přitom musí být splněno, že $(a, b) \neq (0, 0)$ a $(a, b) \neq (5, 6)$. Máme tak $6 \cdot 7 - 2 = 40$ možností.

(2) [4 body] Jaká je pravděpodobnost, že náhodně zvolené 4-místné číslo se skládá právě ze dvou dvojic dvou různých cifer? (Příkladem je číslo 2112.)

Řešení:

Všech 4-místných čísel je $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$. Pro příznivé případy rozlišíme, jestli číslo obsahuje nulu nebo ne.

Pokud nulu neobsahuje, pak se skládá ze dvou různých cifer a, b a každá se opakuje dvakrát. Pro pevně zvolené cifry to je $\frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$ možností. Různých dvouprvkových množin $\{a, b\}$ je $\binom{9}{2} = 9 \cdot 4 = 36$. Tedy $6 \cdot 36 = 216$ možností.

Pokud nulu obsahuje, pak je tvaru $a***$, kde na zbylých místech je jedenkrát cifra a a dvakrát cifra 0. Tedy $3 \cdot 9 = 27$ možností.

Pravděpodobnost tak je $p = \frac{216+27}{9000} = \frac{27}{1000} = 0.027$.

Zadání B

(1) [4 bodů] Na náhodně vybrané kostce domina nejsou obě čísla stejná (čísla na kostkách jsou vždy od nuly do šesti). Určete pravděpodobnost, že další kostka domina, vybraná také náhodně, půjde přiložit k první kostce.

Řešení:

Kostek domina je 28 (jsou to všechny uspořádané dvojice (a, b) , kde $a \leq b$ a $a, b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$). Na vybrané kostce je dvojice (a_0, b_0) , kde $a_0 \neq b_0$. Na další kostce (vybírané z 27 kostek) tak musí být buď dvojice (a_0, c) , kde $c \neq b_0$, nebo (b_0, d) , kde $d \neq a_0$. Možností je tedy $2 \cdot (7 - 1) = 12$. Pravděpodobnost tak je $\frac{12}{27} = \frac{4}{9} \doteq 44.4\%$.

(2) [4 bodů] Na deseti kartičkách jsou napsány různé cifry od nuly do devíti. Jaká je pravděpodobnost toho, že z těchto kartiček náhodně sestavené TROJCIFERNÉ číslo bude dělitelné 50?

Řešení:

Všech možných takovýchto trojčiferných čísel vzniklých sestavením z (neopakujících se) cifer na kartičkách je $10 \cdot 9 \cdot 8 - 9 \cdot 8 = 9^2 \cdot 8 = 648$ (počet příslušných posloupností délky 3, minus ty, které začínají nulou). Trojčiferná čísla, která jsou dělitelná 50 a současně nemají opakující se cifry, jsou tvaru $a50$, kde $a \in \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$. Tedy 8 možností. Pravděpodobnost tak je $\frac{8}{648} = \frac{1}{81} \doteq 1.23\%$.