3. cvičení z PST

9. října 2019

Připomeňme si, co reprezentují jednotlivé složky Kolmogorova modelu $(\Omega, \mathcal{A}, P)$:

Ω je množina všech možných výsledků (tzv. *elementárních jevů*)

$\mathcal{A}$ představuje všechny "přípustné" množiny takovýchto výsledků, tedy všechny *jevy*, se kterými můžeme pracovat.

$P : \mathcal{A} \to \langle 0, 1\rangle$ je zobrazení, které jevu $A \in \mathcal{A}$ přiřadí jeho *pravděpodobnost* $P(A)$. A právě kvůli tomu, abychom vůbec takovéto přiřazení P mohli získat, potřebujeme požadovat jisté speciální vlastnosti od systému všech jevů $\mathcal{A}$ (chceme, aby $\mathcal{A}$ tvořil tzv. σ-*algebru*).

3.1 (Kolmogorův model)
Zjistěte, a případně doplňte, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ na Kolmogorův model pravděpodobnosti, je-li dáno:

- $\Omega = \{1, 2, 3\}$,
- $\mathcal{A} = \big\{\emptyset, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2, 3\}\big\}$,
- $P(A) = \frac{1}{3}|A|$, $A \in \mathcal{A}$ (kde $|A|$ je počet prvků množiny A).

Řešení:
Pro Kolmogorův model je tedy potřeba ověřit, že $\mathcal{A}$ je σ-algebra, tj. že splňuje:

- $\emptyset \in \mathcal{A}$,
- $A \in \mathcal{A} \;\Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$,
- $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$,

a že $P : \mathcal{A} \to \langle 0, 1\rangle$ je pravděpodobnost, tj. že splňuje:

- $P(\emptyset) = 0$,
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ pro každé $A \in \mathcal{A}$,
- $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A}$ & A_n jsou navzájem disjunktní $\;\Rightarrow\; P\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$,

První dvě podmínky pro σ-algebru jsou zřejmě splněny, poslední ne, protože

$$\{2\}, \{3\} \in \mathcal{A}, \quad \text{ale} \quad \{2\} \cup \{3\} \notin \mathcal{A}\ .$$

Množina $\mathcal{A}$ tedy *není* σ-algebra a $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ proto *není* Kolmogorův model.

Tuto nedokonalost, ale můžeme spravit tak, že k $\mathcal{A}$ přidáme prvky, které chybí: tedy prvek $\{2\}\cup\{3\} = \{2, 3\}$ a $\overline{\{2, 3\}} = \{1\}$. Dostaneme tak celou potenční množinu $\mathcal{A}' = \exp(\Omega)$, která σ-algebrou určitě je.
Teď ještě ukážeme, že $P : \mathcal{A}' \to \langle 0, 1\rangle$ (stále uvažujeme stejný předpis) je v tomto případě pravděpodobnost. Pro ulehčení si všimneme, že $|\Omega| = 3$ a tedy

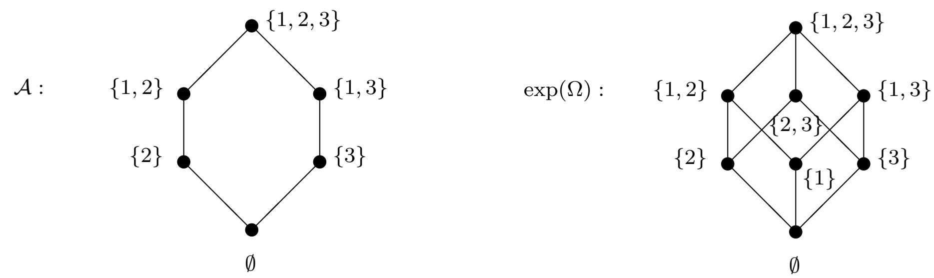
$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \in \langle 0, 1\rangle$$

tedy jde o Laplaceovu pravděpodobnost (tj. počet příznivých případů ku počtu všech.) Pro pořádek si tedy zkontrolujeme, ze jde skutečně o pravděpodobnost

- $P(\emptyset) = \frac{|\emptyset|}{|\Omega|} = 0$
- $P(\overline{A}) = \frac{|\Omega \setminus A|}{|\Omega|} = \frac{|\Omega| - |A|}{|\Omega|} = 1 - \frac{|A|}{|\Omega|} = 1 - P(A)$
- pro $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \exp(\Omega)$ navzájem disjunktní máme

$$P\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \frac{\left|\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right|}{|\Omega|} = \frac{1}{|\Omega|}\sum_{n\in\mathbb{N}} |A_n| = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)\ .$$

Uspořádané množiny (v našem případě je uspořádání dáno inkluzí) můžeme ještě zakreslit tzv. Hasseovým diagramem (větší prvky se zakreslují nad menší a spojují se čárkou, pokud už mezi nimi žádné další prvky nejsou). Dostáváme tak:



To, že jsme ve druhém případě dostali obrázek, který vypadá jako krychle, není náhoda. Konečné σ-algebry budou mít vždy Hasseův diagram ve tvaru vícerozměrné krychle.

Připomenutí: Jevy $A_1, \ldots, A_n$ jsou nezávislé $\overset{\text{def.}}{\iff}$ pro každou indexovou množinu $K \subseteq \{1, \ldots, n\}$ je

$$P\Big(\bigcap_{i\in K} A_i\Big) = \prod_{i\in K} P(A_i)\ .$$

3.2 ((ne)závislost jevů)

Pro hod dvěma mincemi uvažujme jevy:

$A =$*"na první minci padl líc"*,
$B =$*"na druhé minci padl rub"*,
$C =$*"na mincích padly různé výsledky"*.

Jak je to s nezávislostí jevů A, B, C?

Řešení:
Jevové pole bude $\Omega = \{\text{líc, rub}\} \times \{\text{líc, rub}\}$ a každý elementární jev bude stejně pravděpodobný. Pak máme

$$P(A) = P(B) = P(C) = \tfrac{1}{2}$$

a

$$A \cap B = A \cap C = B \cap C = A \cap B \cap C$$

Tedy

$$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = P(A \cap B \cap C) = \tfrac{1}{4}\ .$$

a proto máme

$$P(A \cap B) = \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = P(A) \cdot P(B)$$

a podobně je to pro ostatní případy, zatímco

$$P(A \cap B \cap C) = \tfrac{1}{4} \neq \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C).$$

Jevy jsou tak po dvou nezávislé, ale ne celkově nezávislé.

Poznámka: Pokud jevy $A_1, \ldots, A_n$ jsou nezávislé, pak také jevy

- $A_1 \cup A_2, A_3, \ldots, A_n$ jsou nezávislé
- $A_1 \cap A_2, A_3, \ldots, A_n$ jsou nezávislé
- $\overline{A_1}, A_2, A_3, \ldots, A_n$ jsou nezávislé

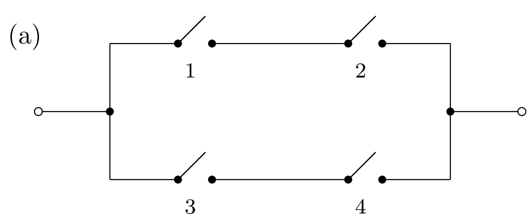
Nezávislé jevy tedy můžeme libovolně sdružovat nebo pronikat (daný jev vždy sjednotíme nebo pronikneme vždy jen s jednou skupinou jevů), a můžeme je libovolně převracet na jejich doplňky. Výsledek jsou opět nezávislé jevy.

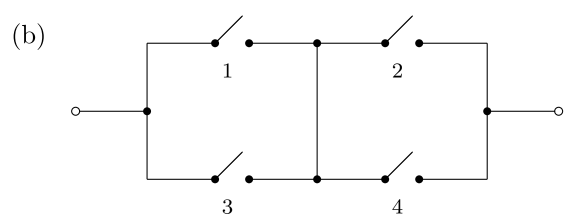
3.3 (operace s nezávislými jevy)
Čtyři spínače v zabezpečovacím zařízení pracují nezávisle, každý s pravděpodobností $p \in (0,1)$. Jsou zapojeny (viz obrázek)

(a) po dvou sériově a pak paralelně

(b) po dvou paralelně a pak sériově.

S jakou pravděpodobností bude zařízení propouštět proud v jednotlivých případech? Pro které zapojení je tato pravděpodobnost větší?





Řešení:
Pro $i = 1, 2, 3, 4$ si označme jevy

A_i= "*i-tý spínač je zapnutý*"

B= "*zařízením prochází proud*"

Víme, že jevy $A_1, \ldots, A_4$ jsou nezávislé a $P(A_i) = p$.

(a) Aby proud procházel zařízením, musí jít buď horní větví nebo spodní větví:

$$B = (A_1 \cap A_2) \cup (A_3 \cap A_4)\ .$$

Pro pravděpodobnost pak (díky nezávislosti) máme

$$P(B) = P\Big((A_1 \cap A_2) \cup (A_3 \cap A_4)\Big) = P(A_1 \cap A_2) + P(A_3 \cap A_4) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) =$$

$$= p^2 + p^2 - p^4 = p^2(2 - p^2) \ .$$

(b) Aby proud procházel zařízením, musí projít levou částí a současně pravou částí:

$$B = (A_1 \cup A_3) \cap (A_2 \cup A_4) \ .$$

Z nezávislosti jevů A_i vyplývá, že jevy $A_1 \cup A_3$ a $A_2 \cup A_4$ jsou také nezávislé. Můžeme tak psát

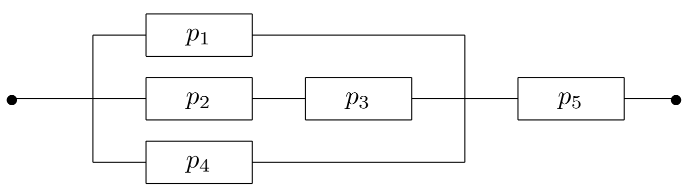
$$P(B) = P\Big((A_1 \cup A_3) \cap (A_2 \cup A_4)\Big) = P(A_1 \cup A_3) \cdot P(A_2 \cup A_4) =$$

$$= \Big(P(A_1) + P(A_3) - P(A_1) \cdot P(A_3)\Big) \cdot \Big(\cdots\Big) = (2p - p^2)^2 = p^2(2 - p)^2 \ .$$

Už ze schématu zapojení je jasné, že obecně větší pravděpodobnost průchodu proudu zařízením je v případě (b), kde je jeden spoj navíc. To lze potvrdit i z vypočtené pravděpodobnosti:

$$p^2(2 - p^2) < p^2(2 - p)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < 2p^2(p - 1)^2 \ .$$

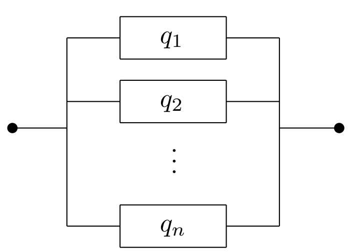
3.4 (operace s nezávislými jevy)
Zařízení na obrázku je tvořeno zapojením bloků, které pracují nezávisle na sobě a pravděpodobností výskytu poruch jsou zadány. Vypočtěte pravděpodobnost poruchy funkce celého zařízení.



Pravděpodobnosti vyčíslete pro $p_1 = 0.2$, $p_2 = p_3 = 0.4$, $p_4 = 0.3$ a $p_5 = 0.1$.

Řešení:
Úlohu si zjednodušíme tím, že budeme postupně nahrazovat více bloků jedním blokem, který bude mít stejnou pravděpodobnost poruchy.

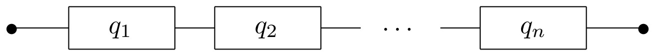
• Pro paralelní zapojení



a jevy A_i =“*i-tý blok (seshora) má poruchu*” je pravděpodobnost poruchy tohoto zapojení rovna

$$P(\text{“porucha paralelního zapojení”}) = P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdots P(A_n) = q_1 \cdots q_n \ .$$

• Pro sériové zapojení



a jevy $B_i =$"*i-tý blok (zleva) má poruchu*" je pravděpodobnost poruchy tohoto zapojení rovna

$$P(\text{"porucha sériového zapojení"}) = P(B_1 \cup \cdots \cup B_n) = 1 - P\big(\overline{B_1 \cup \cdots \cup B_n}\big) =$$

$$= 1 - P(\overline{B_1} \cap \cdots \cap \overline{B_n}) = 1 - P(\overline{B_1}) \cdots P(\overline{B_n}) = 1 - (1 - q_1) \cdots (1 - q_n) \ .$$

Pro vyřešení původního zadání teď

(a) nejdříve nahradíme sériové zapojení dvou bloků s pravděpodobnostmi poruch $p_2 = 0.4$ a $p_3 = 0.4$ jediným blokem s pravděpodobností poruchy

$$p_{2,3} = 1 - (1 - p_2)(1 - p_3) = 1 - 0.6 \cdot 0.6 = 0.64 \ .$$

(b) dále nahradíme paralelní zapojení tří bloků s pravděpodobnostmi poruch $p_1 = 0.2$, $p_{2,3} = 0.64$ a $p_4 = 0.3$ jediným blokem s pravděpodobností poruchy

$$p_{1,2,3,4} = p_1 \cdot p_{2,3} \cdot p_4 = 0.2 \cdot 0.64 \cdot 0.3 = 0.0384 \ .$$

(c) a nakonec nahradíme sériové zapojení dvou bloků s pravděpodobnostmi poruch $p_{1,2,3,4} = 0.0384$ a $p_5 = 0.1$ jediným blokem, který odpovídá celému zařízení a má pravděpodobnost poruchy

$$p_{1,2,3,4,5} = 1 - (1 - p_{1,2,3,4})(1 - p_5) = 1 - 0.9616 \cdot 0.9 = 1 - 0.86544 = 0.13456 \ .$$

3.5 (bayesovská pravděpodobnost)

Máme 3 krabice stejného vzhledu. V první jsou 3 bílé a 2 černé koule, ve druhé jsou 2 bílé a 2 černé koule, ve třetí je 1 bílá a 4 černé koule.

(a) Určete pravděpodobnost, že z náhodně vybrané krabice náhodně vytáhneme bílou kouli.

(b) Pokud nám někdo řekl, že náhodně vybral jednu z krabic a vytáhl 1 kouli, která byla bílá, s jakou pravděpodobností můžeme usuzovat, že v téže krabici se nachází alespoň 3 černé koule?

Řešení:
Označme jevy:

$A_i =$"*byla vybrána i-tá krabice*",
$B =$"*koule vytažená z vybrané krabice je bílá*".

pro $i = 1, 2, 3$. Víme, že A_1, A_2 a A_3 je úplný disjunktní systém jevů, o kterých předpokládáme, že jsou stejně pravděpodobné. Tedy

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \tfrac{1}{3}$$
$$P(B|A_1) = \tfrac{3}{5} \qquad P(B|A_2) = \tfrac{2}{4} \qquad P(B|A_3) = \tfrac{1}{5} \ .$$

(a) Z věty o úplné pravděpodobnosti máme

$$P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(B|A_i) \cdot P(A_i) = \tfrac{1}{3} \cdot \left(\tfrac{3}{5} + \tfrac{2}{4} + \tfrac{1}{5} \right) = \tfrac{13}{30} \doteq 0.4333 \ .$$

(b) Protože jediná krabice obsahující alespoň 3 černé koule je třetí krabice, zajímá nás $P(A_3|B)$. Z Bayesovy věty máme:

$$P(A_3|B) = \frac{P(B|A_3) \cdot P(A_3)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{13}{30}} = \frac{2}{13} = 0.1538 \; .$$

Ještě si můžeme pro zajímavost sestrojit příslušný Kolmogorův model:

- elementární jev ω bude dvojice "(výběr dané krabice, vytažení koule z této krabice)"a Ω bude tedy množina všech takových ω,
- $A_i = \{\omega \in \Omega \mid \omega = (\text{výběr } i\text{-té krabice, vytažení koule z této krabice})\}$,
- pro počet krabic $k = 3$ a počet koulí k_i v i-té krabici pak pro $\omega \in A_i$ máme $P(\{\omega\}) = \frac{1}{k \cdot k_i}$,
- pravděpodobnost jevu A_i, tedy výběr i-té krabice, pak je $P(A_i) = \sum_{\omega \in A_i} \frac{1}{k \cdot k_i} = \frac{k_i}{k \cdot k_i} = \frac{1}{k}$.

Můžeme si tedy všimnout, že pravděpodobnosti vytažení koule z dané vybrané krabice nejsou všechny stejné, zatímco pravděpodobnosti výběru dané krabice ano.

3.6 (bayesovská pravděpodobnost)

Do obchodu dodávají čipy tři výrobci, po řadě 50 %, 30 % a 20 % zásoby obchodu. Pravděpodobnosti výroby funkčního čipu od jednotlivých výrobců jsou po řadě $p_1 = 0.98$, $p_2 = 0.95$ a $p_3 = 0.99$.

(a) Určete pravděpodobnosti, že zakoupený náhodně vybraný čip je vadný.

(b) Určete pravděpodobnost, že čip je od 2. výrobce, za předpokladu, že je funkční?

Řešení:
Označme si jevy:

$A_i =$ *"zakoupený čip byl od i-tého výrobce"*,
$B =$ *"zakoupený čip byl funkční"*.

Ze zadání plyne, že

$$P(A_1) = 0.5 \quad P(A_2) = 0.3 \quad P(A_3) = 0.2$$

$$P(B|A_1) = 0.98 \quad P(B|A_2) = 0.95 \quad P(B|A_3) = 0.99$$

(a) Počítáme pravděpodobnost jevu $\overline{B}$. Z věty o úplné pravděpodobnosti máme:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(B|A_i) \cdot P(A_i) = 0.98 \cdot 0.5 + 0.95 \cdot 0.3 + 0.99 \cdot 0.2 = 0.973$$

a

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.973 = 0.027 \; .$$

Všimněme si ještě, že díky výpočtu $P(B)$ platí, že

$$0.95 = \min\{0.98, 0.95, 0.99\} \leq \underbrace{P(B)}_{0.973} \leq \max\{0.98, 0.95, 0.99\} = 0.99 \; .$$

Pokud nám tedy takovéto omezení nebude vycházet, někde jsme museli udělat chybu.

$P(\overline{B})$ jsme mohli spočítat i přímo jako

$$P(\overline{B}) = \sum_{i=1}^{3} \underbrace{P(\overline{B}|A_i)}_{1-P(B|A_i)} \cdot P(A_i) = 0.02 \cdot 0.5 + 0.05 \cdot 0.3 + 0.01 \cdot 0.2 = 0.027\ .$$

(b) Zajímá nás $P(A_2|B)$. Z Bayesovy věty máme:

$$P(A_2|B) = \frac{P(B|A_2) \cdot P(A_2)}{P(B)} = \frac{0.95 \cdot 0.3}{0.973} = 0.293\ .$$

I tady se podíváme, jak by vypadal ten nejjednodušší Kolmogorův model:

- elementární jev ω si můžeme definovat jako dvojici "(čip je od daného výrobce, čip je/není funkční)"a pro jednoduchost si je označme jako
$$\omega_i = (\text{čip je od } i\text{-tého výrobce, čip je funkční})$$
$$\omega_i' = (\text{čip je od } i\text{-tého výrobce, čip není funkční})$$
pro $i = 1, 2, 3$. Jevové pole pak bude $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_1', \omega_2', \omega_3'\}$. Má tedy 6 prvků.
- $A_i = \{\omega_i, \omega_i'\}$
- $B = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$
- pokud máme skutečně obdržet Kolmogorův model, musí pravděpodobnosti jednotlivých elementárních jevů nutně ze zadání být tyto:
$$P\Big(\{\omega_i\}\Big) = P(A_i \cap B) = P(B|A_i) \cdot P(A_i)$$
$$P\Big(\{\omega_i'\}\Big) = P(A_i \cap \overline{B}) = \Big(1 - P(B|A_i)\Big) \cdot P(A_i)$$
Takto definované pravděpodobnosti elementárních jevů nám pak zpětně poskytnou hodnoty pravděpodobností požadovaných v zadání:
$$P(A_i) = P\Big(\{\omega_i\}\Big) + P\Big(\{\omega_i'\}\Big)$$
$$P(B|A_i) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(A_i)} = \frac{P\Big(\{\omega_i\}\Big)}{P\Big(\{\omega_i\}\Big) + P\Big(\{\omega_i'\}\Big)}\ .$$

3.7 (bayesovská pravděpodobnost)

Po skončení aktivní služby odchází do důchodu 60 námořních kapitánů. Z této skupiny jich 5 zažilo ztroskotání. Podle statistiky při ztroskotání zahyne třetina kapitánů. Odhadněte pravděpodobnost, že kapitán během své aktivní služby zažije ztroskotání. (Možnost opakovaného ztroskotání a úmrtí z jiné příčiny během aktivní služby zanedbáváme.)

Řešení:
Uvažujme jevy:

$A =$*"kapitán se dožije důchodu"*,
$B =$*"kapitán zažije ztroskotání"* .

Ze zadání máme vztahy

$$P(B|A) = \tfrac{5}{60} = \tfrac{1}{12}\ , \qquad P(\overline{A}|B) = \tfrac{1}{3} \quad \text{a} \quad \overline{A} \subseteq B$$

kde poslední vztah odpovídá tomu, že během aktivní služby nemůže nastat úmrtí z jiné příčiny než kvůli ztroskotání. Z posledního vztahu plyne také $\overline{B} \subseteq A$ a tudíž dostáváme tyto podmíněné pravděpodobnosti

$$P(B|\overline{A}) = \frac{P(B\cap\overline{A})}{P(\overline{A})} = 1 \quad \text{a} \quad P(A|\overline{B}) = \frac{P(A\cap\overline{B})}{P(\overline{B})} = 1 \ .$$

Nás zajímá $P(B)$. Z Bayesovy věty máme:

$$P(B) = \frac{P(B|A)}{P(A|B)}\cdot P(A) = \frac{\frac{1}{12}}{1-\frac{1}{3}}\cdot P(A) = \tfrac{1}{8}\cdot P(A) \ .$$

Pomocí věty o úplné pravděpodobnosti můžeme teď zase $P(A)$ vyjádřit pomocí $P(B)$:

$$P(A) = P(A|B)\cdot P(B) + P(A|\overline{B})\cdot P(\overline{B}) = \Big(1-\tfrac{1}{3}\Big)\cdot P(B) + 1\cdot\Big(1-P(B)\Big) =$$

$$= 1 - \tfrac{1}{3}P(B) \ .$$

Celkem tedy

$$P(B) = \tfrac{1}{8}\Big(1-\tfrac{1}{3}P(B)\Big) \quad \text{a} \quad P(B) = \tfrac{3}{25} = 0.12 \ .$$

Použitý vzorec je obecně:

$$P(B) = \frac{P(B|A)}{P(A|B)}\cdot P(A) = \frac{P(B|A)}{P(A|B)}\cdot\Big[P(A|B)\cdot P(B) + P(A|\overline{B})\cdot\big(1-P(B)\big)\Big]$$

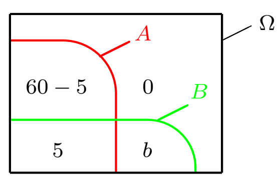
neboli

$$P(B) = \frac{P(B|A)\cdot P(A|\overline{B})}{P(B|A)\cdot P(A|\overline{B}) + \big(1-P(B|A)\big)\cdot P(A|B)} =$$

$$= \frac{P(B|A)\cdot P(A|\overline{B})}{P(B|A)\cdot P(A|\overline{B}) + P(\overline{B}|A)\cdot P(A|B)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{12}\cdot 1}{\frac{1}{12}\cdot 1 + \frac{11}{12}\cdot\frac{2}{3}} = \frac{3}{25} \ .$$

Můžeme také použít intuitivnější přístup:



kde čísla znamenají velikost dané množiny ve smyslu geometrické pravděpodobnosti (např. $\mathrm{vol}(A\cap B) = 5$ apod.). Přitom víme ještě, že

$$\frac{1}{3} = P(\overline{A}|B) = \frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{\mathrm{vol}(\overline{A}\cap B)}{\mathrm{vol}(\Omega)}}{\frac{\mathrm{vol}(B)}{\mathrm{vol}(\Omega)}} = \frac{\mathrm{vol}(\overline{A}\cap B)}{\mathrm{vol}(B)} = \frac{b}{5+b}$$

takže

$$5 + b = 3b \ \Rightarrow \ b = 2.5 \ .$$

Proto máme

$$P(B) = \frac{\mathrm{vol}(B)}{\mathrm{vol}(\Omega)} = \frac{5+b}{60+b} = \frac{5+2.5}{60+2.5} = \frac{3}{25} \ .$$

3.8 (bayesovská pravděpodobnost)

U 10% řidičů, kteří způsobili dopravní nehodu, bylo prokázáno požití alkoholu. Rozsáhlý průzkum ukázal, že riziko nehody se požitím alkoholu zvyšuje 7×. Odhadněte, kolik procent řidičů požilo alkohol.

Řešení:
Označme jevy

$A =$ *"požil alkohol,"*

$H =$ *"způsobil nehodu."*

Pak máme $P\left(A|H\right) = 0.1$.

Dále je potřeba správně interpretovat údaj ve druhé větě "riziko nehody se požitím alkoholu zvyšuje". Při prvním (méně pozorném) pohledu to vypadá, že bychom mohli použít buď podmíněné pravděpodobnosti

"pravděpodobnost nehody, *jestliže* řidič požije/nepožije alkohol" (tedy hodnotu poměru $\frac{P(H|A)}{P\left(H|\overline{A}\right)}$)

ale možná také přímé pravděpodobnosti

"pravděpodobnost, že řidič bude mít nehodu *a* současně požije/nepožije alkohol" (tedy hodnotu poměru $\frac{P(H\cap A)}{P\left(H\cap\overline{A}\right)}$).

První možnost posuzuje pravděpodobnost z hlediska daného řidiče, který pochopitelně ví, jestli si dá/nedá alkohol, a tím i rozhoduje o dalších následcích. Tedy jev A pro něj není daný náhodně (tím, že by řidič nevěděl, zda se uskuteční) ale naopak je daný volbou.

Z toho vyplývá i to, že druhou možnost nemůžeme popisovat z hlediska daného řidiče a musíme se na ni dívat "z venku". Druhá možnost (tedy průniky jevů) proto popisuje, jaké je procento všech jízd opilých/střízlivých řidičů, které skončily nehodou, v rámci všech možných jízd všech řidičů (třeba za nějaký rok).

Smyslem průzkumu ale jistě bylo spíš varovat před následky pití alkoholu před jízdou. To, že se jedná o podmíněnou pravděpodobnost nakonec dokládá i původní vyjádření "riziko nehody požitím alkoholu", které znamená "riziko nehody *za předpokladu* požití alkoholu".

Správná interpretace tak je, že $P\left(H|A\right) = 7 \cdot P\left(H|\overline{A}\right)$. Nás nyní zajímá $P\left(A\right)$. Z Bayesovy věty a z věty o úplné pravděpodobnosti tak postupně máme

$$P\left(A\right) = \frac{P\left(A|H\right)}{P\left(H|A\right)} \cdot P(H) = \frac{P\left(A|H\right)}{P\left(H|A\right)} \cdot \left[P\left(H|A\right) \cdot P\left(A\right) + P\left(H|\overline{A}\right) \cdot P\left(\overline{A}\right)\right] =$$

$$= P\left(A|H\right) \cdot \left[P\left(A\right) + \frac{P\left(H|\overline{A}\right)}{P\left(H|A\right)} \cdot \left(1 - P\left(A\right)\right)\right] = 0.1 \cdot \left[P\left(A\right) + \tfrac{1}{7} \cdot \left(1 - P\left(A\right)\right)\right]$$

a tedy

$$10 \cdot P\left(A\right) = \tfrac{1}{7} + \tfrac{6}{7} \cdot P\left(A\right)$$

Výsledek je

$$P\left(A\right) = \frac{\frac{1}{7}}{10 - \frac{6}{7}} = \tfrac{1}{70-6} = \tfrac{1}{64}\ .$$

Poznámka: Pro doplnění celého příkladu si ještě uvědomme, jaký by byl číselný rozdíl u jednotlivých poměrů, kdybychom uvažovali i "druhou variantu" při interpretaci. Máme vztah

$$\frac{P\left(H|A\right)}{P\left(H|\overline{A}\right)} = \frac{P\left(H\cap A\right)}{P\left(H\cap\overline{A}\right)} \cdot \frac{P(\overline{A})}{P(A)} = \frac{P\left(H\cap A\right)}{P\left(H\cap\overline{A}\right)} \cdot \left(\frac{1}{P(A)} - 1\right)\ .$$

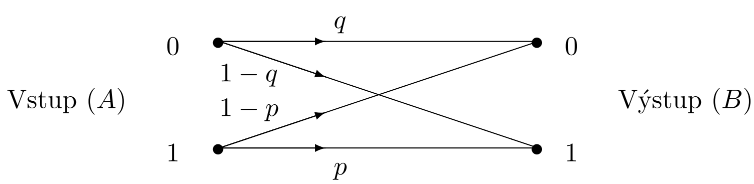
Dá se ukázat, že pro každé dvě hodnoty $\alpha \in (0, +\infty)$ a $\beta \in (0, 1)$ lze najít Kolmogorův model, ve kterém bude

- $\frac{P(H\cap A)}{P(H\cap \overline{A})} = \alpha$
- $P(A) = \beta$
- $\frac{P(H|A)}{P(H|\overline{A})} = \alpha(\frac{1}{\beta} - 1)$

Díky volbě $P(A)$ tak vidíme, že hodnoty $\frac{P(H\cap A)}{P(H\cap \overline{A})}$ a $\frac{P(H|A)}{P(H|\overline{A})}$ lze volit libovolně a nezávisle na sobě.

3.9 (bayesovská pravděpodobnost v informačním kanálu se šumem)

Binární komunikační kanál přenáší symboly 0 a 1 ze vstupu (jevy A_0 a A_1) na výstup (jevy B_0 a B_1) podle uvedeného schématu, kdy je vlivem šumu s určitou pravděpodobností zaměněn symbol 1 za symbol 0 nebo naopak.



Nechť $q = P(B_0|A_0) = 0.9$, $p = P(B_1|A_1) = 0.8$.

(a) Jestliže pravděpodobnosti na *vstupu* jsou $P(A_0) = 0.7$, $P(A_1) = 0.3$, určete

(1) pravděpodobnosti $P(B_0)$ a $P(B_1)$ výskytu symbolů na výstupu

(2) pravděpodobnost toho, že vyslaný symbol bude přenesen správně.

(b) Jestliže pravděpodobnosti na *výstupu* jsou $P(B_0) = 0.6$, $P(B_1) = 0.4$, určete pravděpodobnosti $P(A_0)$ a $P(A_1)$ výskytu symbolů na vstupu.

Řešení:

Pro $i = 0, 1$ máme jevy:

$A_i =$ *"byl vyslán znak i,"*

$B_i =$ *"byl přijat znak i."*

(a1) Pravděpodobnosti výskytu symbolů na výstupu určíme pomocí vzorce pro úplnou pravděpodobnost (tj. pomocí stochastických matic). Je tedy

$$\left[P(B_0), \quad P(B_1)\right] = \left[P(A_0), \quad P(A_1)\right] \cdot \begin{bmatrix} P(B_0|A_0) & P(B_1|A_0) \\ P(B_0|A_1) & P(B_1|A_1) \end{bmatrix} =$$

$$= \left[0.7, \quad 0.3\right] \cdot \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} = \left[0.69, \quad 0.31\right]$$

Stochastická matice $n \times k$ je taková, jejíž vstupy jsou nezáporné prvky a součty v rámci každého řádku se rovnají 1.

(a2) Zajímá nás jev

$$C = \text{"\textit{vyslaný znak bude přečten správně},"}$$

který je vyjádřen jako

$$C = (A_0 \cap B_0) \cup (A_1 \cap B_1)$$

Pravděpodobnost správného přenosu symbolů 0 a 1 tedy je

$$P(C) = P(A_0 \cap B_0) + P(A_1 \cap B_1) =$$
$$= P(B_0|A_0) \cdot P(A_0) + P(B_1|A_1) \cdot P(A_1) = 0.9 \cdot 0.7 + 0.8 \cdot 0.3 = 0.87\,.$$

(b) Podobně jako v (a1) máme

$$\begin{bmatrix} P(B_0), & P(B_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(A_0), & P(A_1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P(B_0|A_0) & P(B_1|A_0) \\ P(B_0|A_1) & P(B_1|A_1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.6, & 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(A_0), & P(A_1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

tedy

$$\begin{bmatrix} P(A_0), & P(A_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6, & 0.4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}^{-1} =$$
$$= \begin{bmatrix} 0.6, & 0.4 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{0.72 - 0.02} \begin{bmatrix} 0.8 & -0.1 \\ -0.2 & 0.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{7}, & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

Poznámka: Aby nedošlo k omylu - inverzní matice (ke stochastické matici typu "$P(B|A)$"), kterou jsem právě použili, NENÍ stochastická matice typu "$P(A|B)$"!

Stochastická matice typu "$P(B|A)$" se počítá pomocí Bayesovy věty, tedy speciálně závisí i na hodnotách $P(A_i)$ a nikoliv jen na hodnotách $P(B_i|A_j)$:

$$\begin{bmatrix} P(A_0|B_0) & P(A_1|B_0) \\ P(A_0|B_1) & P(A_1|B_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{P(B_0)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{P(B_1)}) \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} P(B_0|A_0) & P(B_0|A_1) \\ P(B_1|A_0) & P(B_1|A_1) \end{bmatrix}}_{\mathbb{A}} \cdot \begin{bmatrix} P(A_0) & 0 \\ 0 & P(A_1) \end{bmatrix}$$

Zde konkrétně vyjde jako:

$$\begin{bmatrix} P(A_0|B_0) & P(A_1|B_0) \\ P(A_0|B_1) & P(A_1|B_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{0.6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{0.4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{4}{7} & 0 \\ 0 & \frac{3}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{6}{7} \end{bmatrix}$$

Zatímco inverze k typu "$P(B|A)$"$=\mathbb{A}^T$ (pokud vůbec má smysl - tj. pokud je $\mathbb{A}^T$ čtvercová matice a je regulární) je

$$\begin{bmatrix} P(B_0|A_0) & P(B_1|A_0) \\ P(B_0|A_1) & P(B_1|A_1) \end{bmatrix}^{-1} = \left(\mathbb{A}^T\right)^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbb{A})} \cdot \begin{bmatrix} P(B_1|A_1) & -P(B_1|A_0) \\ -P(B_0|A_1) & P(B_0|A_0) \end{bmatrix}$$

a (obecně) to není vůbec stochastická matice (může obsahovat i záporné hodnoty)!

Uvědomme si ještě, že pokud stochastická matice typu "$P(A|B)$" má rozměr $n \times k$, pak analogická stochastická matice typu "$P(B|A)$" má rozměr $k \times n$!

3.10 (bayesovská pravděpodobnost v informačním kanálu se šumem)

Na vstupu informačního kanálu jsou posílány znaky "0"a "1", přitom znak "1"je posílán s pravděpodobností r. Na výstupu je daný znak přečten s pravděpodobností chyby $p = 0.1$, která nezávisí na frekvenci s jakou znak chodí (tj. na hodnotě r).

(a) Jaké jsou pravděpodobnosti výstupu při $r = 0.4$?

(b) Určete podmíněné pravděpodobnosti vstupu při známém výstupu, je-li $r = 0.4$ a je-li $r = 0.1$.

(c) Jestliže je pravděpodobnost znaku ”0”na výstupu 0.8, jaké jsou pak pravděpodobnosti vstupů?

Řešení:
Máme jevy

A_i =*”vyšleme znak i”*,
B_i =*”zachytíme znak i”*,

kde i je nula nebo jednička. Víme, že

$$\overline{A_0} = A_1 \quad \overline{B_0} = B_1 \quad \text{a} \quad P(A_1) = r \qquad \text{(Toto je vlastnost zprávy.)}$$

Pravděpodobnost p chyby znaku ”1”na výstupu je dána procentem zachycených znaku ”0”v množině odeslaných znaku ”1”, tj.

$$p = \frac{P(B_0 \cap A_1)}{P(A_1)} = P(B_0|A_1) \qquad \text{(Toto je vlastnost přijímacího zařízení.)}$$

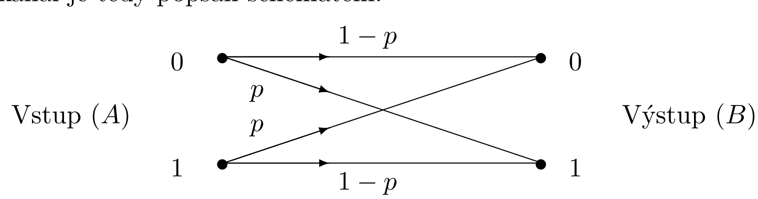
Podobně $p = P(B_1|A_0)$. Pro zjednodušení si uvědomíme, že funkce $\tilde{P}(A) := P(A|B)$ je pravděpodobnost v proměnné A, speciálně tedy

$$P(B_0|A_0) = 1 - P(B_1|A_0) = 1 - p$$

a

$$P(B_1|A_1) = 1 - P(B_0|A_1) = 1 - p.$$

Informační kanál je tedy popsán schématem:



(a) Pravděpodobnosti výskytu symbolů na výstupu určíme pomocí vzorce pro úplnou pravděpodobnost (tj. pomocí stochastických matic). Je tedy

$$\begin{bmatrix} P(B_0), & P(B_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(A_0), & P(A_1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P(B_0|A_0) & P(B_1|A_0) \\ P(B_0|A_1) & P(B_1|A_1) \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 0.6, & 0.4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.58, & 0.42 \end{bmatrix}$$

Pamatujme na to, že ve stochastické matici jsou vždy nezáporná čísla a ŘÁDKY v součtu musí dávat vždy 1!

(b) Zajímají nás podmíněné pravděpodobnosti

$$P(A_i|B_j) \quad \text{pro} \quad i, j \in \{0, 1\} \qquad \text{(Toto zajímá toho, kdo zprávy přijímá.)}$$

Podle Bayesovy věty a věty o úplné pravděpodobnosti teď máme

$$P(A_0|B_0) = \frac{P(B_0|A_0)P(A_0)}{P(B_0|A_0)P(A_0) + P(B_0|A_1)P(A_1)} = \frac{(1-p)\cdot(1-r)}{(1-p)\cdot(1-r) + p\cdot r} = \frac{1}{1+\frac{p\cdot r}{(1-p)\cdot(1-r)}}$$

a

$$P(A_1|B_1) = \frac{P(B_1|A_1)P(A_1)}{P(B_1|A_1)P(A_1) + P(B_1|A_0)P(A_0)} = \frac{(1-r)\cdot r}{(1-p)\cdot r + p\cdot(1-r)} = \frac{1}{1+\frac{p\cdot(1-r)}{(1-p)\cdot r}}\ .$$

Pro zbylé podmíněné pravděpodobnosti máme opět vztahy $P(A_0|B_1) = 1 - P(A_1|B_1)$ a $P(A_1|B_0) = 1 - P(A_0|B_0)$.

Vzorce uvádíme v tomto výsledném tvaru, aby se zvýraznila závislost na jednotlivých parametrech. Při praktickém počítání je ale vhodnější to nechat v původním zápisu a nepřevádět na tvar $\frac{1}{1+\text{něco}}$.

- Pro $r = 0.4$ tak máme

$$P(A_0|B_0) = \frac{1}{1+\frac{0.1\cdot 0.4}{0.9\cdot 0.6}} = \frac{27}{29} \doteq 0.93$$

$$P(A_1|B_0) = 1 - \frac{27}{29} = \frac{2}{29} \doteq 0.07$$

$$P(A_1|B_1) = \frac{1}{1+\frac{0.1\cdot 0.6}{0.9\cdot 0.4}} = \frac{6}{7} \doteq 0.86$$

$$P(A_0|B_1) = 1 - \frac{6}{7} = \frac{1}{7} \doteq 0.14$$

  Tedy je to poměrně vysoká spolehlivost pro oba znaky.

- Pro $r = 0.1$ bude situace podstatně jiná:

$$P(A_0|B_0) = \frac{1}{1+\frac{0.1\cdot 0.1}{0.9\cdot 0.9}} = \frac{81}{82} \doteq 0.99$$

$$P(A_1|B_0) = 1 - \frac{81}{82} = \frac{1}{82} \doteq 0.01$$

$$P(A_1|B_1) = \frac{1}{1+\frac{0.1\cdot 0.9}{0.9\cdot 0.1}} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$P(A_0|B_1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 0.5$$

  Vidíme tedy, že pokud procento vysílaných znaku "1"dosáhne hladiny šumu, tj. $r = p$, nedá se pak při zachycení znaku "1"určit, jestli pochází z vyslaného signálu (tj. znaku "1") nebo naopak ze šumu (tj. chyby při vyslání znaku "0").

(c) Podobně jako v (a) máme

$$\left[P(B_0),\quad P(B_1)\right] = \left[P(A_0),\quad P(A_1)\right] \cdot \begin{bmatrix} P(B_0|A_0) & P(B_1|A_0) \\ P(B_0|A_1) & P(B_1|A_1) \end{bmatrix}$$

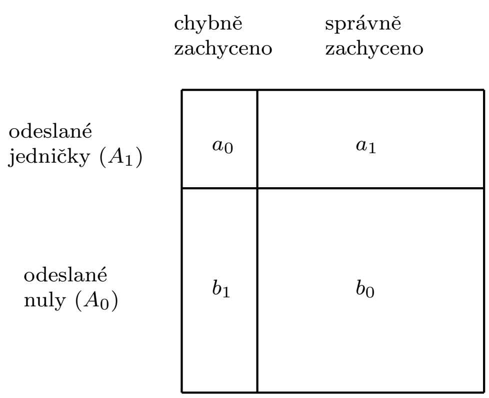
$$\left[0.8,\quad 0.2\right] = \left[P(A_0),\quad P(A_1)\right] \cdot \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}$$

tedy

$$\left[P\left(A_0\right), \quad P\left(A_1\right)\right] = \left[0.8, \quad 0.2\right] \cdot \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \left[0.8, \quad 0.2\right] \cdot \frac{1}{0.81 - 0.01} \begin{bmatrix} 0.9 & -0.1 \\ -0.1 & 0.9 \end{bmatrix} = \left[\tfrac{7}{8}, \quad \tfrac{1}{8}\right]$$

Poznámka: Situaci z (b) si ještě můžeme znázornit obrázkem:



Zde a_i a b_j znamenají počty daných znaků v rámci daného jevu (např. b_1 je počet odeslaných znaků 0, které byly zachyceny jako znaky 1, neboli $|A_0 \cap B_1| = b_1$). Dále je např. $|A_0| = b_1 + b_0$ a $|B_1| = a_1 + b_1$. Speciálně máme

$$P(A_0|B_1) = \frac{|A_0 \cap B_1|}{|B_1|} = \frac{b_1}{a_1 + b_1}$$

a

$$P(A_1|B_1) = \frac{|A_1 \cap B_1|}{|B_1|} = \frac{a_1}{a_1 + b_1} \ .$$

Problém s rozpoznáním znaku 1 nastane právě když

$$\frac{a_1}{a_1 + b_1} = P(A_0|B_1) = P(A_1|B_1) = \frac{b_1}{a_1 + b_1}$$

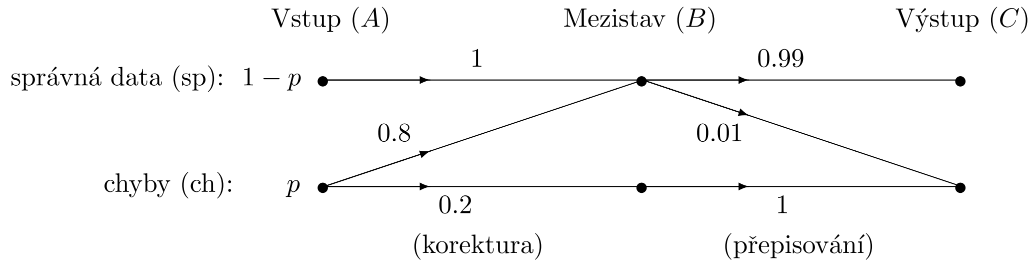
tedy když

$$a_1 = b_1 \ .$$

3.11 (skládání stochastických procesů)
Při korektuře dat se opraví 80% chybných položek. Při následném přepisování dat se do 1% položek dostanou nové chyby. Pro jaké počáteční procento chyb se po přepisu jejich počet sníží?

Řešení:
Data, která zde uvažujeme jsou zapsány pomocí mnoha různých znaků (nejde tedy o binární abecedu) a tudíž pokud je nějaký znak chybný a znovu se chybně přepíše budeme považovat i tento výsledek za chybný (v binární abecedě by se dvakrát přepsaná chyba stala naopak správným znakem).

Výsledný proces můžeme vyjádřit následujícím schématem, které je spojením schématu korektury (levá část) a přepisování (pravá část):



Zde

$$\left[1-p, \quad p\right] = \left[P\left(A_{sp}\right), \quad P\left(A_{ch}\right)\right]$$

je vstupní vektor rozložení správných dat a chyb, kde $p \in (0,1)$. Otázka je, pro jaké hodnoty p bude

$$P\left(C_{ch}\right) < P\left(A_{ch}\right) \; ?$$

Úlohu můžeme vyřešit dvěma přístupy - "pomocí matic" nebo "pomocí cest". Druhý způsob je vlastně jen zkrácený první způsob.

(a) *Pomocí matic:* Všechny vektory i matice, které zde používáme, mají tu vlastnost, že součet hodnot v každém řádku je roven 1 (a samozřejmě všechny vstupy jsou nezáporná čísla) - jsou to tzv. stochastické matice.

V konkrétním vyjádření pro jednotlivé procesy pak máme

$$\begin{aligned}\left[P\left(B_{sp}\right), \quad P\left(B_{ch}\right)\right] &= \left[P\left(A_{sp}\right), \quad P\left(A_{ch}\right)\right] \cdot \begin{bmatrix} P\left(B_{sp}|A_{sp}\right) & P\left(B_{ch}|A_{sp}\right) \\ P\left(B_{sp}|A_{ch}\right) & P\left(B_{ch}|A_{ch}\right)\end{bmatrix} = \\ &= \left[1-p, \quad p\right] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix} = \left[1-0.2p, \quad 0.2p\right]\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}\left[P\left(C_{sp}\right), \quad P\left(C_{ch}\right)\right] &= \left[P\left(B_{sp}\right), \quad P\left(B_{ch}\right)\right] \cdot \begin{bmatrix} P\left(C_{sp}|B_{sp}\right) & P\left(C_{ch}|B_{sp}\right) \\ P\left(C_{sp}|B_{ch}\right) & P\left(C_{ch}|B_{ch}\right)\end{bmatrix} = \\ &= \left[1-0.2p, \quad 0.2p\right] \cdot \begin{bmatrix} 0.99 & 0.01 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[0.99-0.198p, \quad 0.01+0.198p\right] \; .\end{aligned}$$

Podmínka

$$0.01 + 0.198p = P\left(C_{ch}\right) < P\left(A_{ch}\right) = p$$

je tedy ekvivalentní podmínce

$$p > \frac{0.01}{0.802} \doteq 0.0125 \; .$$

Pokud je tedy na počátku v datech více než 1.25% chyb, tak po proběhlých procesech jejich podíl klesne. V opačném případě se jejich podíl zvětší (nebo, v jediném případě $p = 1.25\%$, se jejich podíl nezmění).

(b) *Pomocí cest:* Na celý proces se můžeme dívat jako na přelévání, rozdělování a slučování “kapaliny” o objemu 1. Ta je na začátku rozdělena na části p (chyby) a část $1-p$ (správná data). Zajímá nás, jaká část “kapaliny” se nakonec dostane do výstupu mezi chyby (tj. jev C_{ch}). K tomu je potřeba uvážit všechny možné cesty:

Jako příklad pro jednu z možných si uveďme tuto: Při první fázi procesu se 80% části p (tj. $p \cdot 0.8$) dostane mezi správná data a 1% z tohoto (tj. $p \cdot 0.8 \cdot 0.01$) se pak ocitne na výstupu mezi chybami.

Celkové množství v C_{ch} je pak součtem všech těchto množství přes všechny cesty (s libovolným začátkem) končící v C_{ch} (celkem jsou to 3 cesty), tedy:

$$P(C_{ch}) = p \cdot 0.8 \cdot 0.01 + p \cdot 0.2 \cdot 1 + (1-p) \cdot 1 \cdot 0.01 = 0.01 + 0.198 \cdot p$$

Jak je vidět, tento výsledek je vlastně jen část z výpočtu při násobení matic (kde nepočítáme hodnoty všech prvků v matici). Zbytek je teď už stejný jako v (a).

Můžeme si ještě všimnout, že při mnohonásobném opakování celého procesu se z jakéhokoliv počátečního procenta chyb p_0 podíl chyb nakonec přiblíží právě hodnotě $p = 1.25\%$, protože rekurentně daná posloupnost $p_{n+1} = 0.198 p_n + 0.01$ má za limitu právě uvedenou hodnotu.