7. cvičení z PST

6. listopadu 2019

7.1 (spojitá veličina - obecně)

Nezáporná náhodná veličina X má hustotu

$$f_X(t) = \begin{cases} 0 & , \ t < 1 \\ \frac{c}{t^2} & , \ t \geq 1. \end{cases}$$

kde c je vhodná konstanta. Určete:

(a) hodnotu c, distribuční funkci F_X a dolní kvartil, tj. $q_X(0.25)$,

(b) střední hodnotu $E(X)$ a rozptyl $D(X)$,

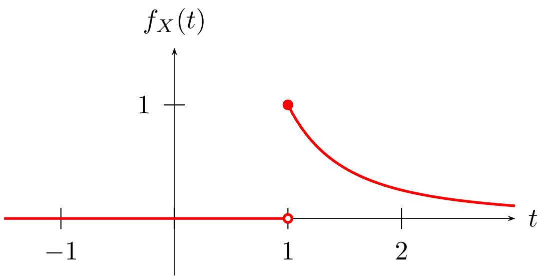
(c) $E(Y)$ pro veličinu $Y = \ln X$.

Řešení:

(a) Nezáporná integrabilní funkce $f : \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty)$ je hustotou pravděpodobnosti právě když platí, že $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\ dt = 1$:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\ dt = \int_1^{\infty} \frac{c}{t^2}\ dt = \left[-\frac{c}{t} \right]_1^{\infty} = c\ .$$

Tedy $c = 1$ a graf f_X je



Distribuční funkce F_X je rovna

$$F_X(u) = \int_{-\infty}^{u} f_X(t)\ dt$$

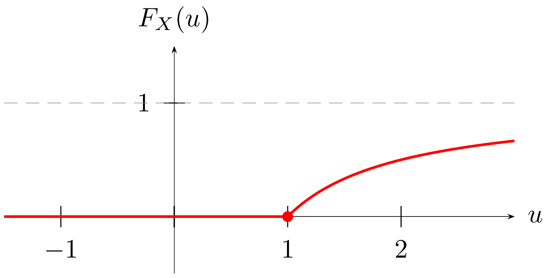
a pro $u \geq 1$ tedy máme

$$F_X(u) = \int_1^u \tfrac{1}{t^2}\ dt = \left[-\frac{1}{t} \right]_1^u = 1 - \tfrac{1}{u}$$

celkově pak

$$F_X(u) = \begin{cases} 0 & , \ u \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{u} & , \ u \geq 1 \end{cases}$$

s grafem



A dále hledáme takové $t \in \mathbb{R}$, že $q_X(0.25) = t$. Z tvaru a grafu vidíme, že musí být $t > 1$. Na intervalu $(1, +\infty)$ je F_X ostře rostoucí a spojitá, takže q_X je tady její inverzí. Tudíž

$$q_X(0.25) = t \qquad \Leftrightarrow \qquad 0.25 = q_X^{-1}(t) = F_X(t) = 1 - \frac{1}{t} \qquad \Leftrightarrow \qquad t = \frac{4}{3}$$

Tedy $q_X(0.75) = \frac{4}{3}$.

(b) Střední hodnotu a rozptyl určíme nejlépe z hustoty pravděpodobnosti:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_X(t)\ dt = \int_{1}^{\infty} \tfrac{1}{t}\ dt = \Big[\ln t\Big]_1^\infty = +\infty$$

Tedy $E(X) = +\infty$, a protože rozptyl je definován jako $D(X) = E\Big(\big(X - E(X)\big)^2\Big)$, dostáváme prostě, že rozptyl neexistuje.

(c) Střední hodnotu $E(Y)$ určíme z hustoty pravděpodobnosti:

$$E(Y) = E(\ln X) = \int_{-\infty}^{\infty} \ln t \cdot f_X(t)\ dt = \int_{1}^{\infty} \tfrac{1}{t^2} \cdot \ln t\ dt =$$

$$= \underbrace{\Big[\big(-\tfrac{1}{t}\big)\ln t\Big]_1^\infty}_{=0} + \int_1^\infty \tfrac{1}{t^2}\ dt = \Big[-\tfrac{1}{t}\Big]_1^\infty = 1$$

Transformovaná veličina $Y = \ln X$ tedy má střední hodnotu konečnou na rozdíl od původní veličiny X.

7.2 (spojitá veličina - obecně)
Nezáporná náhodná veličina X má hustotu

$$f_X(t) = \begin{cases} 0 & , \ t < 1 \\ \frac{c}{t^3} & , \ t \geq 1 \end{cases}$$

kde c je vhodná konstanta. Určete:

(a) hodnotu c, distribuční funkci F_X a horní kvartil, tj. $q_X(0.75)$,

(b) střední hodnotu $E(X)$ a rozptyl $D(X)$,

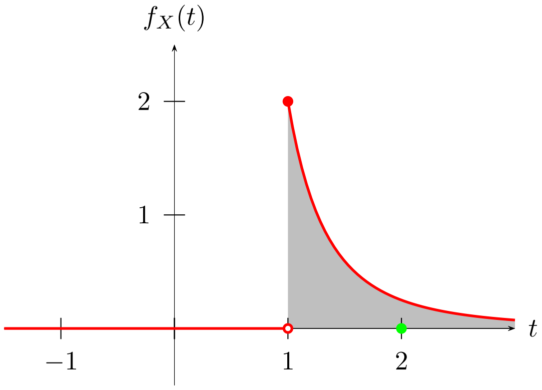
(c) $E(Y)$ pro veličinu $Y = \frac{1}{X}$.

Řešení:

(a) Nezáporná integrabilní funkce $f : \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty)$ je hustotou pravděpodobnosti právě když platí, že $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\ dt = 1$:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\ dt = \int_1^{\infty} \frac{c}{t^3}\ dt = \left[-\frac{c}{2t^2} \right]_1^{\infty} = \frac{c}{2}\ .$$

Tedy $c = 2$ a graf f_X je

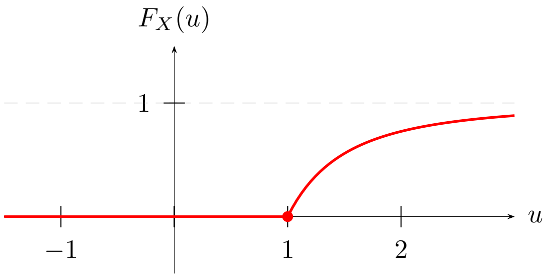


(Zelený bod je vodorovná souřadnice těžiště (šedé) plochy pod grafem f_X neboli hodnota $E(X)$.)

Distribuční funkce je rovna

$$F_X(u) = \int_{-\infty}^{u} f_X(t)\ dt = \begin{cases} 0 & ,\ u \leq 1 \\ \int\limits_1^u \frac{2}{t^3}\ dt = \left[-\frac{1}{t^2} \right]_1^u = 1 - \frac{1}{u^2} & ,\ u \geq 1 \end{cases}$$

s grafem.



A dále hledáme takové $t \in \mathbb{R}$, že $q_X(0.75) = t$. Z tvaru a grafu vidíme, že musí být $t > 1$. Na intervalu $(1, +\infty)$ je F_X ostře rostoucí a spojitá, takže q_X je tady její inverzí. Tudíž

$$q_X(0.75) = t \quad \Leftrightarrow \quad 0.75 = q_X^{-1}(t) = F_X(t) = 1 - \frac{1}{t^2} \quad \Leftrightarrow \quad t = 2$$

Tedy $q_X(0.75) = 2$.

(b) Střední hodnotu a rozptyl určíme nejlépe z hustoty pravděpodobnosti:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_X(t)\ dt = \int_1^{\infty} \tfrac{2}{t^2}\ dt = \left[-\tfrac{2}{t} \right]_1^{\infty} = 2$$

pro rozptyl potřebujeme

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot f_X(t)\ dt = \int_1^{\infty} \tfrac{2}{t}\ dt = \Big[2\ln t\Big]_1^{\infty} = +\infty$$

Tedy rozptyl je nekonečný: $D(X) = E(X^2) - \Big(E(X)\Big)^2 = +\infty$.

(c) Střední hodnotu $E(Y)$ určíme z hustoty pravděpodobnosti:

$$E(Y) = E(\tfrac{1}{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} \tfrac{1}{t} \cdot f_X(t)\ dt = \int_1^{\infty} \tfrac{2}{t^4}\ dt = \Big[-\tfrac{2}{3t^3}\Big]_1^{\infty} = \tfrac{2}{3}$$

Jak bychom mohli dále spočítat, transformovaná veličina $Y = \frac{1}{X}$ bude mít konečný rozptyl, na rozdíl od původní veličiny X.

Poznámka: Obecně pro měřitelnou funkci $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (tj. takovou, že vzorem intervalu je borelovská množina - neboli množina, která se dá poskládat z intervalů pomocí spočetného sjednocování a doplňků), např. pro h po částech spojitou funkci, platí, že

$$E(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u) \cdot f_X(u)\ du\ .$$

Je ještě jiný způsob, jak spočítat totéž (ovšem pouze za předpokladu, že veličina $Y = h(X)$ má hustotu f_Y !!! - a to velmi často nastat nemusí):

$$E(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} u \cdot f_{h(X)}(u)\ du\ .$$

Zatímco ale druhý ze způsobů vyžaduje znalost (a existenci) hustoty $f_{h(X)}$, tak první způsob můžeme použít pro (absolutně) spojitou veličinu X vždy.

Připomenutí: Jestliže máme dvě náhodné veličiny $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$, pak zobrazení

$$(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$$

nazýváme náhodný (dvousložkový) vektor.

Tedy náhodnému výsledku ω (tj. elementárnímu jevu) přiřadíme dvojici hodnot $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Např. vybranému člověku z množiny lidí Ω přiřadíme jeho tělesnou výšku a hmotnost.

Náhodný vektor (X, Y) opět umí přenést a vytvořit rozdělení pravděpodobnosti na $\mathbb{R}^2$ - a to tak, že každá "rozumná" množina $A \subseteq \mathbb{R}^2$ (např. otevřená množina nebo interval atd.) bude mít prostě pravděpodobnost

$$P_{(X,Y)}(A) := P\Big((X, Y)^{-1}(A)\Big)\ .$$

Rozdělení této pravděpodobnosti $P_{(X,Y)}$ na $\mathbb{R}^2$ můžeme opět úplně popsat pokud známe pravděpodobnosti jen některých speciálních intervalů a ty nám definují tzv. *sdruženou distribuční funkci* $F_{(X,Y)} : \mathbb{R}^2 \to \langle 0, 1\rangle$ jako

$$F_{(X,Y)}(a, b) := P(X \le a, Y \le b)$$

Pojem nezávislosti pro jevy umožňuje přirozeně definovat nezávislost veličin:

Definice: Veličiny X a Y jsou nezávislé $\Leftrightarrow$ $P(X \in I, Y \in J) = P(X \in I) \cdot P(Y \in J)$ pro libovolné intervaly $I, J \subseteq \mathbb{R}$.

Věta: X a Y jsou nezávislé $\Leftrightarrow$ $F_{(X,Y)}(a, b) = F_X(a) \cdot F_Y(b)$ pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$.

Definice: Náhodný vektor (X, Y) má *diskrétní rozdělení* $\Leftrightarrow$ existuje $A \subseteq \mathbb{R}^2$, která je konečná nebo spočetná a taková, že $P((X, Y) \in A) = 1$. (tedy vektor má nejvýše spočetně mnoho "zajímavých" hodnot)

V tomto případě pak rozdělení vektoru (X, Y) popisuje *sdružená pravděpodobnostní funkce* $p_{(X,Y)} : \mathbb{R}^2 \to \langle 0, +\infty)$ definovaná jako

$$p_{(X,Y)}(a, b) := P(X = a, Y = b)$$

a platí

$$F_{(X,Y)}(a,b) = P(X \le a, Y \le b) = \sum_{\substack{u \le a \\ t \le b}} p_{(X,Y)}(u,t) \ .$$

7.3 (náhodný vektor - diskrétní)
Diskrétní náhodný vektor (X,Y) má sdruženou pravděpodobnostní funkci $p_{X,Y}$ dánu tabulkou:

$p_{X,Y}(x,y)$: y / x	0	1	2
0	1/6	1/9	1/9
1	1/9	2/9	0
2	1/6	0	1/9

(a) Stanovte pravděpodobnost $P(\frac{1}{2} \le X \le 3 \ \& \ Y \ge 1)$.

(b) Určete rozdělení veličiny $Z = X - Y$.

(c) Určete marginální rozdělení veličin X a Y.

(d) Zjistěte, zda X a Y jsou nezávislé. Pokud ne, popište rozdělení náhodného vektoru (X', Y') se stejnými marginálními rozděleními, jehož složky jsou nezávislé veličiny.

(e) Vypočtěte korelaci $\varrho(X,Y)$.

Řešení:
Na začátku bychom si měli pro pořádek ještě ověřit, že součet všech pravděpodobností v tabulce je $= 1$ (pokud by byl např. < 1, pak nemáme úplnou informaci o rozdělení a nemůžeme dál pokračovat).

(a) Zřejmě

$$P\left(\frac{1}{2} \le X \le 3 \ \& \ Y \ge 1\right) = P\Big((X,Y) \in \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}\Big) = \frac{2}{9} + 0 + 0 + \frac{1}{9} = \frac{1}{3} \ .$$

(b) U veličin X a Y předpokládáme obory hodnot určené tabulkou (ostatní hodnoty mohou být také případně nabyty, ale s nulovou pravděpodobností). Hodnoty z veličiny $Z = X - Y$ si pro přehlednost zapíšeme také do tabulky

$z(x,y) = x - y$: y / x	0	1	2
0	0	-1	-2
1	1	0	-1
2	2	1	0

a pravděpodobnostní funkce p_Z vznikne nasčítáním pravděpodobností pro jednotlivé případy

$$p_Z(z) = P(X - Y = z) = \sum_{\substack{x-y=z \\ x,y \in \mathbb{R}}} \underbrace{P(X = x, \ Y = y)}_{p_{X,Y}(x,y)} = \begin{cases} \frac{1}{9} & , \ z = -2 \\ \frac{1}{9} + 0 = \frac{1}{9} & , \ z = -1 \\ \frac{1}{6} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{2} & , \ z = 0 \\ \frac{1}{9} + 0 = \frac{1}{9} & , \ z = 1 \\ \frac{1}{6} & , \ z = 2 \\ 0 & , \ \text{jinak.} \end{cases}$$

(c) Marginální pravděpodobnostní funkce p_X a p_Y (tj. pravděpodobnostní funkce jednotlivých složek vektoru) jsou

$$p_X(i) = P(X = i) = P(X = i, Y \in \mathbb{R}) = \sum_{j\in\mathbb{R}} P(X = i, Y = j) = \sum_{j\in\mathbb{R}} p_{X,Y}(i,j)$$

$$p_Y(j) = P(Y = j) = \cdots = \sum_{i\in\mathbb{R}} p_{X,Y}(i,j)$$

a jejich hodnoty tudíž získáme sečtením pravděpodobností v řádcích (p_X) a sloupcích (p_Y) naší tabulky:

$X \backslash Y$	0	1	2	p_X
0	1/6	1/9	1/9	7/18
1	1/9	2/9	0	1/3
2	1/6	0	1/9	5/18
p_Y	4/9	1/3	2/9	

(d) Veličiny X a Y jsou nezávislé právě když

$$F_{X,Y}(i,j) = F_X(i) \cdot F_Y(j) \quad \text{pro všechna} \quad (i,j) \in \mathbb{R}^2$$

což je v případě existence sdružené hustoty ekvivalentní podmínce

$$p_{X,Y}(i,j) = p_X(i) \cdot p_Y(j) \quad \text{pro všechna} \quad (i,j) \in \mathbb{R}^2 \ .$$

Protože v našem případě např. $p_{X,Y}(0,0) = \frac{1}{18} \neq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = p_X(0) \cdot p_Y(0)$, tak X a Y jsou závislé.

Nechť (X', Y') je nyní náhodný vektor s nezávislými složkami takovými, že $p_{X'} = p_X$ a $p_{Y'} = p_Y$. Pak pro jeho pravděpodobnostní funkci máme $p_{X',Y'}(i,j) = p_{X'}(i) \cdot p_{Y'}(j)$ a můžeme ji tak popsat následující tabulkou:

$X' \backslash Y'$	0	1	2	$p_{X'}$
0	$\frac{4}{9} \cdot \frac{7}{18} = \frac{14}{81}$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{7}{18} = \frac{7}{54}$	$\frac{2}{9} \cdot \frac{7}{18} = \frac{7}{81}$	7/18
1	$\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$	$\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$	1/3
2	$\frac{4}{9} \cdot \frac{5}{18} = \frac{10}{81}$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{18} = \frac{5}{54}$	$\frac{2}{9} \cdot \frac{7}{18} = \frac{7}{81}$	5/18
$p_{Y'}$	4/9	1/3	2/9	

(e) Korelace je dána jako

$$\varrho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)} \cdot \sqrt{D(Y)}} = \frac{E\Big(\big(X - EX\big) \cdot \big(Y - EY\big)\Big)}{\sqrt{E\Big(\big(X - EX\big)^2\Big)} \cdot \sqrt{E\Big(\big(Y - EY\big)^2\Big)}} =$$

$$= \frac{E(XY) - E(X) \cdot E(Y)}{\sqrt{E(X^2) - E(X)^2} \cdot \sqrt{E(Y^2) - E(Y)^2}} \ .$$

Spočítáme jednotlivé střední hodnoty (můžeme si pomoci i součinem matic):

$$E(X) = 0 \cdot \frac{7}{18} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{5}{18} = \frac{8}{9}$$

$$E(X^2) = 0^2 \cdot \frac{7}{18} + 1^2 \cdot \frac{1}{3} + 2^2 \cdot \frac{5}{18} = \frac{13}{9}$$

$$E(Y) = 0 \cdot \frac{4}{9} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$$

$$E(Y^2) = 0^2 \cdot \frac{4}{9} + 1^2 \cdot \frac{1}{3} + 2^2 \cdot \frac{2}{9} = \frac{11}{9}$$

$$E(XY) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{R}^2} ij \cdot p_{X,Y}(i,j) = (0,1,2) \cdot \begin{pmatrix} 1/6 & 1/9 & 1/9 \\ 1/9 & 2/9 & 0 \\ 1/6 & 0 & 1/9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= (1,2) \cdot \begin{pmatrix} 2/9 & 0 \\ 0 & 1/9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}$$

Korelace tedy je

$$\varrho(X,Y) = \frac{E(XY) - E(X)\cdot E(Y)}{\sqrt{E(X^2) - E(X)^2} \cdot \sqrt{E(Y^2) - E(Y)^2}} = \frac{\frac{2}{3} - \frac{8}{9}\cdot\frac{7}{9}}{\sqrt{\frac{13}{9} - (\frac{8}{9})^2} \cdot \sqrt{\frac{11}{9} - (\frac{7}{9})^2}} =$$

$$= -\frac{1}{5}\sqrt{\frac{2}{53}} \doteq -0.0389 \; .$$

Pro připomenutí:

Na (reálném) vektorovém prostoru všech náhodných veličin s konečnou střední hodnotou a konečným rozptylem (které ztotožníme, pokud se rovnají s pravděpodobností 1) zavádíme skalární součin

$$X \bullet Y := E(XY)$$

a *normu* $\|X\|$ (neboli "délku"vektoru X) přirozeně zadanou jako $\|X\| := \sqrt{X \bullet X} = \sqrt{E(X^2)}$.

Korelace je pak dána pomocí vztahu

$$\varrho(X,Y) := \frac{(X - EX) \bullet (Y - EY)}{\|X - EX\| \cdot \|Y - EY\|}$$

tedy jako kosinus úhlu α mezi složkami $X - EX$ a $Y - EY$ veličin X a Y (kde složky $X - EX$ a $Y - EY$ jsou v prostoru všech veličin s nulovou střední hodnotou).

Úhel $\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$ mezi našimi náhodnými veličinami $X - EX$ a $Y - EY$ je tedy

$$\arccos\big(\varrho(X,Y)\big) \doteq \arccos(-0.0389) \doteq 92,23^\circ \; .$$

Praktické použití korelace:

Pokud máme dvě veličiny X a Y takové, že

- výchylka veličiny X od jejího průměru je nezáporná právě když výchylka Y zase od jejího průměru je také nezáporná,

pak dostaneme nezápornou korelaci.

Neboli platí: Jestliže

$$X - EX \geq 0 \;\Leftrightarrow\; Y - EY \geq 0 \quad \Big(\text{což implikuje, že} \quad \big(X - EX)(Y - EY\big) \geq 0\Big)$$

pak je $\varrho(X,Y) \geq 0$.

Obdobně platí: Jestliže

$$X - E(X) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; Y - E(Y) \leq 0$$

pak je $\varrho(X,Y) \leq 0$.

Ačkoliv zpětné implikace v obou případech neplatí, přesto nám korelace umožňuje nějakým způsobem zachytit jistou míru kauzální závislosti dvou veličin.

7.4 (náhodný vektor - diskrétní)

Diskrétní náhodný vektor (X,Y) má sdruženou pravděpodobnostní funkci $p_{X,Y}$ dánu tabulkou:

$p_{X,Y}(x,y)$: y / x	0	1	2
-1	$1/8$	0	$1/8$
0	0	$1/4$	$1/4$
1	$1/8$	$1/8$	0

Určete:

(a) pravděpodobnost $P(X+Y>1)$.

(b) rozdělení veličiny $Z = X^2 \cdot Y$.

(c) marginální pravděpodobnostní funkce p_X a p_Y náhodných veličin X a Y.

(d) zda jsou náhodné veličiny X a Y závislé či nezávislé. Pokud nejsou, popište rozdělení náhodného vektoru (X', Y') se stejnými marginálními rozděleními, jehož složky jsou nezávislé veličiny.

(e) koeficient korelace $\varrho(X,Y)$.

Řešení:

Postup je analogický jako v **7.5**.

(a) Máme

$$X + Y > 1 \quad \Leftrightarrow \quad (X,Y) \in \{(0,2),(1,1),(1,2)\}$$

a tedy

$$P\,(X+Y>1) = P\Big((X,Y) \in \{(0,2),(1,1),(1,2)\}\Big) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + 0 = \frac{3}{8}\,.$$

(b) U veličin X a Y předpokládáme obory hodnot určené tabulkou (ostatní hodnoty mohou být také případně nabyty, ale s nulovou pravděpodobností). Hodnoty z veličiny $Z = X^2 \cdot Y$ si pro přehlednost zapíšeme také do tabulky

$z(x,y) = x^2 \cdot y$: y / x	0	1	2
-1	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2

a pravděpodobnostní funkce p_Z vznikne nasčítáním pravděpodobností pro jednotlivé případy

$$p_Z(z) = P(X^2 \cdot Y = z) = \sum_{\substack{x^2 \cdot y = z \\ x,y \in \mathbb{R}}} \underbrace{P(X = x,\ Y = y)}_{p_{X,Y}(x,y)} = \begin{cases} \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} & , z = 0 \\ 0 + \frac{1}{8} = \frac{1}{8} & , z = 1 \\ \frac{1}{8} + 0 = \frac{1}{8} & , z = 2 \\ 0 & , \text{jinak.} \end{cases}$$

(c) Marginální pravděpodobnostní funkce p_X a p_Y (tj. pravděpodobnostní funkce jednotlivých složek vektoru) získáme pro jednotlivé hodnoty sečtením pravděpodobností v řádcích (p_X) a sloupcích (p_Y) naší tabulky:

$X \backslash Y$	0	1	2	p_X
-1	1/8	0	1/8	1/4
0	0	1/4	1/4	1/2
1	1/8	1/8	0	1/4
p_Y	1/4	3/8	3/8	

(d) V tabulce se vyskytla nulová pravděpodobnost, konkrétně

$$p_{X,Y}(4,2) = 0 \neq \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8} = p_X(4) \cdot p_Y(2)$$

takže X a Y jsou závislé.

Nechť (X', Y') je nyní náhodný vektor s nezávislými složkami takovými, že $p_{X'} = p_X$ a $p_{Y'} = p_Y$. Pak pro jeho pravděpodobnostní funkci máme $p_{X',Y'}(i,j) = p_{X'}(i) \cdot p_{Y'}(j)$ a můžeme ji tak popsat následující tabulkou:

$X' \backslash Y'$	0	1	2	$p_{X'}$
-1	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$	$\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{32}$	$\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{32}$	1/4
0	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$	$\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{16}$	$\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{16}$	1/2
1	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$	$\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{32}$	$\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{32}$	1/4
$p_{Y'}$	1/4	3/8	3/8	

(e) Spočítáme korelaci X a Y:

$$E(X) = (-1) \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} = 0$$
$$E(X^2) = (-1)^2 \cdot \frac{1}{4} + 0^2 \cdot \frac{1}{2} + 1^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$
$$E(Y) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{8}$$
$$E(Y^2) = 0^2 \cdot \frac{1}{4} + 1^2 \cdot \frac{3}{8} + 2^2 \cdot \frac{3}{8} = \frac{15}{8}$$

$$E(XY) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{R}^2} ij \cdot p_{X,Y}(i,j) = (-1)\cdot 2 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{8} = -\frac{1}{8}$$

Korelace tedy je

$$\varrho(X,Y) = \frac{E(XY) - E(X)\cdot E(Y)}{\sqrt{E(X^2) - E(X)^2} \cdot \sqrt{E(Y^2) - E(Y)^2}} = \frac{-\frac{1}{8} - 0 \cdot \frac{9}{8}}{\sqrt{\frac{1}{2} - 0^2} \cdot \sqrt{\frac{15}{8} - (\frac{9}{8})^2}} =$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{39}} \doteq -0.2264 \doteq \arccos(103,09^\circ) \ .$$

Úhel mezi náhodnými veličinami $X - E(X)$ a $Y - E(Y)$ je pak $103,09^\circ$.