14. cvičení z PSI

8. ledna 2020

14.1 (maximálně věrohodné odhady)

Markovův řetězec má dva stavy 1 a 2. Pravděpodobnost přechodu ze stavu 1 do stavu 2 je p, pravděpodobnost přechodu ze stavu 2 do stavu 1 je q. Z pozorované posloupnosti stavů

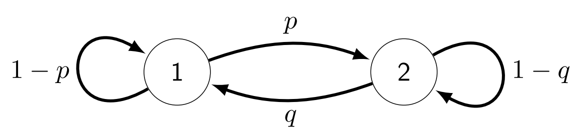
$$(1, 2, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$$

odhadněte parametry p, q.

Řešení:

Cvičení 3.3: `http://cmp.felk.cvut.cz/~navara/stat/MarkovCvic_print.pdf`

Markovovův řetězec má graf



a matici přechodu

$$\mathbb{P} = (p_{ij})_{i,j\in\{1,2\}} = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}.$$

Nechť n_{ij} jsou naměřené četnosti přechodu ze stavu i do j v naměřené posloupnosti stavů $(i_0, i_1, \ldots, i_k)$. Věrohodnostní funkce je pak tvaru

$$L(p,q) = P(X_0 = i_0,\ X_1 = i_1,\ \ldots, X_k = i_k) = P(X_0 = i_0) \cdot \prod_{\ell=0}^{k-1} p_{i_\ell, i_{\ell+1}} =$$
$$= P(X_0 = i_0) \cdot \underbrace{(1-p)^{n_{11}} \cdot p^{n_{12}}}_{=L_1(p)} \cdot \underbrace{q^{n_{21}} \cdot (1-q)^{n_{22}}}_{=L_2(q)}$$

Jestliže budeme předpokládat, že $P(X_0 = i_0) \neq 0$ (jinak bychom neměli co zjišťovat, protože všechny možnosti by byly stejně věrohodné), pak je jasné, že maxima bude dosaženo, pokud budou maximalizovány obě funkce L_i každá v dané proměnné.

Stačí tedy zjistit, kdy obecně nabývá maxima funkce

$$L(\alpha) := (1-\alpha)^n \cdot \alpha^m$$

pro proměnnou $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$. Po zlogaritmovaní a zderivovaní máme

$$\lambda(\alpha) = \ln(L(\alpha)) = n\ln(1-\alpha) + m\ln\alpha$$

$$0 = \lambda'(\alpha) = -\frac{n}{1-\alpha} + \frac{m}{\alpha} = \frac{m - \alpha(n+m)}{(1-\alpha)\alpha} \quad\Leftrightarrow\quad \alpha = \frac{m}{n+m}$$

Pro původní $L(p,q)$ pak dostaneme maximum pro $p = \frac{n_{11}}{n_{11}+n_{12}}$ a $q = \frac{n_{22}}{n_{21}+n_{22}}$.

Pro naše zadání

$$(1, 2, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$$

a odpovídající tabulku n_{ij}:

$i \diagdown j$	1	2
1	7	3
2	3	2

dostaneme tedy nejvěrohodnější matici přechodu tvaru

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \frac{7}{7+3} & \frac{3}{7+3} \\ \frac{3}{3+2} & \frac{2}{3+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

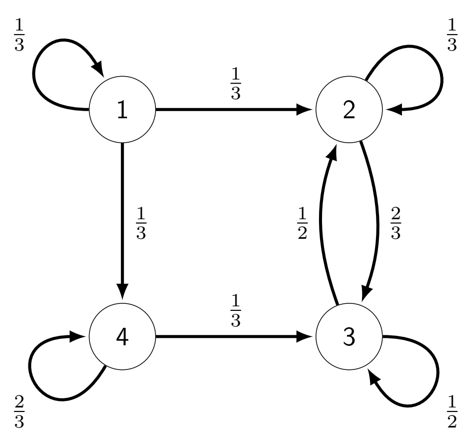
Tento výsledek je i heuristicky očekávatelný, protože pokud jsme např. ze stavu 1 šli 7-krát do stavu 1 a 3-krát do stavu 2, pak přirozeně nejlepší poměr mezi $1-p$ a p je $(1-p) : p = 7 : 3$, neboli $p = \frac{3}{7+3}$.

14.2 (maximálně věrohodné odhady)
Odhadněte stav i Markovova řetězce s maticí přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

z pozorované posloupnosti stavů $(1, i, i, 3)$.

Řešení:
Pro větší názornost si nakreslíme diagram:



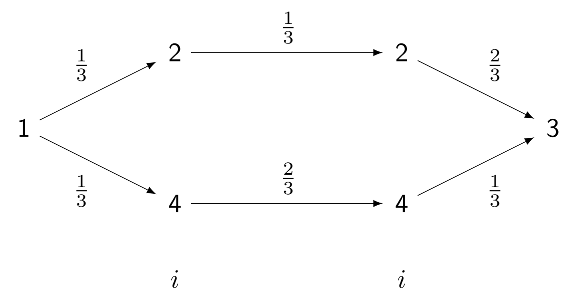
Stav odhadneme pomocí maximální věrohodnosti

$$L(i) = P\Big(X_0 = 1,\ X_1 = i,\ X_2 = i,\ X_3 = 3\Big).$$

V našem případě tak máme

$$L(i) = P(X_0 = 1) \cdot p_{1,i} \cdot p_{i,i} \cdot p_{i,3}\ .$$

Hodnotu počáteční pravděpodobnosti $c := P(X_0 = 1)$ sice neznáme, ale ani jí nepotřebujeme k výpočtu (za předpokladu, že byla nenulová). Abychom zjistili, který stav i vůbec přichází (pro nenulovou věrohodnost) v úvahu, nakreslíme následující obrázek všech možných cest typu $(1, i, i, 3)$, které jsou jen dvě:



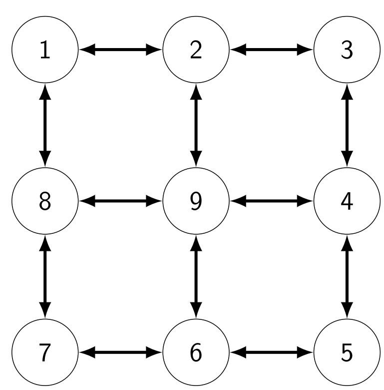
Pak snadno dostáváme:

$$
\begin{aligned}
L(2) &= c \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{2}{3} = \tfrac{2}{27} \cdot c \\
L(4) &= c \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{3} = \tfrac{2}{27} \cdot c \\
L(1) &= L(3) = 0 \ .
\end{aligned}
$$

Tedy máme dva případy největší věrohodnosti a to $i = 2$ a $i = 4$ (za předpokladu, že $P(X_0 = 1) > 0$, jinak jsou všechny čtyři stavy stejně věrohodné).

14.3 (rozdělení po mnoha krocích)

Markovův řetězec je dán obrázkem:



Pro každý stav platí, že všechny hrany z něj vycházející mají stejnou pravděpodobnost.

(a) Klasifikujte všechny stavy a stanovte všechny komponenty.

(b) Konverguje rozdělení stavů ke stacionárnímu? Za jakých podmínek? Odůvodněte.

(c) Stanovte přibližně rozdělení pravděpodobností stavů po 10^5 krocích, pokud jsme vyšli se stavu 1.

Řešení:

Příklad 3: `http://cmp.felk.cvut.cz/~navara/stat/pisemky/PST180206res.pdf`

(a) Všechny stavy jsou trvalé a tvoří jedinou komponentu (každý vrchol je propojený s každým jiným).

Komponenta má periodu $\pi = 2$: Jednak máme, že

$$\pi = \text{gcd}(\text{"délek všech uzavřených cest v komponentě"})$$

a protože v grafu je např. uzavřená cesta délky 2 musí π dělit 2 a tedy je buď $\pi = 1$ nebo $\pi = 2$. A dále, jestliže najdeme cyklický rozklad celé komponenty délky d, pak musí d dělit π. Chceme tedy pro $d = 2$ rozložit komponentů na množiny $M_1, \ldots, M_d$, které splňují, že

- uvnitř těchto množin M_i nesmějí vést mezi stavy šipky. Naopak všechny šipky z dané množiny M_i musí směrovat do množiny M_{i+1} pro $i = 1, \ldots, d-1$ a z M_d směřují zase zpět do M_1.

Tyto množiny najdeme tak, že k sobě budeme sdružovat stavy, které jsou spojeny cestami, jejichž délky jsou dělitelné d (tj. v našem případě pro $d = 2$ to jsou cesty sudé délky). Zřejmě stačí vzít množiny stavů $M_1 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ a $M_2 = \{2, 4, 6, 8\}$, které cyklický rozklad tvoří. Tedy $d = 2$ dělí π a proto je $\pi = 2$.

(b) Nějaké stacionární rozdělení existuje, ale kvůli netriviální periodě $\pi = 2$ k němu tento Markovův řetězec obecně nekonverguje (pokud se v něm právě nenachází).

(c) Jestliže na začátku vyjdeme z lichých stavů (pro nějaké rozdělení pravděpodobnosti $\mathbf{p}(0)$ na celém řetězci), pak (kvůli cyklickému rozkladu délky 2) mohou po sudém počtu kroků být nenulové pravděpodobnosti pouze opět v lichých stavech $1, 3, 5, 7, 9$.

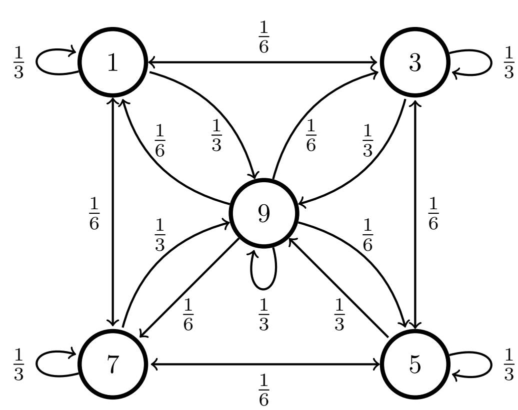
- *Nejdříve delší (ale přímější) způsob řešení:* Nechť $\mathbf{P}$ je matice přechodu řetězce. Pro velký sudý počet kroků n pak máme

  $$\mathbf{p}(n) = \mathbf{p}(0) \cdot \mathbf{P}^n = \mathbf{p}(0) \cdot (\mathbf{P}^2)^{n/2} \qquad (*)$$

  Řetězec vzniklý přechodem ke krokům délky 2 má matici přechodu $\mathbf{P}^2$ a množiny cyklického rozkladu $M_1 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ a $M_2 = \{2, 4, 6, 8\}$ tvoří komponenty tohoto nového řetězce, které už mají periodu 1 (tj. jsou ergodické a tedy každé počáteční řešení na nich konverguje k jejich jedinému stacionárnímu rozdělení).

  Protože i $n/2$ považujeme za velké, máme z výše uvedeného vztahu $(*)$, že $\mathbf{p}(n)$ bude blízké rozdělení, které je stacionární na $M_1 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ a nulové na $M_2 = \{2, 4, 6, 8\}$.

  Komponenta $M_1 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ má graf:



Šipky v tomto grafu a jejich hodnoty určíme buď z přechodové matice $\mathbf{P}^2$, nebo prostě pravděpodobnosti postupně spočítáme jako v příkladu **13.1**(b) s využitím toho, že stavy $1, 3, 5, 7$ jsou (díky symetrii původního grafu) na tom z hlediska šipek stejně.

Nyní tedy hledáme stacionární rozdělení $\mathbf{p}' = (p_1, p_3, p_5, p_7, p_9)$ na $M_1 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Stačí ho vlastně jen uhádnout a to díky symetriím. Můžeme ho předpokládat ve tvaru

$$\mathbf{p}' = (a, a, a, a, b),$$

přičemž samozřejmě je

$$a, b > 0 \quad \text{a} \quad 4a + b = 1 \ .$$

Po jednom kroku (na tomto novém grafu) pak bude např. ve vrcholu 3 hodnota pravděpodobnosti

$$a = p_3 = \frac{1}{3}a + \frac{1}{6}a + \frac{1}{6}a + \frac{1}{6}b = \frac{2}{3}a + \frac{1}{6}b \ .$$

Z těchto dvou rovnic už dostaneme $a = \frac{1}{6}$ a $b = \frac{1}{3}$.

Tedy po 10^5 krocích bude rozdělení pravděpodobností na původním řetězci přibližně tvaru

$$\mathbf{p}(n) \doteq (p_1, \ldots, p_9) = \left(\frac{1}{6}, 0, \frac{1}{6}, 0, \frac{1}{6}, 0, \frac{1}{6}, 0, \frac{1}{3}\right) \ .$$

- *Jednodušší alternativní řešení:* O jeden krok dříve (tj. po $10^5 - 1$ krocích) jsou možné jen stavy $2, 4, 6, 8$. Rozdělení pravděpodobnosti na $M_2 = \{2, 4, 6, 8\}$ bude opět blízké stacionárnímu rozdělení na této ergodické komponentě. To můžeme zdůvodnit vztahem

$$\mathbf{p}(n-1) = \mathbf{p}(0) \cdot \mathbf{P}^{n-1} = \underbrace{(\mathbf{p}(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{P})}_{=\mathbf{p}_1} \cdot \mathbf{P}^{n-2} = \mathbf{p}_1 \cdot (\mathbf{P}^2)^{\frac{n-2}{2}}$$

kde $\mathbf{p}(1)$ má nulové hodnoty na M_1, takže se v rámci něho nacházíme pouze ve zbývající množině M_2, a číslo $\frac{n-2}{2}$ opět považujeme za velké.

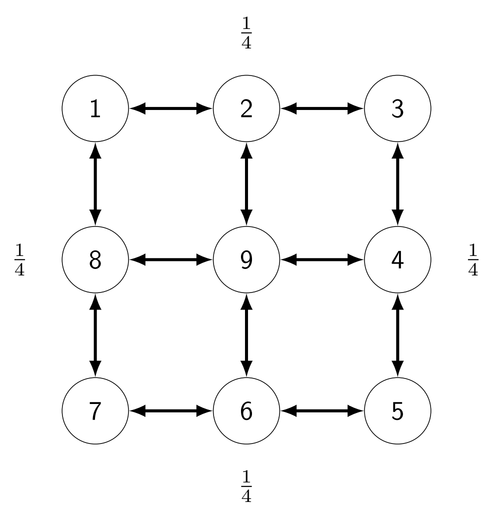
Díky symetrii bude na komponentě $M_2 = \{2, 4, 6, 8\}$ stacionární řešení tvaru

$$\mathbf{p}'' = (p_2, p_4, p_6, p_8) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}) \ .$$

Tedy máme přibližně

$$\mathbf{p}(n-1) \doteq (0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, 0) \ .$$

Když si zakreslíme pravděpodobnosti do grafu



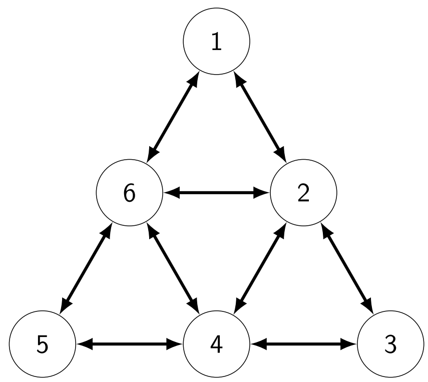
a uděláme jeden krok, získáme např. ve stavu 1 pravděpodobnost $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$. Díky symetrii budou stejné pravděpodobnosti i pro stavy $3, 5, 7$ a pro stav 9 to pak jen dopočítáme jako $1 - 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

Tedy opět máme

$$\mathbf{p}(n) \doteq \left(\frac{1}{6}, 0, \frac{1}{6}, 0, \frac{1}{6}, 0, \frac{1}{6}, 0, \frac{1}{3}\right) .$$

14.4 (rozdělení po mnoha krocích)

Markovův řetězec je dán obrázkem:



Pro každý stav platí, že všechny hrany z něj vycházející mají stejnou pravděpodobnost.

(a) Klasifikujte všechny stavy a stanovte všechny komponenty.

(b) Vypočtěte pravděpodobnost přechodu ze stavu 1 do stavu 4 v právě třech krocích.

(c) Stanovte rozdělení pravděpodobností stavů po 1000 krocích, pokud jsme vyšli ze stavu 1.

(d) Konverguje rozdělení stavů ke stacionárnímu?

Řešení:

Příklad 3: `http://cmp.felk.cvut.cz/~navara/stat/pisemky/PST180116res.pdf`

(a) Všechny stavy jsou trvalé a tvoří jedinou komponentu (každý vrchol je propojený s každým jiným).

Komponenta má periodu $\pi = 1$: Protože v grafu jsou např. uzavřené cesty délek 2 a 3, máme

$$\pi = \gcd(\text{"délek všech uzavřených cest v komponentě"}) = \gcd(2, 3, \dots) = 1 .$$

(b) Cesta vedoucí z 1 do 4 délky tři (a jejich pravděpodobnosti) jsou jen tyto:

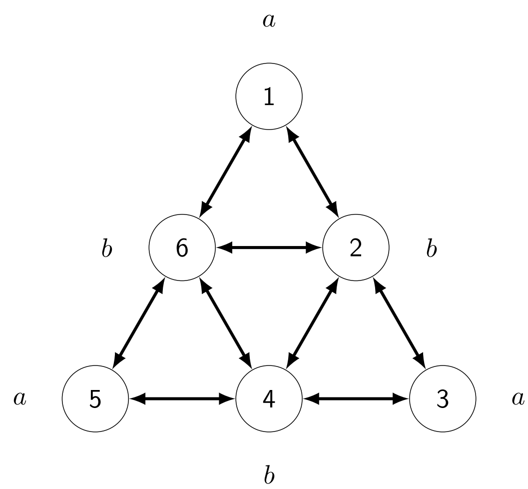
$$P(1 \to 2 \to 3 \to 4) = P(1 \to 6 \to 5 \to 4) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

$$P(1 \to 2 \to 6 \to 4) = P(1 \to 6 \to 2 \to 4) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{32}$$

a celková pravděpodobnost je tedy

$$P(\underbrace{1 \to \cdot \to \cdot \to 4}_{\text{3 kroky}}) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{3}{16} .$$

(c)+(d) Řetězec je ergodický (tj. má jedinou neperiodickou komponentu), takže každé počáteční rozdělení konverguje ke stacionárnímu, které můžeme považovat za přibližné rozdělení po 1000 krocích. Zbývá ho jen najít. Opět využijeme symetrie grafu (stavy $1, 3, 5$ budou mít stejnou hodnotu $a > 0$ a stavy $2, 4, 6$ budou mít stejnou hodnotu $b > 0$):



přičemž musí platit, že $3a + 3b = 1$. Po jednom kroku pak např. pro stav 1 získáme hodnotu $\frac{1}{4}b + \frac{1}{4}b$, která se musí opět rovnat původní hodnotě a, tj. $b/2 = a$. Z těchto dvou rovností pak už snadno dostaneme stacionární řešení tvaru

$$\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right),$$

které odhaduje rozdělení stavů po 1000 krocích.

14.5 (aplikace Markovových řetězců, asymptotické pravděpodobnosti stavů)

Alice trefí terč s pravděpodobností $1/3$, Bob s pravděpodobností $1/2$. Pokud hráč zasáhne terč, střílí dále, pokud mine, je na řadě druhý hráč. Začíná Alice. Alice vyhrává, pokud trefí terč $2\times$ za sebou, Bob vyhrává, pokud trefí terč $3\times$ za sebou. Pro oba hráče stanovte pravděpodobnosti výhry.

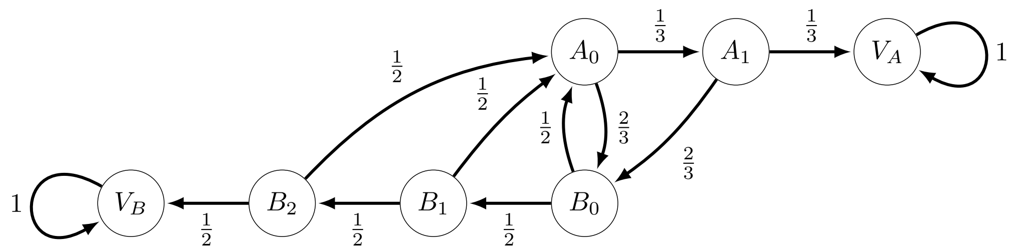
Řešení:

Cvičení 2.6: `http://cmp.felk.cvut.cz/~navara/stat/MarkovCvic_print.pdf`

Pokud bychom rozlišovali nejen to, který hráč je na řadě, ale i kolik již má úspěšných pokusů, potřebovali bychom 7 stavů:

- V_A - vyhrála Alice,
- V_B - vyhrál Bob,
- A_i - Alice má právě za sebou i úspěšných pokusů $i \in \{0, 1\}$,
- B_i - Bob má právě za sebou i úspěšných pokusů $i \in \{0, 1, 2\}$.

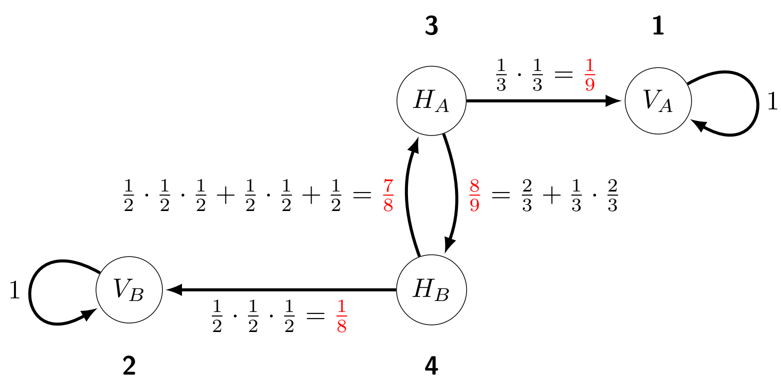
Odpovídající diagram by byl tento:



Protože nás zajímají pouze pravděpodobnosti výhry obou hráčů, můžeme si situaci popsat jednodušším způsobem a to tak, že rozlišíme pouze stavy:

- V_A - vyhrála Alice,
- V_B - vyhrál Bob,
- H_A - na řadě je Alice,
- H_B - na řadě je Bob,

kde celou sérii úspěšných pokusů daného hráče považujeme za jeden krok. Tento krok pak končí výhrou hráče s pravděpodobností $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ pro Alici, $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ pro Boba, nebo se na řadu dostává druhý hráč:



Stavy si opět očíslujeme tak, aby první byly ty absorpční a teprve po nich následovali ty přechodné:

$1 := V_A$ (vyhrála Alice), $2 := V_B$ (vyhrál Bob), $3 := H_A$ (na řadě je Alice), $4 := H_B$ (na řadě je Bob).

pravděpodobnosti výher Alice a Boba opět zjistíme z asymptotického rozdělení pravděpodobnosti $\boldsymbol{p}(\infty)$ s počátečním rozdělením

$$\boldsymbol{p}(0) = (0, 0, 1, 0) \ .$$

Je tedy opět potřeba spočítat $\mathbf{P}^\infty$ pro matici přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/9 & 0 & 0 & 8/9 \\ 0 & 1/8 & 7/8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{pmatrix},$$

kde

$$\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1/9 & 0 \\ 0 & 1/8 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 8/9 \\ 7/8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Fundamentální matice tohoto řetězce je

$$\mathbf{F} = \big(\mathbf{I}_2 - \mathbf{Q}\big)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -8/9 \\ -7/8 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = (9/2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 8/9 \\ 7/8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/2 & 4 \\ 63/16 & 9/2 \end{pmatrix}$$

a tedy

$$\big(\mathbf{I}_2 - \mathbf{Q}\big)^{-1}\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 9/2 & 4 \\ 63/16 & 9/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/9 & 0 \\ 0 & 1/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 7/16 & 9/16 \end{pmatrix}.$$

Celkem tedy dostaneme

$$\mathbf{P}^{\infty} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \big(\mathbf{I}_2 - \mathbf{Q}\big)^{-1}\mathbf{R} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 7/16 & 9/16 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a asymptotické rozdělení tak je

$$\boldsymbol{p}(\infty) = \boldsymbol{p}(0) \cdot \mathbf{P}^{\infty} = (0,0,1,0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 7/16 & 9/16 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (1/2, 1/2, 0, 0) \ .$$

Zjistili jsme tak (vcelku překvapivě), že pravděpodobnosti výhry Alice i Boba jsou stejné (a sice $\frac{1}{2}$), pokud bude začínat Alice jako první.

Poznámka: Uvažujme následující obecnější případ. Pro $n, m, a, b \in \mathbb{N}$ předpokládejme, že

- Alice má pravděpodobnost zásahu $\frac{1}{n}$ a k výhře musí mít sérii a úspěšných pokusů a podobně
- Bob má pravděpodobnost zásahu $\frac{1}{m}$ a k výhře musí mít sérii b úspěšných pokusů a dále, že
- $\left(\frac{1}{n}\right)^a < \left(\frac{1}{m}\right)^b$ a proto opět necháme začít Alici.

Kdybychom opět chtěli, aby Alice a Bob měli stejné šance na výhru, zjistíme, že to nastane právě když bude platit

$$n^a - m^b = 1 \ .$$

V rámci teorie čísel se řešeními této rovnice zabýval Eugène Charles Catalan a v roce 1844 vyslovil hypotézu (tzv. Catalan's conjecture), že jediné řešení této rovnice v kladných přirozených číslech je právě jen $3^2 - 2^3 = 1$. Hypotézu potvrdil Preda Mihăilescu v roce 2002.

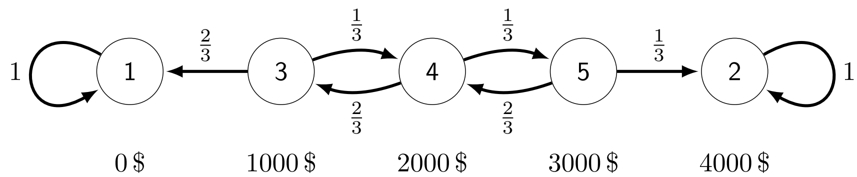
14.6 (aplikace Markovových řetězců, asymptotické pravděpodobnosti stavů)

Alice hraje v kasinu hru, kde s pravděpodobností 1/3 vyhraje. V každém kole vsadí 1000 dolarů. V případě výhry získá 1000 dolarů, v případě prohry o 1000 dolarů přijde. Alice odejde z kasina, jestliže prohraje všechny své peníze nebo bude mít 4000 dolarů. Jaká je pravděpodobnost, že Alice odejde s prázdnou, měla-li na začátku 3000 dolarů?

Řešení:

Příklad 3: `http://cmp.felk.cvut.cz/~navara/psi/pisemky/PSI150106res.pdf`

Nakreslíme si příslušný orientovaný graf:



Pro Alici uvažujme stavy

1 - odchází s prázdnou, 2 - má 4000 dolarů (a tedy odchází), 3 - má 1000 dolarů, 4 - má 2000 dolarů a 5 - má 3000 dolarů.

Stavy jsme si očíslovali tak, aby první byly ty absorpční a teprve po nich následovali ty přechodné. Na začátku má Alice 3000 dolarů, tedy je ve stavu číslo 5 a počáteční rozdělení pravděpodobnosti tak je

$$\boldsymbol{p}(0) = (0,0,0,0,1) \ .$$

pravděpodobnost, že Alice odejde s prázdnou odpovídá složce pro stav 1 v asymptotickém rozdělení pravděpodobnosti $\boldsymbol{p}(\infty)$.

Proč tomu tak je: Platí:

- (Podmíněná) pravděpodobnost $P\big(\underbrace{i \to \cdots \to j}_{n \text{ kroků}}\big)$ toho, že se po *právě* n krocích ze stavu i přesuneme do stavu j je
$$P\big(\underbrace{i \to \cdots \to j}_{n \text{ kroků}}\big) = \Big(\mathbf{P}^n\Big)_{i,j} \ .$$
To se snadno ukáže indukcí.
- Jestliže i_* je *absorpční* stav, pak (podmíněná) pravděpodobnost $P\big(\underbrace{i \to \cdots \to i_*}_{\leq n \text{ kroků}}\big)$ toho, že se po *nejvýše* n krocích ze stavu i přesuneme do stavu i_* je
$$P\big(\underbrace{i \to \cdots \to i_*}_{\leq n \text{ kroků}}\big) = P\big(\underbrace{i \to \cdots \to i_*}_{n \text{ kroků}}\big) = \Big(\mathbf{P}^n\Big)_{i,i_*} \ .$$
To je proto, že jakoukoliv posloupnost kratší než n můžeme nastavit opakovaným přidáním stavu i_* (protože je absorpční).
- Jestliže i_* je *absorpční* stav, pak (podmíněná) pravděpodobnost $P\big(\underbrace{i \to \cdots \to i_*}_{\text{konečně kroků}}\big)$ toho, že se po *konečně* mnoha krocích ze stavu i přesuneme do stavu i_* je
$$P\big(\underbrace{i \to \cdots \to i_*}_{\text{konečně kroků}}\big) = P\Big(\bigcup_n \underbrace{i \to \cdots \to i_*}_{\leq n \text{ kroků}}\Big) = \lim_{n\to\infty} P\Big(\underbrace{i \to \cdots \to i_*}_{\leq n \text{ kroků}}\Big) = \lim_{n\to\infty} \Big(\mathbf{P}^n\Big)_{i,i_*} = \Big(\mathbf{P}^\infty\Big)_{i,i_*} \ .$$

A protože $\boldsymbol{p}(\infty) = \boldsymbol{p}(0) \cdot \mathbf{P}^\infty$, můžeme tento závěr ekvivalentně vyjádřit přes rozdělení pravděpodobnosti.

Pro výpočet asymptotického rozdělení pravděpodobnosti si opět zapíšeme matici přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{pmatrix},$$

kde

$$\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Opět si určíme matici

$$\mathbf{P}^\infty := \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ (\mathbf{I}_3 - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{R} & \mathbf{0} \end{pmatrix} .$$

Spočítáme fundamentální matici $\mathbf{F} = \big(\mathbf{I}_3 - \mathbf{Q}\big)^{-1}$:

$$\Big(\mathbf{I}_3 - \mathbf{Q} \;\Big|\; \mathbf{I}_3\Big) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & -1/3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \cdots \sim$$

$$\sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 6 & 9 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right) = \Big(\mathbf{I}_3 \;\Big|\; \big(\mathbf{I}_3 - \mathbf{Q}\big)^{-1}\Big) .$$

Tedy

$$\mathbf{F} = \big(\mathbf{I}_3 - \mathbf{Q}\big)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 0 \\ -2/3 & 1 & -1/3 \\ 0 & -2/3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 6 & 9 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

a

$$\big(\mathbf{I}_3 - \mathbf{Q}\big)^{-1}\mathbf{R} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 6 & 9 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 14 & 1 \\ 12 & 3 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} .$$

Celkem tedy dostaneme

$$\mathbf{P}^\infty = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 14/15 & 1/15 & 0 & 0 & 0 \\ 12/15 & 3/15 & 0 & 0 & 0 \\ 8/15 & 7/15 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pravděpodobnost, že Alice vše prohraje, pokud na začátku měla 3000 dolarů, nyní odpovídá hodnotě

$$\Big(\mathbf{P}^\infty\Big)_{5,1} = \frac{8}{15} .$$

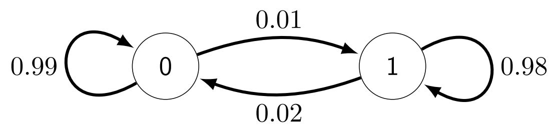
14.7 (asymptotické pravděpodobnosti)

Při obnovování paměti přepisujeme binární informaci, přičemž s pravděpodobností 1% přepíšeme 0 jako 1, s pravděpodobností 2% přepíšeme 1 jako 0. Jaké bude rozdělení pravděpodobností po velkém počtu kroků?

Řešení:

Cvičení 2.10: `http://cmp.felk.cvut.cz/~navara/stat/MarkovCvic_print.pdf`

Příslušný řetězec popíšeme grafem



kde $\mathbf{p} = (a, 1-a)$ představuje stacionární rozdělení (přitom je $0 < a < 1$). Po jednom kroku ve stavu 0 pak dostaneme pravděpodobnost $0.99a + 0.02(1-a)$, která musí ze stacionarity být opět rovná původní hodnotě a, tj.

$$0.99a + 0.02(1-a) = a$$

neboli $0.02 = 0.03a$ a tudíž $a = \frac{2}{3}$. Stacionární řešení je proto $\mathbf{p} = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

14.8 (maximálně věrohodné odhady)
Znaky (A, B, C) jsou permutací stavů $(1, 2, 3)$ Markovova řetězce s maticí přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

Všechny stavy mají na počátku stejnou pravděpodobnost.

(a) Odhadněte tuto permutaci z pozorované posloupnosti znaků $(B, C, C, C, A, A, B, A, C)$.

(b) Mějme nyní permutaci, která měla v části (a) největší věrohodnost. Posloupnost znaků z části (a) skončila ve stavu C. Najděte její nejpravděpodobnější pokračování z následujících možností (první uvedený stav C je počátečním stavem této posloupnosti):

(i) (C, A, C, C, B),
(ii) (C, C, C, B, A),
(iii) (C, B, A, A, C).

Řešení:
Příklad 3: `http://cmp.felk.cvut.cz/~navara/stat/pisemky/PST180123res.pdf`

Pravděpodobnost počátečního stavu není dána, nebudeme ji uvažovat a budeme počítat jen s pravděpodobnostmi přechodu.

a) Permutací je sice 6, ale 0 v pozici $(3, 3)$ znamená, že stav 3 se nemůže opakovat; musí mu tedy odpovídat znak B. Zbývají dvě možnosti.

(1) Pokud je $A = 1$ a $C = 2$, pak pozorovaná posloupnost je $(3, 2, 2, 2, 1, 1, 3, 1, 2)$ a její věrohodnost je

$$p_{32}\, p_{22}\, p_{22}\, p_{21}\, p_{11}\, p_{13}\, p_{31}\, p_{12} = 0.5 \cdot 0.8 \cdot \mathbf{0.8} \cdot 0.1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 0.5 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3^3} \cdot 0.016 \doteq 0.000\,59\,.$$

(2) Pokud je $A = 2$ a $C = 1$, pak pozorovaná posloupnost je $(3, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 2, 1)$ a její věrohodnost je

$$p_{31}\, p_{11}\, p_{11}\, p_{12}\, p_{22}\, p_{23}\, p_{32}\, p_{21} = 0.5 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 0.8 \cdot \mathbf{0.1} \cdot 0.5 \cdot 0.1 = \frac{1}{3^3} \cdot 0.002 \doteq 0.000\,074\,.$$

Věrohodnější je případ 1, $A = 1$, $C = 2$. Protože jsme potřebovali jen porovnat věrohodnosti, nemuseli jsme je vyčíslit a stačilo se podívat na činitele, v nichž se liší (vyznačeny tučně).

b) Po rozkódování dle části a) máme porovnat věrohodnosti následujících posloupností:

(a) $(2, 1, 2, 2, 3)$:
$$p_{21}\, p_{12}\, p_{22}\, p_{23} = 0.1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0.8 \cdot 0.1 = \frac{1}{3} \cdot 0.008 \doteq 0.002\,67\,.$$

(b) $(2, 2, 2, 3, 1)$:
$$p_{22}\, p_{22}\, p_{23}\, p_{31} = 0.8 \cdot 0.8 \cdot 0.1 \cdot 0.5 = 0.032\,.$$

(c) $(2, 3, 1, 1, 2)$.
$$p_{23}\, p_{31}\, p_{11}\, p_{12} = 0.1 \cdot 0.5 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \cdot 0.05 \doteq 0.005\,56\,.$$

Nejvěrohodnějším pokračováním je varianta 2.

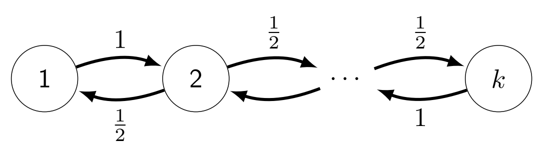
14.9 (maximálně věrohodné odhady)

Markovův řetězec má stavy $1, 2, ..., k$, pro $k \geq 3$. V každém kroku lze ze současného stavu i přejít pouze do sousedního (tj. $i - 1$ nebo $i + 1$, pokud daný sousední stav existuje), a to se stejnou pravděpodobností (tj. 1, pokud existuje jen jeden a 1/2, pokud existují oba). Během 4 kroků se změnil stav z 1 na 3. Pro jaké k model nejlépe vyhovuje tomuto pozorování?

Řešení:

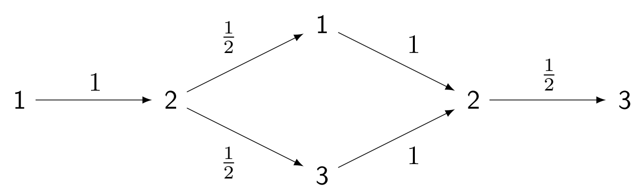
Příklad 3: `http://cmp.felk.cvut.cz/~navara/stat/pisemky/PST190110res.pdf`

Graf má tento tvar (kde chybějící hodnota u spodní šipky závisí na tom, jaké bude k):



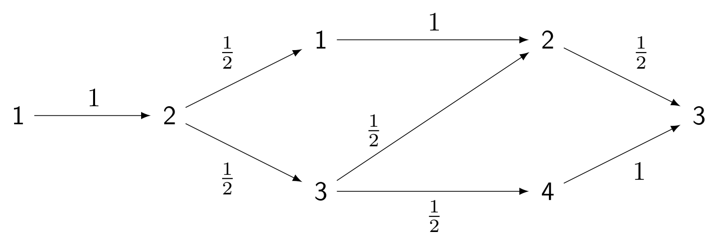
K výpočtu hodnot věrohodnosti lze použít tyto diagramy cest délky čtyři, které jdou ze stavu 1 do stavu 3:

$k = 3:$



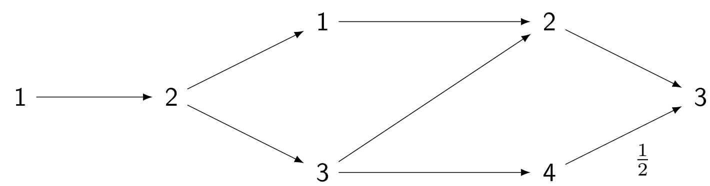
Věrohodnost pro $k = 3$ je $2 \cdot (1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.

$k = 4:$



Věrohodnost pro $k = 4$ je $1 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1) = \frac{5}{8}$.

$k \geq 5$:



Zde pro $k \geq 5$ jsou zakresleny jen ty hodnoty u šipek, ve kterých se liší od případu $k = 4$. Protože tato hodnota je nižší než u případu $k = 4$, mají případy $k \geq 5$ menší věrohodnost než případ $k = 4$.

Porovnáním vidíme, že nejvěrohodnější případ je $k = 4$.