1. cvičení z PST

20. - 24. září 2021

Uvažujme výběr z n různých předmětů, které vybíráme k-krát. Počet všech jednotlivých možností pro různé způsoby výběru uvádí následující tabulka:

Výběr	bez vracení (bez opakování)	s vracením (s opakováním)
uspořádaný (variace)	$n(n-1)\cdots(n-k+1)$	n^k
neuspořádaný (kombinace)	$\binom{n}{k}$	$\binom{n+k-1}{k}$

Odpovídající variace (příp. kombinace) se označují jako “k-té třídy z n prvků”.

1.1 (kombinace s opakováním)

Ukažte, že počet všech kombinací s opakováním k-té třídy z n prvků je roven počtu všech nezáporných celočíselných řešení $(x_1, \ldots, x_n)$ rovnice

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$$

a že tento počet je právě $\binom{n+k-1}{k}$.

Řešení:

Dané řešení $(x_1, \ldots, x_n)$ můžeme jednoznačně vyjádřit také tak, že pro k nerozlišitelných koulí a n různých přihrádek bude x_i znamenat počet koulí v i-té přihrádce.

Tato situace odpovídá kombinacím bez opakování (máme n druhů prvků v dostatečném množství a vybíráme z nich k prvků, při výběru přitom rozlišujeme vždy, jen kolik je od kterého druhů prvků).

Rozdělení koulí do přihrádek můžeme zakódovat pomocí $n-1$ nerozlišitelných přepážek a k nerozlišitelných koulí. To ale odpovídá permutacím s opakováním (pro dva druhy předmětů). Celkový počet řešení tak je kombinační číslo

$$\binom{n-1+k}{k} = \frac{(n-1+k)!}{(n-1)! \cdot k!} = \binom{n-1+k}{n-1}.$$

1.2 (variace s opakováním)

Kolik různých slov můžeme vytvořit přeskupením písmen slov:

(a) MISSISSIPPI,

(b) ANANAS,

(c) PROBLÉM (kde písmena B a R nestojí vedle sebe)?

Řešení:

Jde o permutace s opakováním. Pro n prvků, z nichž

- k_1 je 1. druhu, k_2 je 2. druhu atd. až k_ℓ je ℓ-tého druhu,
- přičemž $k_1 + \cdots + k_\ell = n$ a prvky stejného druhu jsou navzájem nerozlišitelné,

je počet všech uspořádaných n-tic roven $\frac{n!}{k_1!\cdots k_\ell!}$.

(a) Písmeno M se vyskytuje 1×, písmeno I pak 4×, písmeno S také 4× a písmeno P máme 2×. Počet znaků ve slově je $1+4+4+2=11$. Počet různých slov je tedy

$$\frac{11!}{1!\cdot 4!\cdot 4!\cdot 2!} = \frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 2} = 11\cdot 10\cdot 9\cdot 7\cdot 5 = 34650\ .$$

(b) Podobně jako v (a): Písmeno A se vyskytuje 3×, písmeno N pak 2× a písmeno S máme 1×. Počet znaků ve slově je $3+2+1=6$. Počet různých slov je tedy

$$\frac{6!}{3!\cdot 2!\cdot 1!} = 5\cdot 4\cdot 3 = 60\ .$$

(c) Jednodušší je zjistit počet zbylých slov, tj. těch, kde písmena B a R *stojí* vedle sebe, a odečíst je od počtu všech přesmyček původního slova. Skupinu slov B a R budeme považovat za jeden nedělitelný prvek, který se může vyskytovat ve 2! různých stavech: BR nebo RB. Budeme tedy permutovat 6 prvků: P, O, L, É, M a X (kde X={B, R}). Počet slov, kde písmena B a R *stojí* vedle sebe je tak $2!\cdot 6!$.

Počet slov, kde písmena B a R *nestojí* vedle sebe tudíž bude

$$7! - 2!\cdot 6! = 5\cdot(6!) = 3600\ .$$

1.3 (variace bez opakování)

Na jedné poličce je náhodně rozestavěno 10 knih. Jaká je pravděpodobnost, že 3 určité knihy jsou postaveny vedle sebe?

Řešení:
Podobně jako v předchozím příkladu budeme dané 3 knihy považovat za jednu nedělitelnou skupinu. Dostaneme tak 8 prvků. V rámci nedělitelné skupiny máme 3! možností. Počet příznivých (tj. požadovaných) rozestavení je proto

$$3!\cdot 8! = 241\,920\ .$$

Počet všech (libovolných) rozestavení je 10!. Pravděpodobnost tedy je

$$p = \frac{\text{“}\textit{počet příznivých možností}\text{”}}{\text{“}\textit{počet všech možností}\text{”}} = \frac{3!\cdot 8!}{10!} = \frac{1}{5\cdot 3} \doteq 0.067\ .$$

1.4 (variace s opakováním)

Kolika různými způsoby může sportovec rozmístit 10 různých pohárů do 5 polic, jestliže se na každou polici vejde všech 10 pohárů?

Řešení:
Dané rozestavení můžeme jednoznačně vyjádřit také tak, že k 10 různým pohárům přidáme 4 ($=5-1$) navzájem nerozlišitelné přepážky, a budeme uvažovat permutace $10+4=14$ prvků s opakováním. V

rámci tohoto "zakódování", ty poháry, které stojí *před* 1. přepážkou půjdou do 1. police, ty *mezi* 1. a 2. přepážkou do druhé police atd.

Počet všech různých rozmístění tak je

$$\frac{14!}{1! \cdots 1! \cdot 4!} = \frac{14!}{4!} = 3\,632\,428\,800 \doteq 3.6 \cdot 10^9 \ .$$

Pokud jde o numerický výpočet, můžeme ho také srovnat s přibližným *Stirlingovým* vzorcem

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

kde přibližnost znamená, že v *podíl* obou hodnot se blíží k 1 pro $n \to \infty$. Pro $n = 14$ máme

$$\frac{14!}{4!} \doteq \frac{\sqrt{2\pi 14}}{24} \left(\frac{14}{e}\right)^{14} = \frac{\sqrt{7\pi}}{12} \left(\frac{14}{e}\right)^{14} \doteq 3\,610\,875\,072 \ .$$

1.5 (kombinace bez opakování)

Kolik různých volejbalových týmu lze složit ze skupiny 15 chlapců a 6 dívek, pokud v týmu vždy hrají 4 chlapci a 2 děvčata?

Jaká je pravděpodobnost, že v náhodně vybrané skupině 6 osob (z výše uvedené skupiny chlapců a děvčat) budou alespoň 4 chlapci?

Řešení:
Každý požadovaný tým je určený množinou chlapců, kterou lze zvolit $\binom{15}{4}$ způsoby, a množinou děvčat, kterou lze zvolit $\binom{6}{2}$ způsoby. Hledaný počet týmu je tedy

$$\binom{15}{4} \cdot \binom{6}{2} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 20475 \ .$$

Dále, všech osob je $15+6 = 21$. Vybíráme 6 osob. Prostorem všech možných rovnocenných výsledků je tedy

$$\Omega = \text{“\textit{všechny neuspořádané} 6\textit{-ce utvořené z} 21 \textit{osob}”}$$

tedy, kombinace bez opakování 6-té třídy z 21 prvků. Tudíž, $|\Omega| = \binom{21}{6}$. Hledáme pravděpodobnost jevu

$$A = \text{“ 6\textit{-tice z} } \Omega\text{\textit{, které obsahují alespoň} 4 \textit{chlapce}” .}$$

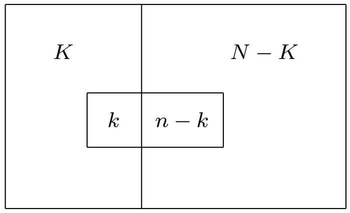
Velikost množiny A spočítáme rozdělením na 6-tice z Ω, které obsahují právě

- 4 chlapce: těch je $\binom{15}{4} \cdot \binom{6}{2}$,
- 5 chlapců: těch je $\binom{15}{5} \cdot \binom{6}{1}$,
- 6 chlapců: těch je $\binom{15}{6} \cdot \binom{6}{0}$.

Pravděpodobnost tedy je

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{15}{4} \cdot \binom{6}{2} + \binom{15}{5} \cdot \binom{6}{1} + \binom{15}{6} \cdot \binom{6}{0}}{\binom{21}{6}} \doteq 0.8016 \ .$$

Poznámka: V tomto příkladu jsme setkali s tzv. *hypergeometrickým* rozdělením.



To se objevuje tehdy, když

- z množiny, která má N prvků (zde $N = 21$),
- z nichž právě K má nějakou vlastnost $\mathcal{V}$ (zde $K = 15$ a $\mathcal{V} =$"osoba je chlapec"),
- chceme vybrat právě n prvků (zde $n = 6$)

a ptáme se, s jakou pravděpodobností bude právě k z nich mít vlastnost $\mathcal{V}$.

Tato pravděpodobnost je dána podílem příznivých možností ku všem. Příznivé jsou dány počtem způsobů jak vybrat k prvků (s $\mathcal{V}$) z K prvků (s $\mathcal{V}$) násobeno počtem způsobů jak vybrat zbytek, tj. $n - k$ prvků (bez $\mathcal{V}$) z $N - K$ prvků (bez $\mathcal{V}$). Celkem tedy

$$\frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

přičemž rozsah proměnné k je určen pomocí

$$\max\{0, n + K - N\} \leq k \leq \min\{n, K\}$$

tedy

$$0 = \max\{0, 6 + 15 - 21\} \leq k \leq \min\{6, 15\} = 6\ .$$

Tuto podmínku dostaneme ihned z nerovností

$$k \leq K, \quad n - k \leq N - K,$$

$$k \leq n, \quad n - k \leq n\ .$$

1.6 (kombinace bez opakování)

Na party se sešlo 14 studentů, z toho 8 chlapců a 6 děvčat. Jaká je pravděpodobnost, že v náhodně vybrané čtveřici osob

(a) bude právě jeden chlapec?

(b) budou alespoň dva chlapci?

Řešení:
Prostor všech možných rovnocenných výsledků je

$$\Omega = \text{“\textit{všechny neuspořádané} 4-\textit{ce utvořené ze} 14 \textit{osob}”}$$

tedy všechny 4-prvkové podmnožiny 14-ti prvkové množiny (neboli *kombinace* 4-*té třídy ze* 14 *prvků bez opakování*). Jejich počet je $|\Omega| = \binom{14}{4} = \frac{14!}{4!(14-4)!}$.

(a) Každou čtveřici z jevu

$$A = \text{“\textit{čtveřice z} } \Omega\text{\textit{, ve kterých je právě 1 chlapec}”}$$

můžeme popsat pomocí trojice děvčat, kterých je $\binom{6}{3}$, a pomocí vybraného chlapce, kterých je $\binom{8}{1} = 8$. Tudíž hledaná pravděpodobnost je

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{8}{1} \cdot \binom{6}{3}}{\binom{14}{4}} \doteq 0.16.$$

(b) Pravděpodobnost jevu

$$B = \text{“\textit{čtveřice z } } \Omega\text{\textit{, ve kterých jsou alespoň 2 chlapci}”}$$

je jednodušší spočítat pomocí doplňkového jevu

$$\overline{B} = \text{“\textit{čtveřice z } } \Omega\text{\textit{, ve kterých je nejvýše 1 chlapec}”}\ .$$

Velikost množiny $\overline{B}$ spočítáme rozdělením na čtveřice, které

- obsahují právě 1 chlapce: těch je $\binom{8}{1} \cdot \binom{6}{3}$,
- neobsahují žádného chlapce: těch je $\binom{8}{0} \cdot \binom{6}{4}$.

Pravděpodobnost tedy je

$$P(\overline{B}) = \frac{|\overline{B}|}{|\Omega|} = \frac{\binom{8}{0} \cdot \binom{6}{4} + \binom{8}{1} \cdot \binom{6}{3}}{\binom{14}{4}} = \frac{1 \cdot 15 + 8 \cdot 20}{1001} \doteq 0.1748$$

a

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) \doteq 1 - 0.1748 = 0.8252\ .$$

Opět se zde jedná o tzv. *hypergeometrické* rozdělení (viz příklad **1.4**).

1.7 (výběr bez opakování)

Jaká je pravděpodobnost, že ve skupině n lidí mají alespoň dva narozeniny ve stejný den? (Neuvažujte přestupné roky a předpokládejte, že se během celého roku děti rodí rovnoměrně.)

Řešení:
První část z předpokladů znamená, že počet všech dnů v roce pro nás bude vždy 365. Druhá část předpokladů pak znamená, že všechny dny v roce považujeme za rovnocenné. Tedy pravděpodobnost, že se daný člověk narodí v daný den v roce bude pro všechny dny stejná. To, že pracujeme se skupinou n lidí si také můžeme ekvivalentně představit tak, že máme urnu s lístky s čísly od 1 do 365 (představujícími očíslované dny v roce) a my z ní n-krát opakovaně budeme losovat čísla s tím, že lístky vždy vrátíme zpět.

Výsledky pokusu jsou tudíž uspořádané n-tice s hodnotami od 1 do 365. Tedy $\Omega = \{1, \ldots, 365\}^n$ (tj. kartézský součin množiny $\{1, \ldots, 365\}$ a to celkem n-krát, podobně jako třeba zapisujeme $\mathbb{R}^n$).

Nechť A je jev, že ve skupině n lidí mají alespoň dva narozeniny ve stejný den. Pak jev $\overline{A}$ znamená, že ve skupině n lidí má každý člověk narozeniny v jiný den. Jde tedy o variace bez opakování třídy n z 365 prvků.

$$|\Omega| = 365^n$$
$$|\overline{A}| = 365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - n + 1)$$

a tedy

$$P(\overline{A}) = \frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - n + 1)}{365^n},$$

a tudíž

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - n + 1)}{365^n}.$$

Pro zajímavost se ještě podíváme na přibližnou hodnotu této pravděpodobnosti. Pro jednoduchost označme $H = 365$. Pak máme

$$P(A) = 1 - \frac{H \cdot (H-1) \cdot \dots \cdot (H-(n-1))}{H^n} = 1 - \left(1 - \frac{1}{H}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{H}\right) =$$

$$= 1 - e^{\ln\left(1-\frac{1}{H}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{H}\right)} = 1 - e^{\sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(1-\frac{k}{H}\right)}$$

Použijeme teď lineární aproximaci funkce

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(1 - kx)$$

v bodě $x_0 = 0$, kterou pak vyčíslíme pro $x = \frac{1}{H}$, která je blízká nule, a to jako $f(x) \approx f(0) + f'(0) \cdot (x - 0)$. Tedy

$$f'(x) = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \ln(1 - kx)\right)' = -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{1 - kx}$$

$$f'(0) = -\sum_{k=1}^{n-1} k = -\frac{n(n-1)}{2}$$

a

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(1 - \frac{k}{H}\right) = f\left(\frac{1}{H}\right) \approx 0 + f'(0) \cdot \frac{1}{H} = -\frac{n(n-1)}{2H} \ .$$

Odsud máme, že

$$P(A) \doteq 1 - e^{-\frac{n(n-1)}{2 \cdot 365}}$$

a ukázku některých hodnot v tabulce:

n	23	24	25	26	27	29	50
$P(A)$	50%	53.05%	56.04%	58.95%	61.77%	67.12%	96.51%