# 1. cvičení z PST

21. září 2022

Uvažujme výběr z $n$ různých předmětů, které vybíráme $k$-krát. Počet všech jednotlivých možností pro různé způsoby výběru uvádí následující tabulka:

| Výběr | bez opakování (vracení) | s opakováním (vracením) |
|---|---|---|
| uspořádaný | $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ | $n^k$ |
| neuspořádaný | $\binom{n}{k}$ | $\binom{n+k-1}{k}$ |

Jako úvod při počítání s pravděpodobnostmi budeme uvažovat situaci, že

- $\Omega$ bude nějaká (konečná) množina všech možných výsledku (které můžeme získat) a které budeme považovat za "rovnocenné"
- jevem budeme rozumět (zatím jakoukoliv) podmnožinu $A$ množiny $\Omega$ (jev tedy představuje např. nějakou vlastnost, kterou dané výsledky obsažené v $A$ sdílí)
- jevu $A$ pak přiřadíme pravděpodobnost předpisem $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$, čímž dáváme vlastně najevo, tu "rovnocennost" výsledků, kdy pravděpodobnost daného jevu $A$ je úměrná pouze velikosti $|A|$ a nikoliv tomu, které konkretní výsledky tento jev obsahuje.

Takovéto počítání pravděpodobnosti se nazývá *Laplaceův model pravděpodobnosti* (nebo někdy jen *Laplaceova pravděpodobnost*).

**Příklad 1.1** *Házíme dvěma kostkami. Stanovte pravděpodobnost jevu*

*$A$ = "na kostkách padne součet menší než 5".*

**Řešení:**
Výsledky pokusu jsou uspořádané dvojice, kde první člen dvojice odpovídá hodu 1. kostkou a druhý člen odpovídá hodu 2. kostkou. Tedy množina všech možných výsledků je $\Omega = \{(i, j) \mid i, j = 1, \ldots, 6\}$ a vypsáno konkrétně je to:

(1,1) (1,2) (1,3) (1,4) (1,5) (1,6),
(2,1) (2,2) (2,3) (2,4) (2,5) (2,6),
(3,1) ................................ (3,6),
(4,1) ................................ (4,6),
(5,1) ................................ (5,6),
(6,1) (6,2) (6,3) (6,4) (6,5) (6,6),

tzn. počet všech možných výsledků je $|\Omega| = 36$. Jev $A$ pak představuje podmnožinu $A = \{(i, j) \in \Omega \mid i + j < 5\}$ a konkrétně je to

$$A = \big\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)\big\}$$

Počet výsledků příznivých jevu $A$ je tak $|A| = 6$. Všechny možné výsledky považujeme za stejně pravděpodobné, proto je hledaná pravděpodobnost jevu $A$ rovna $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

**Poznámka:** Předpokládejme, že v předchozím příkladu máme dvě nerozlišitelné kostky. Jestliže pak např. padnou současně čísla 1 a 2, neumíme poznat, co padlo na jaké kostce, a jako výsledek máme tedy jen *neuspořádanou* dvojici $\{1, 2\}$ (a podobně u dalších výsledků). Jestliže bychom nyní chtěli postupovat jako v předchozím příkladu, měli bychom množinu výsledků

$$\Omega' = \{\{i, j\} \mid 1 \leq i \leq j \leq 6\} ,$$

kde zápisem $\{i, j\}$ nyní (na chvíli) myslíme neuspořádanou dvojici, tj. $\Omega$ je tvořeno prvky

$$\begin{array}{rrrrrr} \{1,1\} & \{1,2\} & \{1,3\} & \{1,4\} & \{1,5\} & \{1,6\}, \\ & \{2,2\} & \{2,3\} & \{2,4\} & \{2,5\} & \{2,6\}, \\ & & \{3,3\} & \{3,4\} & \{3,5\} & \{3,6\}, \\ & & & \{4,4\} & \{4,5\} & \{4,6\}, \\ & & & & \{5,5\} & \{5,6\}, \\ & & & & & \{6,6\}, \end{array}$$

kterých je $|\Omega'| = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$. Jev "součet je menší než 5"pak bude odpovídat množině

$$A' = \{\{1, 1\}, \{1, 2\}, \{2, 2\}, \{1, 3\}\}$$

která má $|A'| = 4$ prvky. Pokud bychom nyní chtěli určit pravděpodobnost opět způsobem $P(A') = \frac{|A'|}{|\Omega'|} = \frac{4}{21}$, zjistíme, že jsme dostali jinou (dokonce větší) hodnotu než $\frac{1}{6}$ z předchozího příkladu. Který postup byl tedy správně a proč?

Problém je v druhém postupu, a sice v tom, že jsme mlčky opět předpokládali, že výsledky množiny $\Omega'$ jsou rovnocenné. To ale už nemůžeme, protože např. výsledek $\{1, 2\}$ vzniká ze dvou případů $(1, 2)$ a $(2, 1)$, zatímco výsledek $\{1, 1\}$ pouze z jednoho případu $(1, 1)$. I když tedy kostky třeba rozlišit neumíme, jsou stále dvě a každá má své výsledky (bez ohledu na naši schopnost je od sebe odlišit). Proto je také výsledek $\{1, 2\}$ dvakrát častější při skutečných fyzických hodech kostkami než výsledek $\{1, 1\}$ a měl by proto mít také dvojnásobnou pravděpodobnost (oproti výsledku $\{1, 1\}$).

Proto neuspořádané dvojice (obecněji: neuspořádané výběry) v tomto případě nemůžou sloužit jako základ pro Laplaceovu pravděpodobnost a my si nutně musíme vzít uspořádané dvojice (obecněji: uspořádané výběry). Na druhé straně i výsledky popisované neuspořádanými dvojicemi lze použít, ovšem s tím, že daná neuspořádaná dvojice bude mít pravděpodobnost úměrnou počtu jejích uspořádaných verzí, tj. např.

- $P(\{1, 1\}) = \frac{1}{36}$
- $P(\{1, 2\}) = 2 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{18}$ .

To už je obecnější model pravděpodobnosti než ten Laplaceův. Ovšem, jak je vidět, stejně se i v tomto případě vlastně z Laplaceova modelu odvozuje a z hlediska počítání je tak stejně výhodnější přejít k uspořádaným výběrům.

**Příklad 1.2** *V balíčku máme 32 karet, z toho 4 esa. Dvakrát za sebou vytáhneme náhodně jednu kartu. Stanovte pravděpodobnost jevu*

$$A = \text{“alespoň jedna z vytažených karet je eso”},$$

*jestliže po prvním tahu kartu*

*(1) vrátíme,*

*(2) nevrátíme*

*zpět do balíčku.*

**Řešení:**
(1) Výsledky pokusu jsou opět uspořádané dvojice (množina $\Omega_1$). První člen dvojice odpovídá kartě vytažené v prvním tahu a druhý člen kartě vytažené v druhém tahu. V prvním tahu můžeme kartu vytáhnout 32 způsoby. Protože vytaženou kartu vracíme zpět do urny, i v druhém tahu máme 32 možností. Počet všech možných případů je tedy $|\Omega_1| = 32^2$. Příznivým případům odpovídají tahy (libovolná karta - eso), (eso - libovolná karta), (eso - eso). Počet příznivých případů je $|A_1| = 28\cdot4+4\cdot28+4\cdot4$. Hledaná pravděpodobnost je rovna

$$P(A_1) = \frac{|A_1|}{|\Omega_1|} = \frac{28 \cdot 4 + 4 \cdot 28 + 4 \cdot 4}{32^2} = \frac{15}{64} \doteq 0.2344.$$

Jednodušeji se k výsledku můžeme dostat přes doplňkový jev

$$A_1^c = \Omega_1 \setminus A_1 = \text{“žádná z vytažených karet není eso”},$$

Pro pravděpodobnost pak platí, že

$$P(A_1^c) = \frac{|\Omega_1 \setminus A_1|}{|\Omega_1|} = \frac{|\Omega_1| - |A_1|}{|\Omega_1|} = 1 - P(A_1)$$

Počet prvků $A_1^c$ je pak (analogicky jako u $\Omega_1$) roven $28^2$, takže

$$P(A_1) = 1 - P(A_1^c) = 1 - \frac{28 \cdot 28}{32 \cdot 32} = 1 - \frac{7 \cdot 7}{8 \cdot 8} = \frac{15}{64}$$

(2) Tentokrát z uspořádaných dvojic karet musíme vyloučit ty, kde první i druhá karta jsou stejné (dostaneme tak množinu $\Omega_2$). Počet možných případů je vzhledem k tomu, že po prvním tahu kartu nevrátíme, $|\Omega_2| = 32 \cdot 31$. Příznivým případům odpovídají opět tahy (libovolná karta - eso), (eso - libovolná karta), (eso - eso). Počet příznivých případů je nyní $|A_2| = 28 \cdot 4 + 4 \cdot 28 + 4 \cdot 3$. Hledaná pravděpodobnost je rovna

$$P(A_2) = \frac{|A_2|}{|\Omega_2|} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 28 + 4 \cdot 3}{32 \cdot 31} = \frac{59}{248} \doteq 0.2379.$$

Přes doplňkový jev je to opět jednodušší:

$$A_2^c = \text{“žádná z vytažených karet není eso”},$$

$$|A_2^c| = 28 \cdot 27$$

$$P(A_2) = 1 - P(A_2^c) = 1 - \frac{28 \cdot 27}{32 \cdot 31} = \frac{59}{248}$$

Kromě toho je vidět, že pravděpodobnosti se v případech vracení (0.2344) i nevracení (0.2379) příliš neliší. Je to proto, že pokud máme velké množství $N$ (zde $N = 32$), ze kterého taháme pouze $k$-krát (zde $k = 2$), tj. ”několikrát”v porovnání s tím, jak velké množství máme, neboli $k << N$, tak pravděpodobnost, že bychom opakovaně vytáhli znovu tentýž předmět je zanedbatelná. Tudíž obě pravděpodobnosti se budou téměř shodovat.

**Příklad 1.3** *Na party se sešlo* 14 *studentů, z toho* 8 *vysokoškoláků a* 6 *středoškoláků. Jaká je pravděpodobnost, že v náhodně vybrané čtveřici budou*

*(1) všichni čtyři středoškoláci (jev $A$),*

*(2) právě jeden vysokoškolák (jev $B$),*

*(3) aspoň jeden vysokoškolák (jev $C$)?*

**Řešení:**
Prostor všech možných rovnocenných výsledků je

$$\Omega = \text{“\textit{všechny neuspořádané} 4\textit{-ce utvořené ze} 14 \textit{osob}”}$$

tedy všechny 4-prvkové podmnožiny 14-ti prvkové množiny (neboli *neuspořádaný vyber* 4 *prvku ze* 14 *prvků bez opakování*). Jejich počet je kombinační číslo $|\Omega| = \binom{14}{4} = \frac{14!}{4!(14-4)!}$.

(1) Počet všech čtveřic vytvořených pouze ze středoškoláků je $\binom{6}{4}$, tudíž hledaná pravděpodobnost je

$$P(A) = \frac{\binom{6}{4}}{\binom{14}{4}} \doteq 0.015.$$

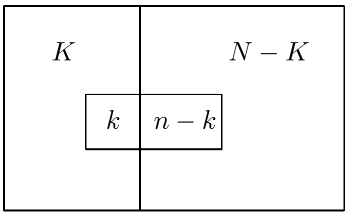
(2) Počet všech trojic vytvořených ze středoškoláků je $\binom{6}{3}$, počet všech "jednic"vytvořených z vysokoškoláků je $\binom{8}{1} = 8$. K vytvoření příznivých čtveřic je třeba všechny trojice zkombinovat se všemi "jednicemi", tudíž hledaná pravděpodobnost je

$$P(B) = \frac{\binom{8}{1} \cdot \binom{6}{3}}{\binom{14}{4}} \doteq 0.16.$$

(3) Jedná se o doplňkový jev k jevu $A$, tj. $C = A^c$, tudíž

$$P(C) = 1 - P(A) \doteq 0.985.$$

**Poznámka:** V tomto příkladu jsme setkali s tzv. *hypergeometrickým* rozdělením.




To se objevuje tehdy, když

- z množiny, která má $N$ prvků (zde $N = 14$),
- z nichž právě $K$ má nějakou vlastnost $\mathcal{V}$ (zde $K = 8$ a $\mathcal{V} =$"být vysokoškolák"),
- chceme vybrat právě $n$ prvků (zde $n = 4$)

a ptáme se, s jakou pravděpodobností bude právě $k$ z nich mít vlastnost $\mathcal{V}$.

Tato pravděpodobnost je dána podílem příznivých možností ku všem. Příznivé jsou dány počtem způsobů jak vybrat $k$ prvků (s $\mathcal{V}$) z $K$ prvků (s $\mathcal{V}$) násobeno počtem způsobů jak vybrat zbytek, tj. $n-k$ prvků (bez $\mathcal{V}$) z $N-K$ prvků (bez $\mathcal{V}$). Celkem tedy

$$\frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

přičemž rozsah proměnné $k$ je určen pomocí

$$\max\{0, n+K-N\} \leq k \leq \min\{n, K\}$$

tedy

$$0 = \max\{0, 4+8-14\} \leq k \leq \min\{4, 8\} = 4\ .$$

Tuto podmínku dostaneme ihned z nerovností

$$k \leq K, \quad n-k \leq N-K,$$

$$k \leq n, \quad n-k \leq n\ .$$

**Příklad 1.4** *Jaká je pravděpodobnost, že ve skupině $n$ lidí mají alespoň dva narozeniny ve stejný den? (Neuvažujte přestupné roky a předpokládejte, že se během celého roku děti rodí rovnoměrně.)*

**Řešení:**
První část z předpokladů znamená, že počet všech dnů v roce pro nás bude vždy 365. Druhá část předpokladů pak znamená, že všechny dny v roce považujeme za rovnocenné. Tedy pravděpodobnost, že se daný člověk narodí v daný den v roce bude pro všechny dny stejná. To, že pracujeme se skupinou $n$ lidí si také můžeme ekvivalentně představit tak, že máme urnu s lístky s čísly od 1 do 365 (představujícími očíslované dny v roce) a my z ní $n$-krát opakovaně budeme losovat čísla s tím, že lístky vždy vrátíme zpět.

Výsledky pokusu jsou tudíž uspořádané $n$-tice s hodnotami od 1 do 365. Tedy $\Omega = \{1, \ldots, 365\}^n$ (tj. kartézský součin množiny $\{1, \ldots, 365\}$ a to celkem $n$-krát, podobně jako třeba zapisujeme $\mathbb{R}^n$).

Nechť $A$ je jev, že ve skupině $n$ lidí mají alespoň dva narozeniny ve stejný den. Pak jev $A^c$ znamená, že ve skupině $n$ lidí má každý člověk narozeniny v jiný den. Jde tedy o variace bez opakování třídy $n$ z 365 prvků.

$$|\Omega| = 365^n$$

$$|A^c| = 365 \cdot 364 \cdot \cdots \cdot (365 - n + 1)$$

a tedy

$$P(A^c) = \frac{365 \cdot 364 \cdot \cdots \cdot (365 - n + 1)}{365^n},$$

a tudíž

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \cdots \cdot (365 - n + 1)}{365^n}.$$

Pro zajímavost se ještě podíváme na přibližnou hodnotu této pravděpodobnosti. Pro jednoduchost označme $H = 365$. Pak máme

$$P(A) = 1 - \frac{H \cdot (H-1) \cdot \cdots \cdot (H - (n-1))}{H^n} = 1 - \left(1 - \frac{1}{H}\right) \ldots \left(1 - \frac{n-1}{H}\right) =$$

$$= 1 - e^{\ln\left(1 - \frac{1}{H}\right) \ldots \left(1 - \frac{n-1}{H}\right)} = 1 - e^{\sum\limits_{k=1}^{n-1} \ln\left(1 - \frac{k}{H}\right)}$$

Použijeme teď lineární aproximaci funkce

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(1 - kx)$$

v bodě $x_0 = 0$, kterou pak vyčíslíme pro $x = \frac{1}{H}$, která je blízká nule, a to jako $f(x) \approx f(0) + f'(0) \cdot (x - 0)$. Tedy

$$f'(x) = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \ln(1 - kx)\right)' = -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{1 - kx}$$

$$f'(0) = -\sum_{k=1}^{n-1} k = -\frac{n(n-1)}{2}$$

a

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(1 - \frac{k}{H}\right) = f\left(\frac{1}{H}\right) \approx 0 + f'(0) \cdot \frac{1}{H} = -\frac{n(n-1)}{2H}\ .$$

Odsud máme, že

$$P(A) \doteq 1 - e^{-\frac{n(n-1)}{2 \cdot 365}}$$

a ukázku některých hodnot v tabulce:

| $n$ | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 50 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(A)$ | 50% | 53.05% | 56.04% | 58.95% | 61.77% | 96.51% |