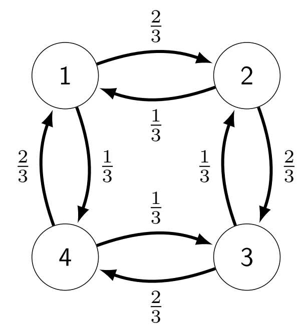
13. cvičení z PSI

14. prosince 2022

Poznámka: Postupné změny rozdělení pravděpodobnosti V Markovově řetězci během jednotlivých kroků si můžeme představovat tak, že máme k dispozici dané množství kapaliny (o objemu 1), které se přelévá mezi jednotlivými stavy. Přechodné stavy se pak vyznačují tím, že to, co z nich "odteče" do trvalých stavů, se už do nich nevrátí, takže celkové množství kapaliny v těchto stavech se postupně v limitě sníží až k nule.

13.1 Markovovův řetězec je dán grafem:



(a) Stanovte pravděpodobnosti přechodu ze stavu 1 do stavu 4 po právě 3 krocích.

(b) Popište Markovovův řetěz, který vznikne aplikováním d kroků, kde d je perioda původních stavů.

(c) Konverguje libovolné počáteční rozdělení stavů k nějakému stacionárnímu? Odůvodněte. Pokud je odpověď záporná, popište ta počáteční rozdělení, která konvergují k nějakému stacionárnímu rozdělení.

(d) Stanovte rozdělení pravděpodobností stavů po 1000 krocích, pokud jsme vyšli ze stavu 1.

Řešení:
Odpovídající matice přechodu je

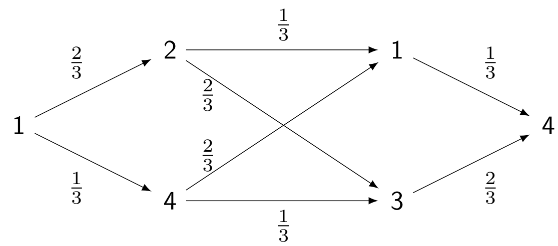
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} .$$

(a) Pravděpodobnost přechodu z 1 do 4 ve třech krocích je

$$P(X_{t+3} = 4 | X_t = 1) = (\mathbf{P}^3)_{1,4} = \sum_{i,j=1}^{4} p_{1i} p_{ij} p_{j4} .$$

Místo počítání třetí mocniny matice přechodu si můžeme pomoct diagramem všech možných cest.

Všechny cesty z 1 do 4 ve třech krocích jsou popsány takto:



Cesty jsou celkem 4, přičemž jejich pravděpodobnosti jsou:

$$P(1 \to 4 \to 3 \to 4) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$$

$$P(1 \to 4 \to 1 \to 4) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$$

$$P(1 \to 2 \to 3 \to 4) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$$

$$P(1 \to 2 \to 1 \to 4) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$$

Tedy pravděpodobnost přechodu z 1 do 4 ve třech krocích je součet těchto pravděpodobností, tedy $\frac{2}{27} + \frac{2}{27} + \frac{8}{27} + \frac{2}{27} = \frac{14}{27}$.

(b) Nejdříve určíme periodu. Všechny stavy jsou trvalé a navzájem propojené cestami. Tvoří tedy jedinou komponentu K. V komponentě mají všechny stavy stejnou periodu $d = \pi(K)$.

Její hodnotu zjistíme takto (viz postup hledání periody v "Poznámky k Markovovým řetězcům"):

$$\sup\{k \mid \textit{existuje cyklický rozklad } K \textit{ délky } k\} \;=\; d \;=\; \gcd(\textit{délky všech uzavřených cest v } K)$$

- Horní odhad hodnoty periody (pomocí délek uzavřených cest):

  Perioda d dané komponenty musí dělit délku libovolné uzavřené cesty (vedoucí v této komponentě). Při letmém zkoušení cest nacházíme v grafu uzavřené cesty sudé délky a dokonce určitě máme uzavřenou cestu délky 2. Tedy

  $$d \;=\; \gcd(\textit{délky všech uzavřených cest v } K) \;\leq\; \gcd(2) = 2$$

  Musí tudíž být buď $d = 1$ nebo $d = 2$.

- Dolní odhad hodnoty periody (pomocí cyklických rozkladů):

  Vypadá to tedy, že perioda by měla být 2. Jestliže je perioda skutečně $d = 2$, existuje cyklický rozklad komponenty K délky 2, tj. K se rozloží na disjunktní množiny M_1 a M_2 takové, že uvnitř těchto množin M_i nesmějí vést mezi stavy šipky a naopak všechny šipky z dané množiny M_1 směřují do M_2 a šipky z M_2 zase zpět do M_1.

  Množiny M_i jsou určeny tak, že

  – stavy a a b jsou ve stejné množině M_i (pro nějaké $i = 1, 2$), jestliže jsou spojeny orientovanou cestou, jejíž délka je dělitelná dvěma.

  Naopak, jestliže takový cyklický rozklad délky 2 najdeme, bude perioda skutečně $d = 2$.

Zkusíme tedy množiny s takovýmito vlastnostmi vytvořit a to tak, že se díváme, kam se z daného stavu určitě dostaneme po sudém počtu kroků. Zřejmě stačí vzít množiny stavů $\{1, 3\}$ a $\{2, 4\}$, které cyklický rozklad tvoří. Neboli

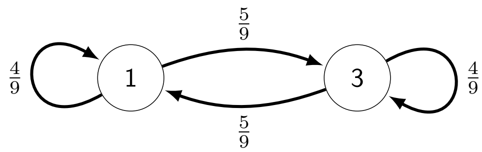
$$2 \leq \sup\{k \mid \textit{existuje cyklický rozklad } K \textit{ délky } k\} \;=\; d \leq 2$$

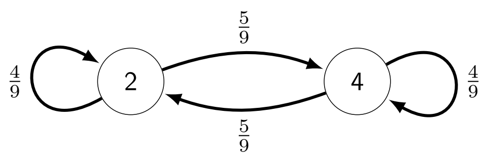
tedy opravdu je $d = 2$.

Řetězec M' daný aplikováním $d = 2$ kroků je určený maticí $\mathbf{P}^2$ a rozpadne se tak na komponenty, které jsou tvořeny množinami cyklického rozkladu, tj. množinami $M_1 = \{1, 3\}$ a $M_2 = \{2, 4\}$, z nichž každá bude mít periodu 1.

Máme:

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/9 & 0 & 5/9 & 0 \\ 0 & 4/9 & 0 & 5/9 \\ 5/9 & 0 & 4/9 & 0 \\ 0 & 5/9 & 0 & 4/9 \end{pmatrix}.$$





Počítání s maticemi si můžeme ušetřit, když si uvědomíme, že díky symetrii původního řetězce stačí určit hodnoty šipek jen u jednoho z vrcholů. Tedy např. stačí určit jen pravděpodobnost přechodu ze stavu 1 do stavu 1 po právě $d = 2$ krocích (což můžeme udělat způsobem jako v části (a)).

(c) Řetězec je sice nerozložitelný (tj. má jen jednu komponentu), ale není ergodický (protože má periodu větší než 1). Tedy ne každé počáteční rozdělení (např. $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0\right)$) konverguje ke stacionárnímu $\mathbf{p}_{stac} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, které známe z minula. Zřejmě totiž

$$\left(\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}, 0\right) \cdot \mathbf{P} = \left(0, \tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}\right)$$

$$\left(0, \tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}\right) \cdot \mathbf{P} = \left(\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}, 0\right)$$

takže tato dvě rozdělení $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0\right)$ a $\left(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ oscilují navzájem mezi sebou (tj. stále přeskakujeme mezi množinami M_1 a M_2). Když např. začínáme ve stavech množiny $\{1, 3\}$, pak v sudém počtu kroků se budeme opět nacházet v množině $\{1, 3\}$ (a v lichém počtu kroků v množině $\{2, 4\}$). Vidíme, že tato dvě rozdělení NEKONVERGUJÍ ke stacionárnímu rozdělení.

Ke stacionárnímu rozdělení z bodu (d) konvergují pouze taková počáteční rozdělení $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4)$, pro která "objem kapaliny" v M_1 je stejný jako "objem kapaliny" v M_2 (tj. je roven $\frac{1}{2}$), tedy $p_1 + p_3 = \frac{1}{2} = p_2 + p_4$.

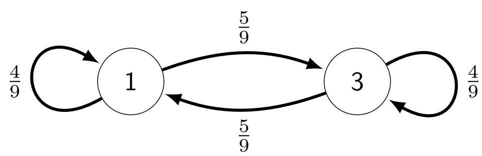
Důkaz: Že je to nutná podmínka, je zřejmé z toho, že objemy kapalin mezi M_1 a M_2 se při jednom kroku jen vyměňují a po dvou krocích se tak objem kapaliny v M_i nemění. Pro stacionární rozdělení jsou tyto objemy rovny $\frac{1}{2}$. Pokud tedy máme konvergenci, musí být objem v M_i roven $\frac{1}{2}$.

Že je to postačující podmínka, naopak plyne z toho, že po dvou krocích (viz část (b)) tvoří množiny M_i komponenty "zkráceného řetězce" M' a mají periodu 1, tedy každé počáteční rozdělení (na tomto "zkráceném" řetězci M') konverguje ke stacionárnímu.

Řetězec M' má už dvě komponenty. Počáteční podmínka $p_1 + p_3 = \frac{1}{2}$ a $p_2 + p_4 = \frac{1}{2}$ vyjadřuje, že každá z komponent M' obsahuje právě $\frac{1}{2}$ objemu kapaliny. Protože se tento objem rozdělí v limitě na dané komponentě rovnoměrně (tj. na $\frac{1}{4}$ a $\frac{1}{4}$), konverguje dané počáteční rozdělení k stacionárnímu rozdělení $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

Toto platí jak pro všechny sudé kroky původního řetězce M, tak pro všechny liché kroky původního řetězce M. Neboli tyto dvě vybrané posloupnosti sudých kroků a lichých kroků dávají totéž, tj. mají stejnou limitu $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, a proto skutečně máme konvergenci původní posloupnosti (v M).

(d) Když začínáme ve stavech množiny $\{1, 3\}$, pak v sudém počtu kroků se budeme opět nacházet v množině $\{1, 3\}$ (a v lichém počtu kroků v množině $\{2, 4\}$). Rozložení pravděpodobnosti po velkém sudém počtu kroků (zde 1000 je sudé) pak bude blízké stacionárnímu rozdělení na Markovově řetězci na množině $\{1, 3\}$, který vznikne z původního řetězce aplikací vždy dvou kroků (viz bod (b)):



Ze symetrie stavů 1 a 3 vyplývá, že stacionární rozdělení na těchto stavech bude mít stejné hodnoty, tj. 1/2. Výsledné rozdělení po 1000 krocích tak bude přibližně rovno $(1/2, 0, 1/2, 0)$.

13.2 Markovův řetězec má matici přechodu

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/5 & 4/5 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

(a) Klasifikujte všechny stavy.

(b) Najděte všechny uzavřené množiny stavů.

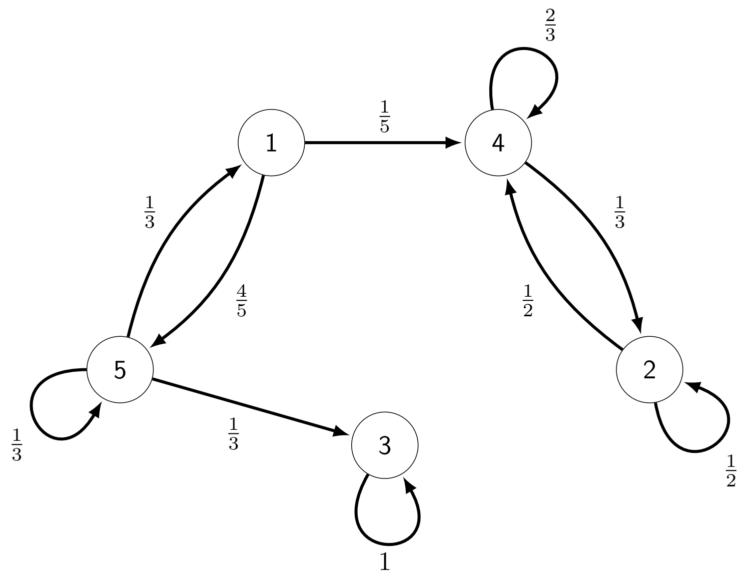
(c) Najděte všechna stacionární rozdělení pravděpodobností a posuďte, zda řetězec k některému z nich vždy konverguje.

(d) K jakému stacionárnímu rozdělení konverguje počáteční rozdělení pravděpodobnosti, jestliže vyjdeme ze stavu 1?

(e) Odhadněte stav ve výchozím čase t, víte-li, že v čase $t + 2$ byl řetězec ve stavu 2.

Řešení:

(a) Nakreslíme si příslušný orientovaný graf přiřazený této matici:



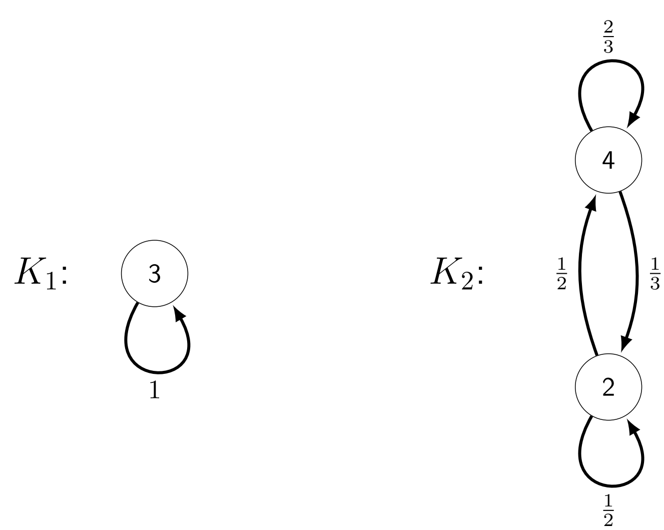
Z něj už je snadno vidět, že

- stav 3 je trvalý, dokonce absorpční (tudíž má periodu 1),
- stavy 2 a 4 jsou trvalé a tvoří jednu komponentu (s periodou 1) a
- stavy 1 a 5 jsou přechodné.

(b) Všechny uzavřené množiny trvalých stavů (tj. množiny trvalých stavů, ze kterých nevedou ven žádné šipky) jsou

$$\emptyset,\ \{3\},\ \{2,4\},\ \{2,3,4\}\ .$$

(c) Podle Věty o stacionárních rozděleních (viz Poznámky k Markovovým řetězcům), jsou všechna stacionární rozdělení na celém řetězci konvexní kombinace (jediných) stacionárních rozdělení příslušných jednotlivým komponentám (tj. takovéto rozdělení je vždy nulové mimo danou komponentu). Označme si tedy komponenty $K_1 = \{3\}$ a $K_2 = \{2,4\}$.



Pro $K_1 = \{3\}$ je příslušné stacionární řešení zřejmě $\boldsymbol{p}_1 = (0,0,1,0,0)$. Pro komponentu $K_2 = \{2,4\}$ si napíšeme matici přechodů (pro pořadí stavů $2,4$):

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

a jako v **13.3**(c) najdeme tudíž řešení $\boldsymbol{p} = (p_2, p_4)$ soustavy $(\mathbf{P}^T - \mathbf{I}_2^T) \cdot \boldsymbol{p}^T = 0$ reprezentované maticí

$$\mathbf{P}^T - \mathbf{I}_2^T = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/3 \\ 1/2 & -1/3 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tato soustava má hodnost 1, tedy má pouze $2 - 1 = 1$ lineárně nezávislých řešení, např. $(2,3)$. Po jeho "znormování" (tj. vydělení číslem $2 + 3 = 5$) pak dostaneme

$$\boldsymbol{p} = (p_2, p_4) = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right) .$$

Když toto řešení zapíšeme pro původní řetězec s pěti stavy, tak pro komponentu K_2 máme stacionární řešení $\boldsymbol{p}_2 = \left(0, \frac{2}{5}, 0, \frac{3}{5}, 0\right)$.

Každé stacionární řešení pro původní řetězec je tedy tvaru

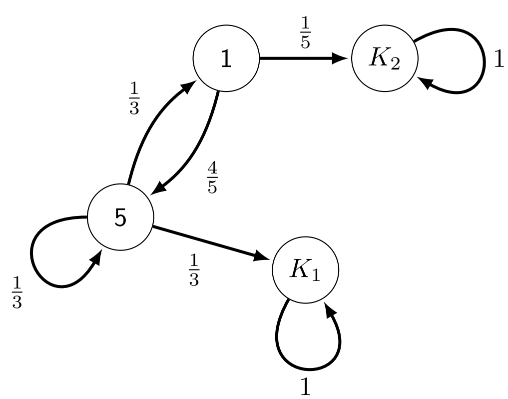
$$\boldsymbol{p}_{stac} = (1-t) \cdot \boldsymbol{p}_1 + t \cdot \boldsymbol{p}_2 = \left(0,\ \tfrac{2}{5}t,\ 1-t,\ \tfrac{3}{5}t,\ 0\right)$$

kde $0 \le t \le 1$.

Protože všechny komponenty mají periodu 1, tak libovolné počáteční řešení konverguje k nějakému stacionárnímu řešení.

(d) Předpokládejme teď, že jsme ve stavu 1. Abychom našli, ke kterému stacionárnímu rozdělení konverguje toto počáteční rozdělení, potřebujeme zjistit hodnotu t z konvexní kombinace z části (c).

K jejímu nalezení si vytvoříme nový Markovovům řetězec M', kde komponenty K_1 a K_2 nahradíme absorbčními stavy, které si označíme stejně (viz poznámky k Markovovým řetězcům).



Při pořadí stavů $K_1, K_2, 1, 5$ pak počáteční rozdělení $\widetilde{\mathbf{p}}(0) = (0,0,1,0)$ řetězce M' konverguje ke stacionárnímu rozdělení $\widetilde{\mathbf{p}}_{stac} = (1-t, t, 0, 0)$, konkrétně

$$\widetilde{\mathbf{p}}_{stac} = \widetilde{\mathbf{p}}(\infty) = \lim_{n\to\infty} \widetilde{\mathbf{p}}(n) = \lim_{n\to\infty} \widetilde{\mathbf{p}}(0) \cdot \widetilde{\mathbf{P}}^n = \widetilde{\mathbf{p}}(0) \cdot \lim_{n\to\infty} \widetilde{\mathbf{P}}^n = \widetilde{\mathbf{p}}(0) \cdot \widetilde{\mathbf{P}}^\infty$$

kde $\widetilde{\mathbf{P}}$ je matice přechodu řetězce M'. Potřebujeme tedy spočítat $\widetilde{\mathbf{P}}^\infty$ pro matici přechodu (pro pořadí stavů $K_1, K_2, 1, 5$)

$$\widetilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 4/5 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{pmatrix},$$

kde

$$\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1/5 \\ 1/3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 4/5 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Dále je

$$\left(\mathbf{I}_2 - \mathbf{Q}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4/5 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}^{-1} = \underbrace{\frac{1}{1 \cdot \frac{2}{3} - \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3}}}_{=5/2} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & 4/5 \\ 1/3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 & 2 \\ 5/6 & 5/2 \end{pmatrix}$$

Fundamentální matice tohoto řetězce je

$$\mathbf{F} = \left(\mathbf{I}_2 - \mathbf{Q}\right)^{-1}\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 5/3 & 2 \\ 5/6 & 5/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1/5 \\ 1/3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 5/6 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

Celkem tedy dostaneme

$$\widetilde{\mathbf{P}}^{\infty} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \left(\mathbf{I}_2 - \mathbf{Q}\right)^{-1}\mathbf{R} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 5/6 & 1/6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a asymptotické rozdělení tak je

$$\widetilde{\boldsymbol{p}}(\infty) = \widetilde{\boldsymbol{p}}(0) \cdot \widetilde{\mathbf{P}}^{\infty} = (0,0,1,0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 5/6 & 1/6 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (2/3, 1/3, 0, 0)\ .$$

Tudíž $(1-t, t, 0, 0) = \widetilde{\boldsymbol{p}}_{stac} = \widetilde{\boldsymbol{p}}(\infty) = (2/3, 1/3, 0, 0)$ a $t = \frac{1}{3}$.

Odpověď: Když v původním řetězci vyjdeme za stavu 1 tak se asymptoticky přiblížíme k rozdělení

$$\boldsymbol{p}_{stac} = \tfrac{2}{3} \cdot \boldsymbol{p}_{K_1} + \tfrac{1}{3} \cdot \boldsymbol{p}_{K_2} = \left(0,\ \tfrac{2}{15},\ \tfrac{2}{3},\ \tfrac{1}{5},\ 0\right)\ .$$

Alternativní (a mnohem rychlejší) postup: Jak je vidět, k nalezení hodnoty t stačí znát např. první sloupec matice $\widetilde{\boldsymbol{P}}^{\infty}$, který je tvaru $\mathbf{u} = (1, 0, 1-t, s)^T$. Místo počítání fundamentální matice můžeme využít vztahu

$$\widetilde{\boldsymbol{P}} \cdot \widetilde{\boldsymbol{P}}^{\infty} = \widetilde{\boldsymbol{P}}^{\infty}$$

ze kterého speciálně máme

$$\widetilde{\boldsymbol{P}} \cdot \mathbf{u}^T = \mathbf{u}^T$$

neboli

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1-t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1-t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{4}{5}s \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{3}(1-t) + \frac{1}{3}s \end{pmatrix}$$

Vyřešením rovnic

$$1 - t = \tfrac{4}{5}s$$

$$s = \tfrac{1}{3}\left(1 + 1 - t + s\right)$$

tak máme $t = \frac{1}{3}$ a $s = \frac{5}{6}$.

(e) Pomocí metody maximální věrohodnosti budeme hledat stavy i (může jich být i víc!), ve kterých nastává maximum funkce

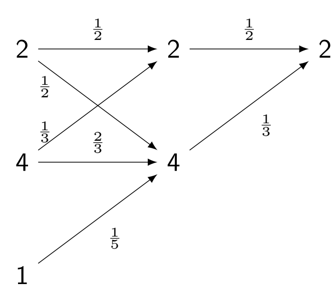
$$L(i) = P(X_t = i,\ X_{t+2} = 2)\ .$$

Hodnoty jednotlivých stavů v čase t nemáme zadány (ale mohlo by se stát, že zadány budou!). Budeme tedy předpokládat, že všechny stavy jsou na tom v té chvíli stejně (jinak bychom pochopitelně ani nemohli dál pokračovat). Tedy budeme předpokládat, že $P(X_t = 1) = \cdots = P(X_t = 5) = c = konst.$ (zřejmě je $c = \frac{1}{5}$, ale pro nás je podstatné jen to, že c je nenulové). Máme tedy

$$L(i) = P(X_t = i,\ X_{t+2} = 2) = \underbrace{P(X_t = i)}_{=c} \cdot \underbrace{P(X_{t+2} = 2|\ X_t = i)}_{=(\mathbb{P}^2)_{i2}} = c \cdot \sum_{j=1}^{5} p_{ij} \cdot p_{j2}$$

kde p_{ab} jsou hodnoty matice přechodu $\mathbb{P}$ (proč to takto funguje - viz "Poznámky k Markovovým řetězcům"). Při úpravě jsme jen využili známou rovnost $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$.

Hodnoty $L(i)$ zjistíme buď jako hodnoty ve 2. sloupci druhé mocniny matice přechodu $\mathbb{P}$ anebo (což bývá méně výpočetně náročné) si to můžeme usnadnit obrázkem, který znázorňuje všechny cesty končící ve stavu 2 o délce dvou kroků:



Dostáváme tak hodnoty

$L(1) = c \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} = c \cdot \frac{1}{15}$

$L(2) = c \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\right) = c \cdot \frac{5}{12}$

$L(3) = L(5) = 0$

$L(4) = c \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}\right) = c \cdot \frac{7}{18}$

Vidíme tedy, že nejvěrohodnější stav v čase t byl stav 2.