3. cvičení z PST

5. října 2022

Připomenutí: Geometrický pravděpodobnostní prostor je zobecněním klasického pravděpodobnostního prostoru. Množinou všech možných výsledků zde bude nějaká podmnožina $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, které jsme schopni přiřadit její n-rozměrný konečný objem a jevy budou její podmnožiny, kterým také umíme přiřadit nějaký objem. Protože vlastnost přiřazení objemu (tzv. měřitelnost) není vůbec samozřejmostí, je nutné začít uvažovat jen určité podmnožiny množiny Ω (tj. jevy) a tedy i pojem σ-algebry, který takovéto množiny vymezí. Podrobnější specifikací jevů se nebudeme zabývat. Opřeme se jen o skutečnost, že to celé funguje, pokud pracujeme s otevřenými množinami (a jejich spočetnými průniky, sjednoceními a doplňky.) Objem množiny (jevu) A budeme značit $vol(A)$.

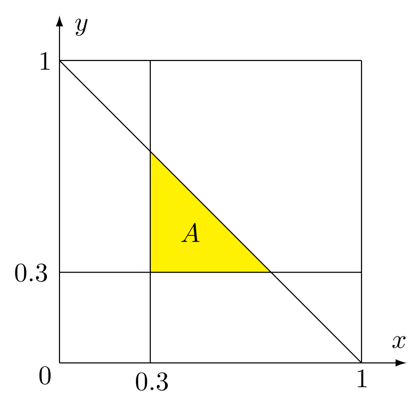
Opět (jako u klasické pravděpodobnosti) budeme považovat všechny výsledky za rovnocenné, takže pravděpodobnost jevu A nebude záviset na tvaru ani umístění množiny A uvnitř množiny Ω, ale pouze na její velikosti, takže pak je $P(A) = \frac{vol(A)}{vol(\Omega)}$.

Příklad 3.1 *Mějme dvě náhodná čísla x a y mezi 0 a 1. Jaká je pravděpodobnost, že jsou obě větší než 0.3 a zároveň jejich součet je menší než 1?*

Řešení:
Množina všech možných výsledků Ω jsou tedy dvojice čísel (x, y) z $\langle 0, 1\rangle$, tj. $\Omega = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$. Hledáme tedy pravděpodobnost jevu

$$A = \{(x, y) \in \Omega \mid x > 0.3 \ \wedge\ y > 0.3 \ \wedge\ x + y < 1\}\ .$$

Ta je dána poměrem plochy $vol(A)$ množiny A a plochy $vol(\Omega)$ množiny Ω.



Takže

$$vol(A) = \tfrac{1}{2}(0.7 - 0.3) \cdot (0.7 - 0.3) = 0.08$$

a proto je

$$P(A) = \frac{vol(A)}{vol(\Omega)} = \frac{0.08}{1} = 0.08.$$

Příklad 3.2 *Na rovnoměrnou nekonečnou čtvercovou mřížku, kde vzdálenost průsečíků je a, hodíme minci o průměru b, kde $b < a$. Jaká je pravděpodobnost, že mince protne nějakou z linek této mřížky?*

Řešení:
Všechny možné výsledky budou souřadnice (x, y) středu mince na ploše. Plocha, kterou máme k dispozici je nekonečná. Protože ale čtverce, na které je rozdělena, považujeme za rovnocenné, zvolíme si jeden z nich např.

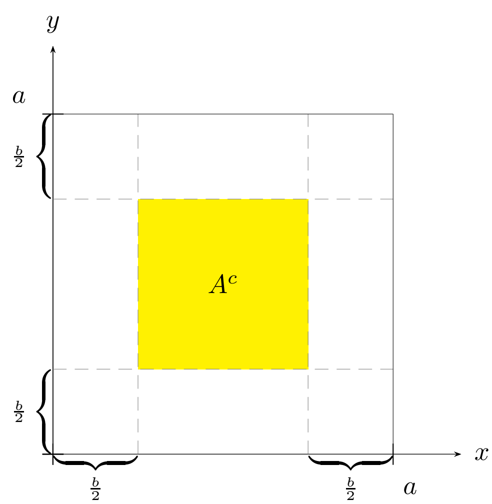
$$\Omega = \langle 0, a\rangle \times \langle 0, a\rangle$$

jako referenční, a všechny případy, kdy střed mince dopadne mimo tento čtverec, se ztotožní pomocí posunutí s případem, kdy střed mince je ve čtverci Ω. Zajímá nás tedy pravděpodobnost jevu

$$A = \text{“}\textit{mince protne hranu referenčního čtverce } \Omega\text{”} .$$

Jednodušší je popsat doplněk (viz obrázek)

$$A^c = \text{“}\textit{mince NEprotne hranu referenčního čtverce } \Omega\text{”} = \left(\tfrac{b}{2}, a - \tfrac{b}{2}\right) \times \left(\tfrac{b}{2}, a - \tfrac{b}{2}\right)$$



Takže

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{(a-b)^2}{a^2} = \frac{b}{a} \cdot \left(2 - \frac{b}{a}\right) .$$

Příklad 3.3 *Lodě A a B připlují do přístavu náhodně a nezávisle na sobě v následujících 24 hodinách. Loď A počká 2 hodiny a pak odplouvá, B počká 1 hodinu a pak odplouvá. Jaká je pravděpodobnost, že se v přístavu potkají?*

Řešení:
Označme S jev, že se dané lodě v přístavu potkají. Možné výsledky jsou časy (x, y), kdy jednotlivé lodě připlují. Takže

$$\Omega = \langle 0, 24\rangle \times \langle 0, 24\rangle$$

Loď A má dobu pobytu v přístavu v intervalu $\langle x, x + 2\rangle$ a podobně loď B má dobu pobytu v přístavu v intervalu $\langle y, y + 1\rangle$.

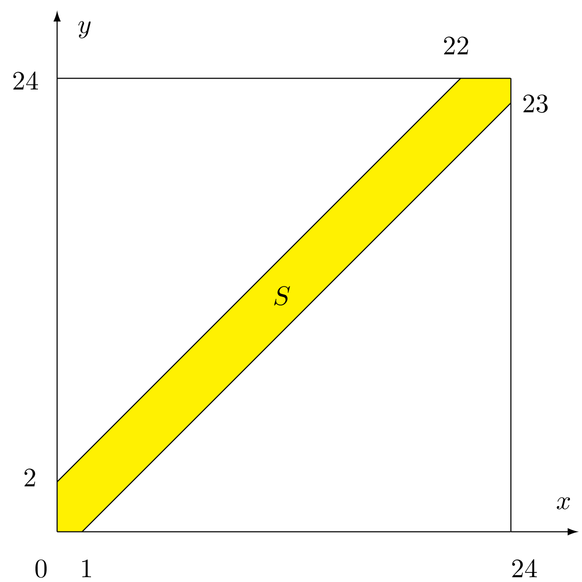
Odpovídající jev setkání je

$$S = \text{“\textit{lodě se setkají v přístavu}”} = \{(x,y) \in \Omega \mid \text{intervaly } \langle x, x+2\rangle \text{ a } \langle y, y+1\rangle \text{ mají neprázdný průnik}\} =$$

$$= \{(x,y) \in \Omega \mid x \le y+1,\ y \le x+2\}$$

Take se to dá odvodit tak, že

- pokud je $x \le y$, pak musí být $y \le x+2$,
- a pokud je $y \le x$, pak musí být $x \le y+1$.



Jednodušší je zase spočítat pravděpodobnost doplňku S^c

$$P(S) = 1 - P(S^c) = 1 - \frac{(22^2 + 23^2)/2}{24^2} \doteq 0.12.$$

Jak přirozeně definovat nezávislost jevů: Nejdříve si zavedeme podmíněnou pravděpodobnost $P(A|B)$, tj. pravděpodobnost, že nastane jev A za předpokladu, že výsledky se budou omezovat jen na jev B (také to můžeme chápat tak, že nastal jev B a my se *zpětně* ptáme, jaká byla za tohoto předpokladu pravděpodobnost jevu A). Přirozeně to bude $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$, pokud $P(B) \ne 0$.

To, že jev A nebude záviset na jevu B, si pak přirozeně určíme podmínkou $P(A|B) = P(A)$ a podobně B nebude záviset na jevu A pokud $P(B) = P(B|A)$. Takže jevy A a B budou nezávislé, pokud platí podmínky $P(A|B) = P(A)$ a $P(B) = P(B|A)$ (a také bychom ještě mohli uvažovat i nezávislost na doplňcích $P(A) = P(A|B^c)$ atd.).

Jak je ale vidět, všechny tyto podmínky odpovídají jediné rovnici $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, samozřejmě za předpokladu, že $P(A) \ne 0$ a $P(B) \ne 0$.

Proto se nezávislost jevů A a B definuje jako $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ (ať už jsou $P(A)$ nebo $P(B)$ nulové nebo ne).

Podobným způsobem dojdeme k definici pro více jevů jako:

jevy $A_1, \ldots, A_n$ jsou nezávislé právě když pro každou indexovou podmnožinu $\emptyset \neq K \subseteq \{1, \ldots, n\}$ platí

$$P\left(\bigcap_{i \in K} A_i\right) = \prod_{i \in K} P(A_i) \ .$$

Tj. pravděpodobnost libovolných průniků je součin pravděpodobností příslušných jevů. Netriviální podmínky vzniknou pro $|K| \geq 2$. Máme tak $2^n - n - 1$ podmínek.

Poznámka: Mějme n nezávislých opakování daného pokusu, jehož úspěšnost je $0 < p < 1$. Jev

$$B_k = \text{“}\textit{nastane právě } k \textit{ úspěchů v } n \textit{ pokusech”}$$

pro $k = 0, 1, \ldots, n$ má pravděpodobnost

$$P(B_k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k} \ .$$

Důvod, proč tu máme kombinační číslo, je v tom, že daných k úspěchů je rozmístěno mezi n pokusů právě $\binom{n}{k}$ způsoby.

Odvození: Vezmeme si jevy

$$A_i = \text{“}\textit{úspěch v } i\textit{-tém pokusu”}$$

Ty jsou nezávislé a mají pravděpodobnost $P(A_i) = p$. Pak jev B_k vyjádříme jako sjednocení disjunktních jevů (ty v hranaté závorce)

$$B_k = \bigcup_{\substack{K \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |K| = k}} \left[\left(\bigcap_{i \in K} A_i\right) \cap \left(\bigcap_{j \in \{1,\ldots,n\} \setminus K} A_j^c\right)\right]$$

odkud máme ihned

$$P(B_k) = \sum_{\substack{K \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |K| = k}} \left[\underbrace{\left(\prod_{i \in K} P(A_i)\right)}_{p^k} \cdot \underbrace{\left(\prod_{j \in \{1,\ldots,n\} \setminus K} P(A_j^c)\right)}_{(1-p)^{n-k}}\right] =$$

$$= \sum_{\substack{K \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |K| = k}} p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k} \ .$$

Příklad: *Pravděpodobnost výhry* 1.*hráče nad* 2.*hráčem je* 0.7. *Jaká je pravděpodobnost, že během deseti po sobě jdoucích zápasů*

(1) alespoň jednou vyhrál 2.*hráč (jev H),*

(2) maximálně dvakrát vyhrál 1.*hráč (jev I)?*

Řešení:
Jevy

$$B_k = \text{“ } 1.\textit{hráč vyhrál právě } k \textit{ z } 10 \textit{ zápasů”}$$

pro $k = 0, 1, \ldots, 10$ jsou evidentně navzájem disjunktní (tj. mají prázdné průniky neboli žádné dva nemůžou nastat současně) a mají pravděpodobnost

$$P(B_k) = \binom{10}{k} 0.7^k \cdot 0.3^{10-k} \ .$$

(a) Zde bude vhodnější přejít k doplňku a pak je

$$H^c = \text{“ } 1.\textit{hráč vyhrál všech } 10 \textit{ zápasů”} = B_{10}$$

$$P(H) = 1 - P(H^c) = 1 - P(B_{10}) = 1 - 0.7^{10} \doteq \mathbf{0.9718}.$$

(b) Jev I znamená, že

- buď vše vyhrál 2.hráč
- nebo devět her vyhrál 2.hráč a jednu 1.hráč (na pořadí hry nezáleží)
- nebo osm her vyhrál 2.hráč a dvě 1.hráč (na pořadí rovněž nezáleží).

Tedy je

$$I = B_0 \cup B_1 \cup B_2$$

a z jejich disjunktnosti máme

$$P(I) = P(B_0) + P(B_1) + P(B_2) = 0.7^{10} + \binom{10}{1} 0.3 \cdot 0.7^9 + \binom{10}{2} 0.3^2 \cdot 0.7^8 \doteq \mathbf{0.3828}.$$

Příklad 3.4 *Nezávislé jevy* A, B, C *mají po řadě pravděpodobnosti* 0.2, 0.3, 0.4. *Určete pravděpodobnost jevu* $X = (A \cup B) \cap C$.

Řešení:

Použijeme, že pokud jevy $A_1, \ldots, A_n$ jsou nezávislé, pak také jevy

- $A_1 \cup A_2, A_3, \ldots, A_n$ jsou nezávislé
- $A_1 \cap A_2, A_3, \ldots, A_n$ jsou nezávislé
- $A_1^c, A_2, A_3, \ldots, A_n$ jsou nezávislé

Nezávislé jevy tedy můžeme libovolně sdružovat nebo pronikat (daný jev vždy sjednotíme nebo pronikneme vždy jen s jednou skupinou jevů), a můžeme je libovolně převracet na jejich doplňky. Výsledek jsou opět nezávislé jevy.

Protože A, B, C jsou nezávislé, jsou i jevy $A \cup B$ a C nezávislé. Tedy máme

$$P(X) = P((A \cup B) \cap C) = P(A \cup B) \cdot P(C)$$

přičemž

$$\begin{aligned} P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) &= \\ = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)& \\ = 0.2 + 0.3 - 0.2 \cdot 0.3 = 0.44&\ , \end{aligned}$$

Celkem tak dostaneme

$$P(X) = P(A \cup B) \cdot P(C) = 0.44 \cdot 0.4 = 0.176\ .$$

Příklad 3.5 *Náhodné jevy A a B jsou nezávislé a $P(A \cup B) = 0.545$, $P(A \cap B) = 0.105$. Určete pravděpodobnosti $P(A)$, $P(B)$ a $P(A \cap B^c)$.*

Řešení:
Jestliže využijeme nezávislosti náhodných jevů A a B, pak dostaneme

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B), \qquad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Označme si $P(A) = x$ a $P(B) = y$. Pro hledané pravděpodobnosti tak dostaneme soustavu rovnic

$$0.545 = x + y - 0.105, \qquad x \cdot y = 0.105 \Rightarrow y = \frac{0.105}{x}.$$

Po dosazení do první rovnice dostaneme kvadratickou rovnici pro neznámou x ve tvaru

$$x^2 - 0.65x + 0.105 = 0 \Rightarrow x_1 = 0.35, \quad x_2 = 0.3\,.$$

Ze symetrie vztahů plyne, že je

$$P(A) = 0.35, \quad P(B) = 0.3 \qquad \text{nebo} \qquad P(A) = 0.3, \quad P(B) = 0.35\,.$$

A dále pro první z možností je

$$P(A \cap B^c) = P(A) \cdot P(B^c) = 0.35 \cdot 0.7 = 0.245$$

a pro druhou volbu řešení je

$$P(A \cap B^c) = P(A) \cdot P(B^c) = 0.3 \cdot 0.65 = 0.195\,.$$

Připomenutí: Jevy A, B a C jsou nezávislé právě když:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B), \quad P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C), \quad P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$$

a

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

přičemž žádná z těchto 4 podmínek NENÍ důsledkem zbylých třech.

Příklad 3.6 *Pro hod dvěma symetrickými mincemi uvažujme jevy*

$A =$*"na první minci padl líc",*

$B =$*"na druhé minci padl rub",*

$C =$*"na mincích padly různé výsledky".*

Jak je to s nezávislostí jevů A, B, C?

Řešení:
Prostor všech možných výsledků jsou uspořádané dvojice hodnot na jednotlivých mincích

$$\Omega : \quad \begin{array}{cc} (\text{líc}, \text{líc}) & (\text{líc}, \text{rub}) \\ (\text{rub}, \text{líc}) & (\text{rub}, \text{rub}) \end{array}$$

a každý výsledek bude stejně pravděpodobný. Pak máme $|A| = |B| = |C| = 2$ a tedy

$$P(A) = P(B) = P(C) = \tfrac{1}{2}$$

a dále

$$A \cap B = A \cap C = B \cap C = A \cap B \cap C = \{\ (\text{líc}, \text{rub})\ \}\ .$$

Tedy

$$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = P(A \cap B \cap C) = \tfrac{1}{4}\ .$$

a proto máme

$$P(A \cap B) = \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = P(A) \cdot P(B)$$

a podobně je to pro ostatní případy, zatímco

$$P(A \cap B \cap C) = \tfrac{1}{4} \neq \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C).$$

Jevy jsou tak po dvou nezávislé, ale ne celkově nezávislé.

Poznámka: Nepleťte si disjunktní jevy s nezávislými:

- A a B jsou **disjunktní** $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.
- A a B jsou **nezávislé** $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.