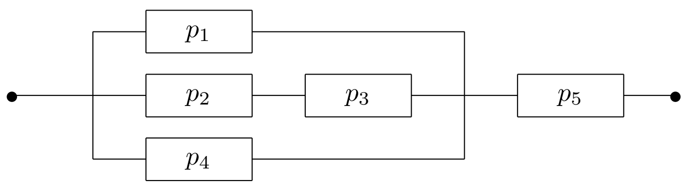
# 4. cvičení z PST

12. října 2022

**Příklad 4.1** *(operace s nezávislými jevy) Zařízení na obrázku je tvořeno zapojením bloků, které pracují nezávisle na sobě a pravděpodobností výskytu poruch jsou zadány. Vypočtěte pravděpodobnost poruchy funkce celého zařízení.*

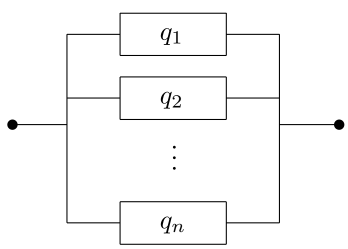



*Pravděpodobnosti vyčíslete pro* $p_1 = 0.2$, $p_2 = p_3 = 0.4$, $p_4 = 0.3$ *a* $p_5 = 0.1$.

**Řešení:**

Úlohu si zjednodušíme tím, že budeme postupně nahrazovat více bloků jedním blokem, který bude mít stejnou pravděpodobnost poruchy.

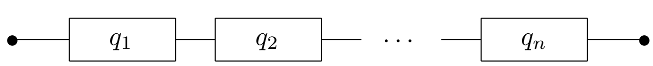
- Pro paralelní zapojení




a jevy $A_i =$"*i-tý blok (seshora) má poruchu*" je pravděpodobnost poruchy tohoto zapojení rovna

$$P(\text{"porucha paralelního zapojení"}) = P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdots P(A_n) = q_1 \cdots q_n \ .$$

- Pro sériové zapojení




a jevy $B_i =$"*i-tý blok (zleva) má poruchu*" je pravděpodobnost poruchy tohoto zapojení rovna

$$P(\text{"porucha sériového zapojení"}) = P(B_1 \cup \cdots \cup B_n) = 1 - P\big((B_1 \cup \cdots \cup B_n)^c\big) =$$

$$= 1 - P(B_1^c \cap \cdots \cap B_n^c) = 1 - P(B_1^c) \cdots P(B_n^c) = 1 - (1 - q_1) \cdots (1 - q_n) \ .$$

Pro vyřešení původního zadání teď

(a) nejdříve nahradíme sériové zapojení dvou bloků s pravděpodobnostmi poruch $p_2 = 0.4$ a $p_3 = 0.4$ jediným blokem s pravděpodobností poruchy

$$p_{2,3} = 1 - (1 - p_2)(1 - p_3) = 1 - 0.6 \cdot 0.6 = 0.64 \ .$$

(b) dále nahradíme paralelní zapojení tří bloků s pravděpodobnostmi poruch $p_1 = 0.2$, $p_{2,3} = 0.64$ a $p_4 = 0.3$ jediným blokem s pravděpodobností poruchy

$$p_{1,2,3,4} = p_1 \cdot p_{2,3} \cdot p_4 = 0.2 \cdot 0.64 \cdot 0.3 = 0.0384 \ .$$

(c) a nakonec nahradíme sériové zapojení dvou bloků s pravděpodobnostmi poruch $p_{1,2,3,4} = 0.0384$ a $p_5 = 0.1$ jediným blokem, který odpovídá celému zařízení a má pravděpodobnost poruchy

$$p_{1,2,3,4,5} = 1 - (1 - p_{1,2,3,4})(1 - p_5) = 1 - 0.9616 \cdot 0.9 = 1 - 0,86544 = 0.13456 \ .$$

**Důležitá poznámka:** Pro jev $A \subseteq \Omega$, kde $P(A) \neq 0$, má funkce

$$\widetilde{P}(\cdot) := P(\ \cdot\ |A)$$

všechny vlastnosti pravděpodobnosti (pro množinu výsledků $\Omega$ a $\sigma$-algebru $\mathcal{A}$). Tedy podmíněná pravděpodobnost se chová v prvním argumentu jako obyčejná pravděpodobnost. Pozor, pro druhý argument už podobné chování neplatí!

V následujících větách používáme tento základní vztah pro jevy $A$ a $B$:

$$P(B \cap A) = P(B|A) \cdot P(A)$$

pokud je podmíněná pravděpodobnost $P(B|A)$ definovaná, tj. pokud je $P(A) \neq 0$.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

**Věta o úplné pravděpodobnosti:** Nechť $A_1, \ldots, A_n$ je úplný disjunktní systém jevů na prostoru všech výsledků $\Omega$ (tedy jejich sjednocením je celé $\Omega$ a jevy jsou pro dvou disjunktní).

Nechť $P(A_i) \neq 0$ pro všechna $i$. Pak pro každý jev $B \subseteq \Omega$ platí

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(B|A_k) \cdot P(A_k) \ .$$

**Bayesova věta:** Pro jevy $A$ a $B$ platí

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

pokud $P(A) \neq 0$ a $P(B) \neq 0$.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

A ve spojení s větou o úplné pravděpodobnosti máme

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(B|A_k) \cdot P(A_k)} \ .$$

(Všimněte si, že výraz v čitateli je jedním ze sčítanců ve jmenovateli.)

**Příklad 4.2** *Na fakultě je* 50% *studujících na informatice,* 30% *na matematice a* 20% *na fyzice. Z těch, co studují na informatice je* 10% *žen, na matematice* 30% *a na fyzice* 20%.

*(a) Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný studující je žena?*

*(b) Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný studující je muž na fyzice?*

*(c) Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná studentka studuje matematiku?*

**Řešení:**
Označme si jevy

$A_1 =$ *"náhodně vybraný studující je informatik"*

$A_2 =$ *"náhodně vybraný studující je matematik"*

$A_3 =$ *"náhodně vybraný studující je fyzik"*

$B =$ *"náhodně vybraný studující je žena"*

Jevy $A_1, A_2, A_3$ jsou navzájem disjunktní a jejich sjednocením je celý pravděpodobnostní prostor $\Omega$ (tvořený všemi studujícími). Tedy máme úplný systém disjunktních jevů na $\Omega$. Dále známe

$$P(A_1) = 0.5 \qquad P(A_2) = 0.3 \qquad P(A_3) = 0.2$$
$$P(B|A_1) = 0.1 \quad P(B|A_2) = 0.3 \quad P(B|A_3) = 0.2$$

(a) Chceme znát $P(B)$. Podle věty o úplné pravděpodobnosti máme

$$P(B) = \sum_{j=1}^{3} P(B \cap A_j) = \sum_{j=1}^{3} P(B|A_j) \cdot P(A_j) =$$
$$= 0.1 \cdot 0.5 + 0.3 \cdot 0.3 + 0.2 \cdot 0.2 = \mathbf{0.18}\ .$$

(b) Chceme znát $P(B^c \cap A_3)$. Podle definice podmíněné pravděpodobnosti máme

$$P(B^c \cap A_3) = P(B^c|A_3) \cdot P(A_3) = (1 - 0.2) \cdot 0.2 = \mathbf{0.16}\ .$$

(c) Chceme znát $P(A_2|B)$. Podle Bayesovy věty máme

$$P(A_2|B) = \frac{P(B|A_2) \cdot P(A_2)}{P(B)} = \frac{0.3 \cdot 0.3}{0.18} = \mathbf{0.5}\ .$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Příklad můžeme řešit i bez explicitního použití výše uvedených vět a to pomocí velikosti množin. Tato velikost bude vyjadřovat "počty" studentů v dané množině ovšem s tím, že tento počet může být i desetinné číslo (používáme tak vlastně geometrický pravděpodobnostní model). Tato desetinná čísla pochopitelně nesmíme zaokrouhlovat!

Prostoru $\Omega$ přiřadíme nějakou velikost např. $vol(\Omega) = 100$ (obvykle je dobré si volit takovou velikost, kterou můžeme snadno dělit hodnotami ve jmenovatelích zlomků v zadaných pravděpodobnostech).

Teď si postupně můžeme začít vyplňovat tabulku níže:

- *počet studujících* $= vol(\Omega) = 100$
- *počet studujících na informatice* $= vol(A_1) = P(A_1) \cdot vol(\Omega) = 0.5 \cdot 100 = 50$ a podobně pro matematiku a fyziku
- *počet žen na informatice* $= vol(B \cap A_1) = P(B|A_1) \cdot vol(A_1) = 0.1 \cdot 50 = 5$ a podobně pro matematiku a fyziku

- *počet mužů na informatice* $= vol(B^c \cap A_1) = vol(A_1) - vol(B \cap A_1) = 50 - 5 = 45$ a podobně pro matematiku a fyziku

| | infor. ($A_1$) | matem. ($A_2$) | fyz. ($A_3$) | |
|---|---|---|---|---|
| muži ($B^c$) | 45 | 21 | 16 | 82 |
| ženy ($B$) | 5 | 9 | 4 | 18 |
| | 50 | 30 | 20 | 100 |

Odsud pak ihned máme např. že

$$\textit{počet žen} = vol(B) = \sum_{i=1}^{3} vol(B \cap A_i) = 5 + 9 + 4 = 18$$

a tudíž

$$P(B) = \frac{\textit{počet žen}}{\textit{počet studujících}} = \frac{vol(B)}{vol(\Omega)} = \frac{18}{100} = \mathbf{0.18}$$

$$P(B^c \cap A_3) = \frac{\textit{počet mužů na fyzice}}{\textit{počet studujících}} = \frac{vol(B^c \cap A_3)}{vol(\Omega)} = \frac{16}{100} = \mathbf{0.16}$$

a

$$P(A_2|B) = \frac{\textit{počet žen na matematice}}{\textit{počet žen}} = \frac{vol(B \cap A_2)}{vol(B)} = \frac{9}{18} = \mathbf{0.5}\ .$$

**Příklad 4.3** *Na fakultě je* 50% *studujících na informatice,* 30% *na matematice a* 20% *na fyzice. Z těch, co studují na informatice je* 10% *žen a (podobně) na matematice* 30% *je žen. Mezi studujícími je celkově* 80% *mužů.*

*(a) Jaké procento z mužů studuje na matematice?*

*(b) Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný studující je žena na informatice?*

*(c) Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný studující fyziky je muž?*

**Řešení:**
Opět si označme (jako u příkladu **3.5**) jevy

$A_1 =$ *"náhodně vybraný student je informatik"*

$A_2 =$ *"náhodně vybraný student je matematik"*

$A_3 =$ *"náhodně vybraný student je fyzik"*

$B =$ *"náhodně vybraný student je žena"*

Opět máme úplný systém disjunktních $A_1, A_2, A_3$ jevů na $\Omega =$ *"všichni studující"*. Tentokrát známe tyto pravděpodobnosti

$$P(A_1) = 0.5 \qquad P(A_2) = 0.3 \quad P(A_3) = 0.2$$
$$P(B|A_1) = 0.1 \quad P(B|A_2) = 0.3$$
$$P(B^c) = 0.8$$

(a) Chceme znát $P(A_2|B^c)$. Podle Bayesovy věty máme

$$P(A_2|B^c) = \frac{P(B^c|A_2) \cdot P(A_2)}{P(B^c)} = \frac{(1-0.3)\cdot 0.3}{0.8} = \frac{21}{80} = \mathbf{0.2625}\ .$$

(b) Chceme znát $P(B \cap A_1)$. Podle definice podmíněné pravděpodobnosti máme

$$P(B \cap A_1) = P(B|A_1) \cdot P(A_1) = 0.1 \cdot 0.5 = \mathbf{0.05}\ .$$

(c) Chceme znát $P(B^c|A_3)$. Protože neznáme $P(A_3|B^c)$, využijeme vztah

$$P(B^c|A_3) = \frac{P(B^c \cap A_3)}{P(A_3)}\ .$$

Z věty o úplné pravděpodobnosti máme

$$P(B^c \cap A_3) = P(B^c) - \sum_{j=1}^{2} P(B^c \cap A_j) = P(B^c) - \sum_{j=1}^{2} P(B^c|A_j) \cdot P(A_j) =$$

$$= 0.8 - \Big((1-0.1)\cdot 0.5 + (1-0.3)\cdot 0.3\Big) = 0.8 - 0.66 = 0.14$$

takže

$$P(B^c|A_3) = \frac{P(B^c \cap A_3)}{P(A_3)} = \frac{0.14}{0.2} = \mathbf{0.7}\ .$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Příklad opět můžeme řešit i bez explicitního použití výše uvedených vět (viz příklad **3.5**). Prostoru $\Omega$ přiřadíme opět velikost např. $vol(\Omega) = 100$.

Teď postupně můžeme začít vyplňovat tabulku níže:

- *počet studujících* $= vol(\Omega) = 100$
- *počet studujících na informatice* $= vol(A_1) = P(A_1) \cdot vol(\Omega) = 0.5 \cdot 100 = 50$ a podobně pro matematiku
- *počet žen na informatice* $= vol(B \cap A_1) = P(B|A_1) \cdot vol(A_1) = 0.1 \cdot 50 = 5$ a podobně pro matematiku
- *počet mužů na informatice* $= vol(B^c \cap A_1) = vol(A_1) - vol(B \cap A_1) = 50 - 5 = 45$ a podobně pro matematiku
- *počet mužů* $= vol(B^c) = P(B^c) \cdot vol(\Omega) = 0.8 \cdot 100 = 80$ a podobně pro ženy
- *počet mužů na fyzice* $= vol(B^c \cap A_3) = vol(B^c) - vol(B^c \cap A_1) - vol(B^c \cap A_2) = 80 - 45 - 21 = 14$ a podobně pro ženy na fyzice

| | infor. ($A_1$) | matem. ($A_2$) | fyz. ($A_3$) | |
|---|---|---|---|---|
| muži ($B^c$) | 45 | 21 | 14 | 80 |
| ženy ($B$) | $0.1 \cdot 50 = 5$ | $0.3 \cdot 30 = 9$ | 6 | 20 |
| | 50 | 30 | 20 | 100 |

Odsud pak ihned máme že

$$P(A_2|B^c) = \frac{\textit{počet mužů na matematice}}{\textit{počet mužů}} = \frac{vol(B^c \cap A_2)}{vol(B^c)} = \frac{21}{80} = \mathbf{0.2625}$$

$$P(B \cap A_1) = \frac{\textit{počet žen na informatice}}{\textit{počet studujících}} = \frac{vol(B \cap A_1)}{vol(\Omega)} = \frac{5}{100} = \mathbf{0.05}$$

a

$$P(B^c|A_3) = \frac{\textit{počet mužů na fyzice}}{\textit{počet studujících na fyzice}} = \frac{vol(B^c \cap A_3)}{vol(A_3)} = \frac{14}{14+6} = \mathbf{0.7}\ .$$

**Příklad 4.4** *Požití alkoholu bylo prokázáno u 1% všech řidičů a u 10% řidičů, kteří způsobili dopravní nehodu. Kolikrát se požitím alkoholu zvyšuje riziko nehody?*

**Řešení:**
Označme si jevy

$A$ = *"požil alkohol"*,

$H$ = *"způsobil nehodu"*.

Pak máme $P(A) = 0.01$ a $P(A|H) = 0.1$. Hledáme hodnotu $\frac{P(H|A)}{P(H|A^c)}$. Tudíž podle Bayesovy věty máme

$$\frac{P(H|A)}{P(H|A^c)} = \frac{P(A|H) \cdot P(H)}{P(A)} \cdot \frac{P(A^c)}{P(A^c|H) \cdot P(H)} =$$
$$= \frac{P(A|H) \cdot (1 - P(A))}{P(A) \cdot (1 - P(A|H))} = \frac{0.1 \cdot 0.99}{0.01 \cdot 0.9} = 11 \ .$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Také na to můžeme jít následujícím způsobem:

$$0.1 = P(A|H) = \frac{P(H|A) \cdot P(A)}{P(H|A) \cdot P(A) + P(H|A^c) \cdot P(A^c)} = \frac{P(H|A) \cdot 0.01}{P(H|A) \cdot 0.01 + P(H|A^c) \cdot 0.99}$$

a odsud je

$$P(H|A) \cdot 0.001 + P(H|A^c) \cdot 0.099 = P(H|A) \cdot 0.01$$
$$P(H|A^c) \cdot 0.099 = P(H|A) \cdot 0.009 \ .$$

opět s výsledkem

$$\frac{P(H|A)}{P(H|A^c)} = \frac{0.099}{0.009} = 11 \ .$$

**Co je náhodná veličina:**

Náhodná veličina je funkce, která náhodnému výsledku (tj. elementárnímu jevu) přiřadí konkrétní hodnotu. Např. vybranému člověku přiřadí jeho tělesnou výšku. Jak je vidět, náhodná veličina vůbec není náhodná, co do hodnoty, kterou přiřazuje (ta je určena naprosto jasně). Náhodnost výstupu veličiny je dána náhodností jejího vstupu!

Abychom mohli s náhodnou veličinou $X$ vůbec pracovat, potřebujeme umět určovat pravděpodobnosti toho, že hodnoty $X$ budou např. v intervalu $\langle 1.5,\ 7.2) \subseteq \mathbb{R}$, což znamená, že množině $X^{-1}\langle 1.5,\ 7.2) = \{\omega \in \Omega \mid 1.5 \leq X(\omega) < 7.2\}$ musíme umět přiřadit její pravděpodobnost. To půjde jen tehdy, jestliže to bude množina měřitelná v daném systému jevů. Proto následující definice:

**Definice náhodné veličiny:** Náhodná veličina $X$ v pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je takové zobrazení

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

že vzor každého intervalu $I$ v $\mathbb{R}$ je "přípustná" množina (neboli jev), tj. $X^{-1}(I) \in \mathcal{A}$. Tuto vlastnost stačí ověřit jen pro určité typy intervalů v $\mathbb{R}$:

$$X \text{ je náhodná veličina} \quad \Leftrightarrow \quad (\forall t \in \mathbb{R}) \ \ X^{-1}\Big((-\infty, t\rangle\Big) \in \mathcal{A}$$

**Co umožňuje náhodná veličina:**

Náhodná veličina $X : \Omega \to \mathbb{R}$ umožňuje jednu podstatnou věc - zapomenout na původní prostor $\Omega$ všech výsledků (i s celou jeho strukturou jevů a jejich pravděpodobnostmi) a přitom stále umět vyčíslovat pravděpodobnosti pro $X$, které potřebujeme znát.

Veličina $X$ totiž umí přenést a vytvořit rozdělení pravděpodobnosti tam, kde má své hodnoty - konkrétně vytvoří nový pravděpodobnostní prostor na reálné přímce $\mathbb{R}$. A to tak, že každý interval $I \subseteq \mathbb{R}$ bude mít prostě pravděpodobnost $P_X(I) := P\Big(X^{-1}(I)\Big)$.

*Pravděpodobnosti $P_X$ se říká rozdělení pravděpodobnosti veličiny $X$ (na $\mathbb{R}$).* Toto rozdělení můžeme úplně popsat pokud opět známe pravděpodobnosti jen některých speciálních intervalů: opět jsou to intervaly $(-\infty, t\rangle$ pro $t \in \mathbb{R}$. Jejich pravděpodobnosti pak přirozeně definují tzv. *distribuční funkci* $F_X : \mathbb{R} \to \langle 0, 1\rangle$ jako

$$F_X(t) := P(X \leq t) \qquad \Big( = P\big(X^{-1}(-\infty, t\rangle\big)\Big)$$

**Důležité vlastnosti distribuční funkce:** Pro distribuční funkci $F_X$ veličiny $X$ platí, že

- má hodnoty v intervalu $\langle 0,\ 1\rangle$,
- je neklesající,
- je zprava spojitá,
- $\lim\limits_{t\to -\infty} F_X(t) = 0$ a $\lim\limits_{t\to +\infty} F_X(t) = 1$.

(Tyto vlastnosti dokonce už distribuční funkce úplně charakterizují v tom smyslu, že každá funkce splňující výše uvedené vlastnosti je distribuční funkcí nějaké náhodné veličiny.)

*Náhodná veličina a její distribuční funkce jsou jedny z nejdůležitějších pojmů v celém kurzu! Proto se je snažte pochopit.*

**Co je to střední hodnota náhodné veličiny:**

Jestliže pro veličinu $X$ provedeme $n$ měření, ve kterých se budou vyskytovat číselné hodnoty $a_1, \ldots, a_k$ (ne nutně navzájem různé), kde každá hodnota $a_i$ se bude opakovat $n_i$-krát, pak za jejich průměrnou hodnotu $\overline{\boldsymbol{x}}$ (v rámci tohoto našeho měření) budeme považovat jejich aritmetický průměr (kde se započítá i opakování dané hodnoty $a_i$), tj.

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{\sum_i n_i \cdot a_i}{\sum_i n_i} = \sum_i a_i \cdot \frac{n_i}{n}$$

kde $n = \sum_i n_i$ je celkový počet měření. (Ve statistice se tato hodnota $\overline{\boldsymbol{x}}$ nazývá *výběrový průměr* - viz později). Výraz $\frac{n_i}{n}$ přitom vyjadřuje podíl výskytu hodnoty $a_i$ při daném počtu měření. Uvědomme si ještě, že k výpočtu $\overline{\boldsymbol{x}}$ musíme mít k dispozici konkrétní soubor naměřených hodnot!

Tento intuitivní přístup vede přirozeně k definici *střední hodnoty* $E(X)$ pro *diskrétní* veličinu $X$ (tj. pro takovou veličinu $X$, že existuje *nejvýše spočetná* množina $A \subseteq \mathbb{R}$, že $P(X \in A) = 1$) v podobě

$$E(X) = \sum_{k\in A} k \cdot P(X = k)$$

samozřejmě pokud suma vůbec existuje. Spočetnost nebo konečnost množiny $A$ tu je ovšem podstatná - jestliže sčítáme nespočetně mnoho nenulových čísel, pak tento součet buď neexistuje nebo bude vždy nekonečný. Tedy šanci na to, abychom dostali konečně číslo mají jen nejvýše spočetně součty nenulových čísel. No a protože pro hodnoty $k \in \mathbb{R} \setminus A$ je vždy $P(X = k) = 0$ (pro naši diskrétní veličinu $X$), tak můžeme použít i vyjádření ve tvaru:

$$E(X) = \sum_{k\in\mathbb{R}} k \cdot P(X = k)\ .$$

**Příklad 4.5** *Uvažujme hod mincí s následujícími výsledky*

- $\omega_1 =$ *"padl rub" (s pravděpodobností* 0.49*)*
- $\omega_2 =$ *"padl líc" (s pravděpodobností* 0.49*)*
- $\omega_3 =$ *"nastala výjimečná situace" (hrana, zakutálení mince apod.)(s pravděpodobností* 0.02*).*

*Sestrojte dvě (nekonstantní) náhodné veličiny (s navzájem různým počtem hodnot), nakreslete jejich distribuční funkce a určete jejich střední hodnoty.*

**Řešení:**
Množina všech možných výsledků je tedy $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Každá náhodná veličina na tomto prostoru $\Omega$ má maximálně tři různé hodnoty, takže určitě bude *diskrétní*

(tj. má nejvýše spočetně mnoho hodnot $A = \{x_1, x_2, \dots\} \subseteq \mathbb{R}$ takových, že $\sum\limits_{u \in A} P(X = u) = 1$.)

Pro distribuční funkci diskrétní veličiny $X$ pak platí

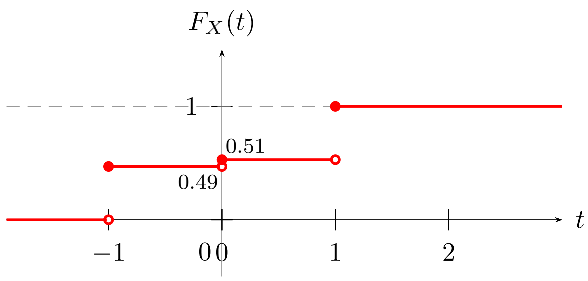
$$F_X(t) = P(X \le t) = \sum_{u \le t} P(X = u) \ .$$

Veličiny mohou být např.

- $X : \begin{array}{rcr} \omega_1 & \mapsto & 1 \\ \omega_2 & \mapsto & -1 \\ \omega_3 & \mapsto & 0 \end{array}$

Distribuční funkce je skokovitá se skoky v bodech $-1$, $0$ a $1$ o velikostech 0.49, 0.02 a 0.49, tj.

$$F_X(t) = \sum_{u \le t} P(X = u) = \begin{cases} & 0 \quad \text{pro} \quad t \in (-\infty, -1) \\ P(X=-1) = & 0.49 \quad \text{pro} \quad t \in \langle -1, 0) \\ P(X=-1) + P(X=0) = & 0.51 \quad \text{pro} \quad t \in \langle 0, 1) \\ P(X=-1) + P(X=0) + P(X=1) = & 1 \quad \text{pro} \quad t \in \langle 1, \infty) \end{cases}$$




Obor hodnot $X$ je $A = \{-1, 0, 1\}$. Střední hodnota pak bude

$$E(X) = \sum_{x \in A} x \cdot P(X = x) = (-1) \cdot P(X = -1) + 0 \cdot P(X = 0) + 1 \cdot P(X = 1) =$$

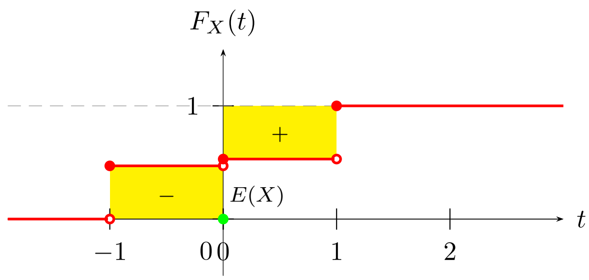
$$= (-1) \cdot 0.49 + 0 \cdot 0.02 + 1 \cdot 0.49 = 0$$

Střední hodnota je v tomto případě vážený průměr z daných hodnot anebo také vodorovná souřadnice (zelený bod) těžiště systému, kde do místa příslušných hodnot $x \in A$ zavěsíme závaží s hmotnostmi $m_x = P(X = x) \ge 0$.

Střední hodnota $E(X)$ má ještě jednu geometrickou interpretaci - je to rozdíl velikosti plochy *nad* grafem distr. funkce $F_X$ *v intervalu* $(0, +\infty)$ a velikosti plochy *pod* grafem distr. funkce $F_X$ *v intervalu* $(-\infty, 0)$. Konkrétně:

$$E(X) = -\int\limits_{-\infty}^{0} F_X(t)\ dt + \int\limits_{0}^{\infty} \big(1 - F_X(t)\big)\ dt$$

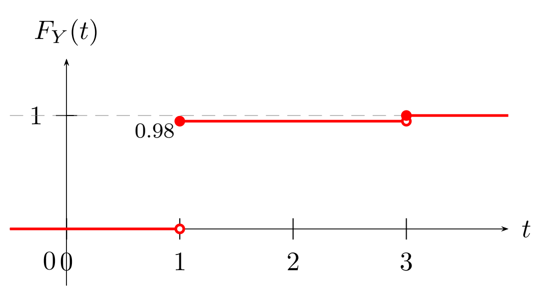
Tento vztah platí dokonce pro jakoukoliv náhodnou veličinu $X$ (diskrétní, spojitou i smíšenou).




- $Y: \begin{array}{lll} \omega_1 & \mapsto & 1 \\ \omega_2 & \mapsto & 1 \\ \omega_3 & \mapsto & 3 \end{array}$

Distribuční funkce je skokovitá se skoky v bodech 1 a 3 o velikostech 0.98 a 0.02 (protože obraz roven 1 mají dva elementární jevy $\omega_1$ a $\omega_2$, jejichž souhrnná pravděpodobnost je $0.49{+}0.49 = 0.98$), tj.

$$F_Y(t) = \sum_{u \le t} P(Y = u) = \begin{cases} & 0 & \text{pro} & t \in (\infty, 1) \\ P(Y=1) = P(\{\omega_1, \omega_2\}) = & 0.98 & \text{pro} & t \in \langle 1, 3) \\ P(Y=1) + P(Y=3) = & 1 & \text{pro} & t \in \langle 3, \infty)\ . \end{cases}$$

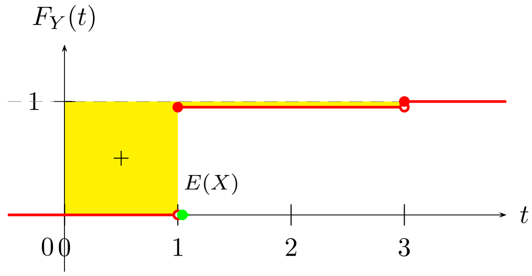



Obor hodnot $Y$ je $A = \{1, 3\}$. Střední hodnota pak bude

$$E(Y) = \sum_{x \in A} x \cdot P(Y = x) = 1 \cdot P(Y = 1) + 3 \cdot P(Y = 3) =$$

$$= 1 \cdot 0.98 + 3 \cdot 0.02 = 1.04$$

Geometricky je to opět těžiště (zelený bod) nebo velikost žluté plochy (protože plocha pod grafem $F_Y$ je na záporné ose nulová).



$F_Y(t)$
1
$E(X)$
$t$
0
0
1
2
3