12. cvičení z PST

2. - 6. května 2022

Příklad 12.1 (metoda momentů a max. věrohodnosti - směs)

V krabici je mnoho hracích kostek, z nichž některé jsou správné, některé falešné. Na falešných padá šestka s pravděpodobností 1/2, zbývající čísla mají stejnou pravděpodobnost. Opakovaně jsme vytáhli kostku, hodili jí a vrátili ji zpět. Četnost výsledků udává tabulka:

hodnota i	1	2	3	4	5	6
četnost n_i	18	20	12	15	10	25

(a) Odhadněte, kolik procent kostek je falešných.

(b) Okomentujte stručně, co bychom dostali metodou momentů, kdybychom měli napozorované hodnoty:

hodnota i	1	2	3	4	5	6
četnost n_i	18	20	12	15	15	20

Řešení:
Podíl falešných kostek označme $c \in \langle 0, 1\rangle$. Naše náhodná veličina je

$X =$"*hodnota, která padne na dané kostce*"

a můžeme ji vyjádřit jako směs $X = \mathrm{Mix}_c(X_1, X_2)$ složenou z náhodných veličin

$X_1 =$"*hodnota, která padne na falešné kostce*"

X_1 : "množina falešných kostek" $\to \mathbb{R}$

$X_2 =$"*hodnota, která padne na správné kostce*"

X_2 : "množina správných kostek" $\to \mathbb{R}$.

Metoda momentů: Máme

$$E(X_1) = \tfrac{1}{10}(1 + \cdots + 5) + \tfrac{1}{2} \cdot 6 = \tfrac{9}{2}$$

a

$$E(X_2) = \tfrac{1}{6}(1 + \cdots + 6) = \tfrac{7}{2}$$

a z definice směsi tak dostaneme

$$E(X) = c \cdot E(X_1) + (1 - c) \cdot E(X_2) = c \cdot \tfrac{9}{2} + (1 - c) \cdot \tfrac{7}{2} = c + \tfrac{7}{2} \ .$$

Realizace výběrového průměru je

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{\sum_i n_i \cdot i}{\sum_i n_i} = \frac{18 \cdot 1 + 20 \cdot 2 + 12 \cdot 3 + 15 \cdot 4 + 10 \cdot 5 + 25 \cdot 6}{18 + 20 + 12 + 15 + 10 + 25} = \frac{354}{100} = 3.54 \ .$$

Srovnáním dostaneme

$$\widehat{p} + 3.5 = E(X) = \overline{\boldsymbol{x}} = 3.54 \ ,$$

což dává $\widehat{p} = 0.04 \in \langle 0, 1\rangle$, a to vyhovuje zadání.

V případě druhé tabulky:

hodnota i	$\cdots$	5	6
četnost n_i	$\cdots$	15	20

bychom dostali

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{18 \cdot 1 + 20 \cdot 2 + 12 \cdot 3 + 15 \cdot 4 + 15 \cdot 5 + 20 \cdot 6}{18 + 20 + 12 + 15 + 15 + 20} = \frac{349}{100} = 3.49 \ .$$

Protože ale $E(X) = c \cdot 4.5 + (1-c) \cdot 3.5 \in \langle 3.5,\ 4.5 \rangle$, tak rovnice $c + 3.5 = E(X) = \overline{\boldsymbol{x}} = 3.49$ nemá řešení pro $c \in \langle 0, 1 \rangle$.

V tomto případě metoda momentů prostě nedává žádnou odpověď.

Metoda maximální věrohodnosti:

Z definice směsi máme pro její pravděpodobnostní funkci, že

$$p_X(i) = c \cdot p_{X_1}(i) + (1-c) \cdot p_{X_2}(i) = \begin{cases} c\,\frac{1}{10} + (1-c)\,\frac{1}{6} = \frac{5-2\,c}{30} & ,\ i = 1, \ldots, 5\ , \\ \\ c\,\frac{1}{2} + (1-c)\,\frac{1}{6} = \frac{1+2\,c}{6} & ,\ i = 6\ . \end{cases}$$

Ve směsi rozdělení šestka padla $25\times$, ostatní čísla padla $75\times$ (není třeba mezi nimi rozlišovat, protože mají stejnou pravděpodobnost). Tedy věrohodnostní funkce je

$$L(c) = \left(\frac{5 - 2\,c}{30}\right)^{75} \cdot \left(\frac{1 + 2\,c}{6}\right)^{25} ,$$
$$\ell(c) = \ln(L(c)) = 75\ \ln(5 - 2\,c) + 25\ \ln(1 + 2\,c) + \mathit{konst.}$$

Maximum nastává pro $\widehat{c}$ takové, že

$$0 = \ell'(\widehat{c}) = \frac{-150}{5 - 2\,\widehat{c}} + \frac{50}{1 + 2\,\widehat{c}} = 50 \cdot \frac{2 - 8\widehat{c}}{(5 - 2\,\widehat{c})(1 + 2\,\widehat{c})} ,$$
$$\widehat{c} = \tfrac{1}{4} \in \langle 0, 1 \rangle \ .$$

protože na intervalu $\langle 0, \frac{1}{4})$ je $\ell' > 0$ a na $(\frac{1}{4}, 1\rangle$ je $\ell' < 0$. Tato hodnota je i v souladu s počátečními omezujícími podmínkami.

Poznámky k empirickému rozdělení:

Nechť $x_1 \leq \cdots \leq x_n$ jsou naměřené hodnoty (veličiny X). Pro ně si můžeme přirozeně definovat *empirickou* náhodnou veličinu Emp s diskrétním rozdělením, oborem hodnot

$$A = \{a \in \mathbb{R} \mid a = x_i \ \text{ pro nějaké } \ i\}$$

a jejich pravděpodobnostmi

$$P(\mathrm{Emp} = a) = \frac{\text{“}\,\textit{počet výskytů}\ a\ \textit{mezi hodnotami}\ x_1, \ldots, x_n\text{”}}{n} \ .$$

Když si k této veličině zjistíme distribuční funkci, dostaneme známou *empirickou distribuční funkci*:

$$F_{\mathrm{Emp}}(t) = P(\mathrm{Emp} \leq t) = \frac{\#\{i \mid x_i \leq t\}}{n}$$

Od ní si pak vytvoříme kvantilovou funkci q_{Emp}, která má tvar

$$q_{\mathrm{Emp}}(\alpha) = x_{\lceil n\alpha \rceil} \ \text{ pro } \ \alpha \in (0, 1)$$

kde $\lceil u \rceil$ je horní celá část z $u \in \mathbb{R}$, tj. zaokrouhlení desetinných čísel nahoru. Speciální hodnoty se pak jmenují

- 1. kvartil $= q_{\mathrm{Emp}}(\frac{1}{4}) = x_{\lceil \frac{n}{4} \rceil}$
- 2. kvartil $= q_{\mathrm{Emp}}(\frac{2}{4}) = x_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ (tzv. medián)
- 3. kvartil $= q_{\mathrm{Emp}}(\frac{3}{4}) = x_{\lceil \frac{3n}{4} \rceil}$

Příklad 12.2 *Uvažujme následující data:*

(1) počty výskytů jistého druhu rostliny na ploše $1\,\mathrm{m}^2$*:*

$$0, \quad 2, \quad 1, \quad 4, \quad 4, \quad 5, \quad 2, \quad 3, \quad 7$$

(2) časy (v sekundách) mezi impulzy v mozku:

$$4.25, \quad 0.65, \quad 1.35, \quad 0.20, \quad 0.55, \quad 6.63, \quad 1.38, \quad 0.22, \quad 0.27$$

(3) venkovní teploty naměřené v různých letech při pravidelné podzimní akci:

$$8.07, \quad 19.23, \quad 9.27, \quad 5.71, \quad 12.62, \quad 11.24, \quad 11.92, \quad 17.30, \quad 14.87$$

Nakreslete pro tato data

(a) histogramy

(b) boxploty

(c) empirickou distribuční funkci

a odhadněte, z jakého rozdělení mohou tato data pocházet.

Řešení:
Histogram (pro četnosti): Naměřená data si rozdělíme do disjunktních intervalů I_i (stejné délky) pro $i = 1, \dots, k$, které na sebe budou navazovat. Nad I_i nakreslíme sloupec výšky m_i, která znamená četnost dat, jež spadnou do I_i. Abychom z histogramu něco mohli vyčíst a uměli ho (ručně) nakreslit, volíme "rozumný" počet sloupců (např. něco mezi 5 a 15).

Boxplot (neboli krabicový graf): Na rozdíl od histogramu je vždy definován stejně. Krajní vousy ("whiskers") jsou dány krajními naměřenými hodnotami a krabice ("box") uprostřed je pak určena hodnotami jednotlivých kvartilů.

Počet měření je zde ve všech případech stejný: $n = 9$. Při uspořádaných datech $x_1 \leq \dots \leq x_9$ tak budou hodnoty kvartilů tyto:

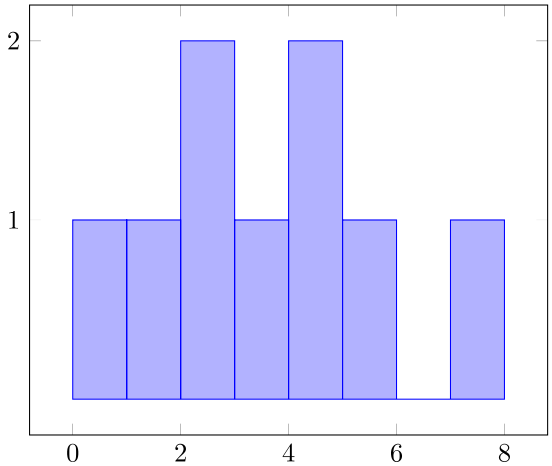
- 1. kvartil $= x_{\lceil \frac{9}{4} \rceil} = x_3$
- medián $= x_{\lceil \frac{9}{2} \rceil} = x_5$
- 3. kvartil $= x_{\lceil \frac{3 \cdot 9}{4} \rceil} = x_7$

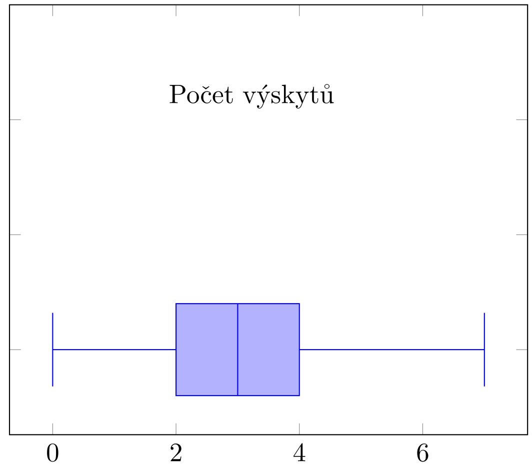
Medián je (v rámci uspořádání podle indexu) tedy přibližně uprostřed naměřených hodnot a podobně je to s okolními kvartily. Data si tudíž před výpočtem vždy uspořádáme.

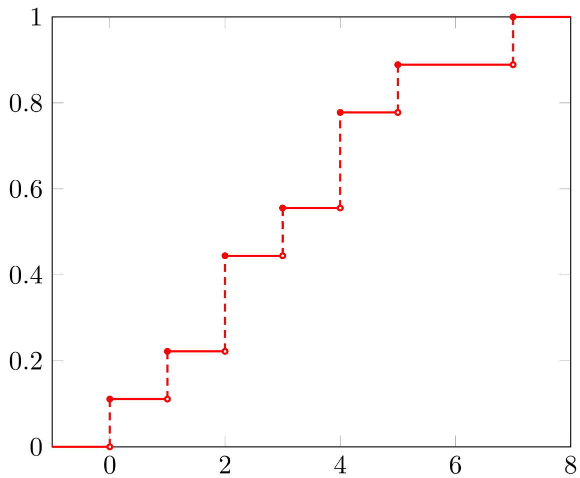
(1) Uspořádaná data:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0, & 1, & 2, & 2, & 3, & 4, & 4, & 5, & 7 \\ x_1 & & 1.kvar. & & med. & & 3.kvar. & & x_n \end{array}$$

Rozdíl mezi největší a nejmenší hodnotou je $x_n - x_1 = 7 - 0 = 7$. Tuto délku tedy budeme potřebovat pokrýt několika disjunktními intervaly a protože se zde jedná o diskrétní veličinu (počty výskytů), bude vhodné si zvolit šířku sloupce rovnou 1. Intervaly pak budou $\langle 0, 1), \langle 1, 2), \ldots, \langle 7, 8)$.





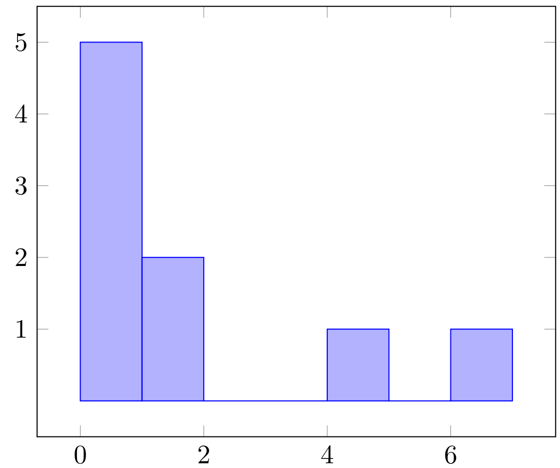


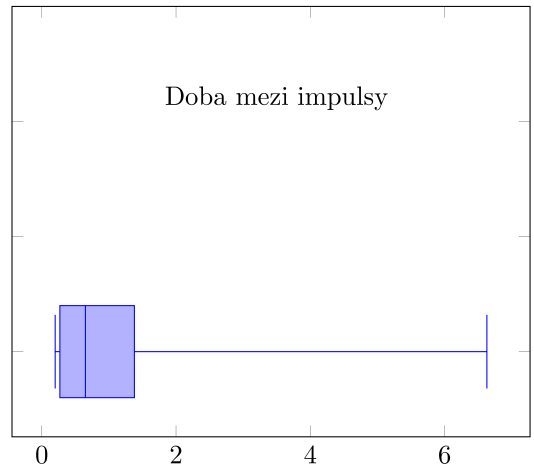
Vzhledem k popisu dat (počty výskytů na dané ploše) to vypadá na Poissonovo rozdělení. Tomu také zhruba odpovídají i grafická znázornění (histogram, boxplot, emp. distr. funkce).

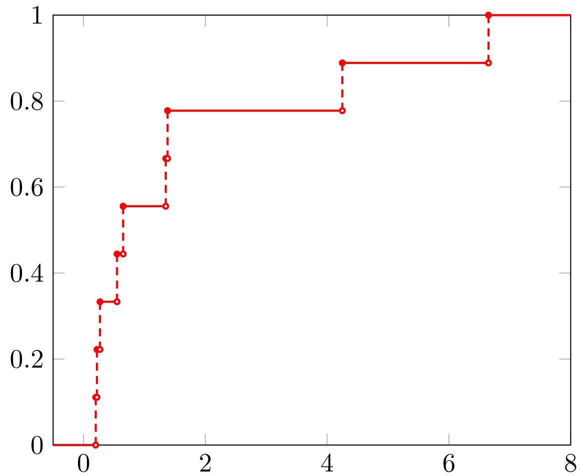
(2) Uspořádaná data:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0.20, & 0.22, & 0.27, & 0.55, & 0.65, & 1.35, & 1.38, & 4.25, & 6.63 \\ x_1 & & 1.kvar. & & med. & & 3.kvar. & & x_n \end{array}$$

Rozdíl mezi největší a nejmenší hodnotou je $x_n - x_1 = 6.63 - 0.2 = 6.42$. Tuto délku budeme zase potřebovat pokrýt několika disjunktními intervaly. Zkusíme si opět vzít šířku sloupce rovnou 1. Intervaly si pro změnu zvolíme jako $(0, 1\rangle, (1, 2\rangle, \ldots, (6, 7\rangle$. Výběr toho, do kterého z intervalů přiřadíme dělicí body, není podstatný. Zde jsme si to takto zvolili čistě jen proto, že hodnoty čekací doby jsou vždy nenulové (tj. první interval by ideálně neměl začínat nulou).





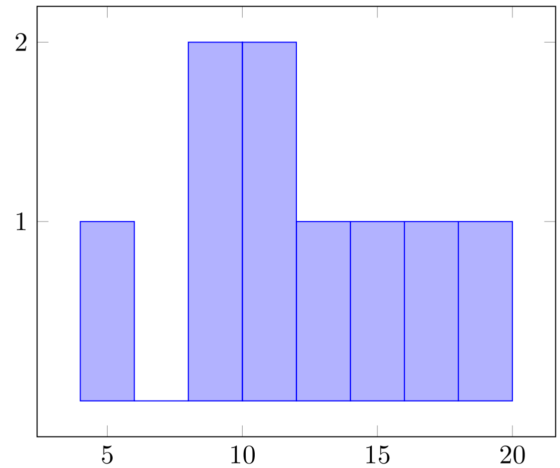


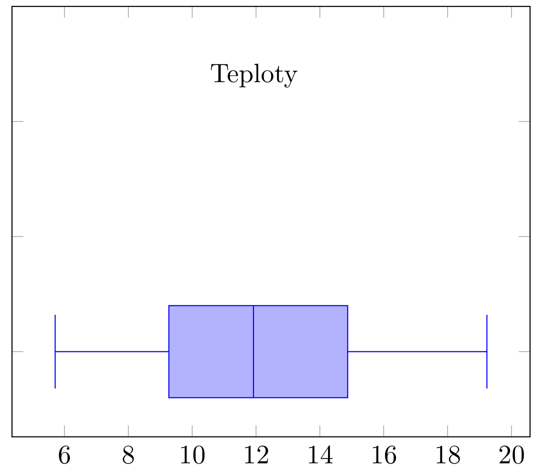
Vzhledem k popisu dat (doba čekání na další událost) to vypadá na exponenciální rozdělení. Tomu také zhruba odpovídají i grafická znázornění, kde boxplot je hodně posunutý doleva a empirická distribuční funkce připomíná exponenciálu.

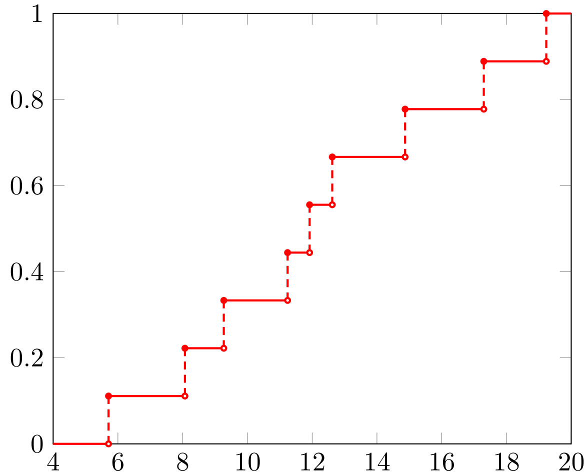
(3) Uspořádaná data:

5.71,	8.07,	9.27,	11.24,	11.92,	12.62,	14.87,	17.30,	19.23
x_1		$1.kvar.$		$med.$		$3.kvar.$		x_n

Rozdíl mezi největší a nejmenší hodnotou je $x_n - x_1 = 19.23 - 5.71 = 13.52$ a tuto délku potřebujeme pokrýt několika disjunktními intervaly. Tady se nabízí vzít si větší (ideálně celočíselnou šířku), takže zkusíme šířku sloupce rovnou 2. Intervaly si zvolíme např. $\langle 4, 6), \langle 6, 8), \ldots, \langle 18, 20)$.







Vzhledem k popisu dat (hodnota ovlivněná mnoha malými výkyvy) to vypadá na normální rozdělení. Tomu také zhruba odpovídají i grafická znázornění (celkem symetrický boxplot i emp. distribuční funkce).

Pro náhodnou veličinu X a pravděpodobnost $\alpha \in (0,1)$ často potřebujeme najít $t \in \mathbb{R}$, že $P(X \leq t) = \alpha$, tj. $F_X(t) = \alpha$.

Definice: Mějme náhodnou veličinu X se spojitou distribuční funkcí F_X, která je ostře rostoucí na otevřeném intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ takovém, že $F_X(I) = (0,1)$ (tj. F_X je bijekcí intervalu I a intervalu $(0,1)$). Pak existuje inverzní funkce $q_X := (F_X)^{-1} : (0,1) \to I$ a nazývá se *kvantilová funkce veličiny X*. V tom případě pak pro všechna $\alpha \in (0,1)$ a $t \in I$ platí:

$$P(X \leq t) = \alpha \;\Leftrightarrow\; q_X(\alpha) = t$$

Odsud pak ihned plyne, např. že

- $P\Big(X \leq q_X(\alpha)\Big) = \alpha$
- $P\Big(q_X(\alpha) \leq X\Big) = 1 - \alpha$ a $P\Big(q_X(1-\alpha) \leq X\Big) = \alpha$
- $P\Big(q_X(\frac{\alpha}{2}) \leq X \leq q_X(1 - \frac{\alpha}{2})\Big) = 1 - \alpha$ a přitom je $P\Big(X < q_X(\frac{\alpha}{2})\Big) = \frac{\alpha}{2} = P\Big(q_X(1 - \frac{\alpha}{2}) < X\Big)$

Pokud navíc $I = \mathbb{R}$ a X má hustotu, která je jako funkce sudá, pak platí:

* $F_X(t) + F_X(-t) = 1$ pro každé $t \in \mathbb{R}$,
* $q_X(\alpha) = -q_X(1-\alpha)$ pro každé $\alpha \in (0,1)$.

Pro hodnotu $q_X(\alpha)$ budeme ve speciálních případech používat toto značení:

- u_α pro $X \sim N(0,1)$,
- $t_{\alpha;\,k}$ pro X s t-rozdělením s k stupni volnosti,
- $\chi^2_{\alpha;\,k}$ pro X s χ^2-rozdělením s k stupni volnosti.

Příklad 12.3 (test střední hodnoty normálního rozdělení při **neznámém** rozptylu)
Výrobce tvrdí, že spotřeba jím vyráběného automobilu je $\mu_0 = 8\ \ell/100\,\mathrm{km}$. *Průměrná spotřeba u* $n = 49$ *uživatelů ale byla* $\overline{\boldsymbol{x}} = 8.4\ \ell/100\,\mathrm{km}$. *Naměřen byl dále výběrový rozptyl* $s^2_{\boldsymbol{x}} = 2.56\ (\ell/100\,\mathrm{km})^2$.

(a) Testujte na hladině 5%, *zda měl výrobce pravdu (tj. zda spotřeba je rovna* $8\ \ell/100\,\mathrm{km}$*).*

(b) Testujte na hladině 5%, *zda je spotřeba* ***nejvýše*** *rovna* $8\ \ell/100\,\mathrm{km}$.

Jak dopadne testovaní těchto hypotéz na hladině 1%*?*

Řešení:
U veličiny

$$X = \text{“}\textit{spotřeba automobilu}\text{”}$$

budeme předpokládat normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$. Jednotlivá měření X_i, pro $i = 1, \ldots, 49$, jsou nezávislá. Oba parametry jsou neznámé a my chceme testovat střední hodnotu μ.

(a) Podle zadání máme na hladině $\alpha = 5\%$ (příp. 1%) otestovat hypotézu o střední hodnotě

$\mathbf{H}_0 : \mu = \mu_0 (= 8)$

proti alternativní hypotéze:

$\mathbf{H}_1 : \mu \neq \mu_0 (= 8)$.

Pomocí testovací statistiky:
Protože hodnotu rozptylu neznáme, provedeme t-test s testovací veličinou (tzv. *statistikou*):

$$T = \frac{\overline{\boldsymbol{X}} - \mu_0}{S_{\boldsymbol{X}}} \sqrt{n}$$

kde

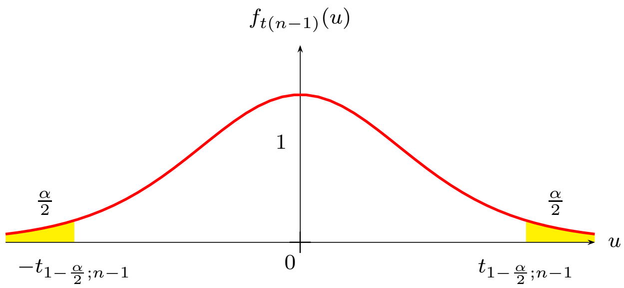
- veličina $\overline{\boldsymbol{X}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ je *výběrový průměr* a
- veličina $S^2_{\boldsymbol{X}} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{\boldsymbol{X}})^2$ je *výběrový rozptyl.*

Kritérium pro **ZAMÍTNUTÍ H**$_0$ (na hladině α) je tvaru

$$\text{zamítáme } \mathbf{H}_0 \text{ (na hladině } \alpha) \quad \Leftrightarrow \quad |t| > t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1} \ .$$

kde t je hodnota T na základě naměřených dat.

Proč má zamítací kritérium uvedený tvar: Za předpokladu platnosti nulové hypotézy, tj. pokud $E(X) = \mu_0$, bude mít statistika T tzv. Studentovo t-rozdělení s $n-1$ stupni volnosti a hustotou $f_{t(n-1)}$ (která má podobný, ale ne stejný, průběh jako u $N(0,1)$):



Očekávané hodnoty takovéto statistiky T by se měly pohybovat blízko nuly. Pokud se příliš odchýlí, bude to důvod k zamítnutí nulové hypotézy. Nebudeme přitom preferovat vychýlení na žádnou ze stran - tj. chybu 1. druhu s pravděpodobností α rozdělíme na poloviny $\frac{\alpha}{2}$ na obě strany. Pak máme

$$P_{(H_0 \text{ platí})}\Big(\text{nastává chyba 1. druhu}\Big) = P_{(H_0 \text{ platí})}\Big(\text{zamítáme } \mathbf{H}_0\Big) =$$
$$= P_{(H_0 \text{ platí})}\Big(\ |T| > t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}\ \Big) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha$$

Teď už tedy dosadíme konkrétní naměřené hodnoty (které pro jednotlivé veličiny značíme pro odlišení malými písmeny, tj. $\overline{\boldsymbol{x}}$, $s^2_{\boldsymbol{x}}$ a t). Realizace testovací statistiky je

$$t = \frac{\overline{\boldsymbol{x}} - \mu_0}{s_{\boldsymbol{x}}}\sqrt{n} = \frac{8.4 - 8}{\sqrt{2.56}}\sqrt{49} = \frac{0.4}{1.6} \cdot 7 = 1.75\ .$$

Protože pro $\alpha = 0.05$ je

$$|t| = 1.75 \not> 2.011 \doteq t_{0.975;48} = t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}\ ,$$

nulovou hypotézu **NEZAMÍTÁME** na hladině 5%.

Protože při snížení hladiny se zmenšuje i kritický obor W (je to vidět i na obrázku, kde žlutá plocha bude menší), tak na hladině 1% hypotézu $\mathbf{H}_0$ také **NEZAMÍTÁME**.
(Pro úplnost si ale stejně ještě vyjádříme příslušnou podmínku: $|t| = 1.75 \not> 2.682 \doteq t_{0.995;48}$.)

Obecněji tedy:

snižujeme hladinu chyby 1. druhu (tj. chceme si být více jistí) $\Rightarrow$ musíme tolerovat více "prohřešků" $\Rightarrow$ častěji nezamítáme

Pomocí intervalu spolehlivosti:
Kritérium pro zamítnutí $\mathbf{H}_0$ na hladině α

$$|t| > t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}$$

se dá ekvivalentně přepsat (při vyjádření $t = \frac{\overline{\boldsymbol{x}}-\mu_0}{s_{\boldsymbol{x}}}\sqrt{n}$) jako

$$\mu_0 \notin \left\langle\ \overline{\boldsymbol{x}} - \frac{s_{\boldsymbol{x}}}{\sqrt{n}} \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}\quad ,\quad \overline{\boldsymbol{x}} + \frac{s_{\boldsymbol{x}}}{\sqrt{n}} \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}\ \right\rangle =: \langle \mu_L,\ \mu_U \rangle$$

což je hledaný interval spolehlivosti.

Při vyčíslení pro $\alpha = 5\%$, tj. $t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1} = t_{0.975;\,48} \doteq 2.011$, tedy dostaneme

$$\langle \mu_L,\ \mu_U \rangle = \left\langle\ 8.4 - \frac{1.6}{\sqrt{49}} \cdot 2.011 \quad , \qquad 8.4 + \frac{1.6}{\sqrt{49}} \cdot 2.011\ \right\rangle = \langle 7.94,\ 8.86 \rangle$$

Protože máme $\mu_0 = 8 \in \langle 7.94,\ 8.86 \rangle = \langle \mu_L,\ \mu_U \rangle$, hypotézu $\mathbf{H}_0$ **NEZAMÍTÁME** na hladině 5%.

(Výsledek musel samozřejmě dopadnout stejně jako při testovací statistice, protože je to ekvivalentní princip.)

- -

(b) V tomto případě budeme na hladině $\alpha = 5\%$ (příp. 1%) testovat hypotézu o střední hodnotě

$\widetilde{\mathbf{H}}_0 : \mu \leq \mu_0 (= 8)$

proti alternativní hypotéze:

$\widetilde{\mathbf{H}}_1 : \mu > \mu_0 (= 8)$.

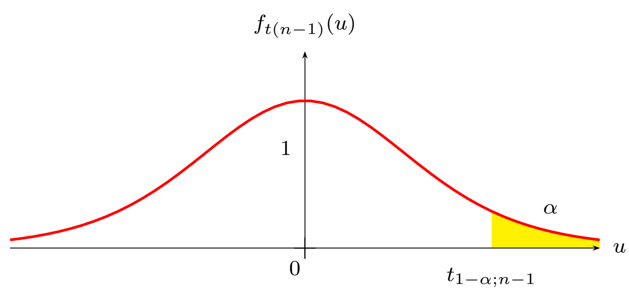
Pomocí testovací statistiky:

Statistika T bude mít stejný tvar jako v předešlém případě (a). Kritérium pro **ZAMÍTNUTÍ** $\widetilde{\mathbf{H}}_0$ (na hladině α) bude ale teď jiné, a sice

$$\text{zamítáme } \widetilde{\mathbf{H}}_0 \text{ (na hladině } \alpha) \quad \Leftrightarrow \quad t > t_{1-\alpha; n-1} \ .$$

Proč má zamítací kritérium uvedený tvar: Za předpokladu platnosti nulové hypotézy, tj. pokud $E(X) \leq \mu_0$, bude mít hustota pro statistiku T svůj vrchol v intervalu $(-\infty, 0\rangle$. Očekávané hodnoty takovéto statistiky T by se měly pohybovat spíše v záporných až nulových hodnotách. Pokud se příliš odchýlí do kladných hodnot, bude to důvod k zamítnutí nulové hypotézy. "Nejhorší" z tohoto hlediska je krajní případ $E(X) = \mu_0$, pro který má T opět Studentovo t-rozdělení s $n-1$ stupni volnosti (viz obrázek). (V ostatních případech $\mu < \mu_0$ uz ovšem statistika T Studentovo rozdělení *nemá*! Pro zájemce je více podrobností na konci tohoto dokumentu.)

Chyba 1. druhu s pravděpodobností α zde tedy bude soustředěna jen na jedné straně:



Podobně jako předtím máme

$$P_{(\tilde{H}_0 \text{ platí})}\Big(\text{nastává chyba 1. druhu}\Big) = P_{(\tilde{H}_0 \text{ platí})}\Big(\text{zamítáme } \widetilde{\mathbf{H}}_0\Big) =$$

$$= P_{(\tilde{H}_0 \text{ platí})}\Big(\ T > t_{1-\alpha; n-1}\ \Big) = \alpha$$

Hodnota statistiky T zůstane stejná jako předtím, tedy $t = 1.75$, a protože pro $\alpha = 0.05$ máme splněno zamítací kritérium

$$t = 1.75 > 1.677 \doteq t_{0.95;\,48} = t_{1-\alpha;\,n-1} \ ,$$

hypotézu $\widetilde{\mathbf{H}}_0$ **ZAMÍTNEME**.

(Pozor, jde o jednostranný test, takže kvantil je jiný! Veškerou chybu jsme spotřebovali jen na kladné hodnoty. A toto malé zvětšení, oproti oboustrannému testu, už stačilo na zamítnutí.)

Pro $\alpha = 1\%$ pak máme
$$t = 1.75 \not> 2.407 \doteq t_{0.99;\ 48}\ ,$$
takže při této hladině hypotézu $\widetilde{\mathbf{H}}_0$ naopak **NEZAMÍTNEME**.

Pomocí intervalového odhadu:

Kritérium pro zamítnutí $\widetilde{\mathbf{H}}_0$ na hladině α
$$t > t_{1-\alpha;\, n-1}$$
se dá ekvivalentně přepsat (opět při vyjádření $t = \frac{\overline{\boldsymbol{x}}-\mu_0}{s_{\boldsymbol{x}}}\sqrt{n}$) jako
$$\mu_0 \notin \left\langle\ \overline{\boldsymbol{x}} - \frac{s_{\boldsymbol{x}}}{\sqrt{n}} \cdot t_{1-\alpha;\, n-1}\ ,\quad +\infty\ \right) \quad =: \langle \mu_D,\ +\infty)$$
což je hledaný dolní interval spolehlivosti.

Při vyčíslení pro $\alpha = 5\%$, tj. $t_{1-\alpha;\, n-1} = t_{0.95;\, 48} \doteq 1.677$, tedy dostaneme
$$\langle \mu_D,\ +\infty) = \left\langle\ 8.4 - \frac{1.6}{\sqrt{49}} \cdot 1.677\ ,\quad +\infty\right) = \langle 8.017,\ +\infty)$$
Protože máme $\mu_0 = 8 \notin \langle 8.017,\ +\infty) = \langle \mu_D,\ +\infty)$, hypotézu $\widetilde{\mathbf{H}}_0$ **ZAMÍTÁME** na hladině 5%. (Výsledek opět dopadne stejně jako při testovací statistice, protože je to ekvivalentní princip.)

Tvar intervalu spolehlivosti si můžeme intuitivně zapamatovat takto:

Při pravdivosti $\widetilde{\mathbf{H}}_0$ je $\mu \leq \mu_0$. Protože $\langle \mu_D,\ \infty)$ představuje dolní interval spolehlivosti 95% pro μ, musí být s touto pravděpodobností v tomto intervalu i μ_0. Pokud není (což nastane jen s 5% pravděpodobností), je to důvod k zamítnutí.

Důležitá poznámka: Všimněme si, že jsme došli k těmto (zdánlivě protichůdným výsledkům):
na hladině $\alpha = 5\%$ jsme

- hypotézu $\mu = \mu_0$ nezamítli
- hypotézu $\mu \leq \mu_0$ zamítli

přestože nezamítnutý případ je podpřípadem zamítnutého! To vypadá sice jako rozpor, ale ve skutečnosti v každém z případů testujeme hypotézy jiným způsobem. Jak už bylo napsáno výše, chyba se v případě oboustranného testu rozloží symetricky na obě strany, zatímco u jednostranného testu je nahromaděna jen na jednom konci.

Podrobnější zdůvodnění tvaru zamítacího kritéria pro test nulové hypotézy $\mu \leq \mu_0$ s neznámým rozptylem:

Nejdříve si pro zjednodušení uvědomme následující věc:
Jestliže máme dvě veličiny X, Y takové, že $X \leq Y$ (tj. $X(\omega) \leq Y(\omega)$ pro všechna $\omega \in \Omega$), pak platí, že

- $E(X) \leq E(Y)$ pokud střední hodnoty existují,
- $P(c < X) \leq P(c < Y)$ pro všechna $c \in \mathbb{R}$.

A nyní to zdůvodnění: Abychom více zdůraznili závislost veličiny $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ na parametru μ, budeme ji vyznačovat jako X_μ a podobně to budeme psát u statistiky $T_\mu = \frac{\overline{\mathbf{X}}_\mu - \mu_0}{S_{\mathbf{X}_\mu}}\sqrt{n}$. Je nutné zdůraznit, že za předpokladu nulové hypotézy (tj. že $\mu \leq \mu_0$) statistika T_μ obecně **NEMÁ** Studentovo t-rozdělení (t-rozdělení se objeví právě jen pokud $\mu = \mu_0$).

Nyní předpokládejme platnost nulové hypotézy $\mathbf{H}_0: \ \mu \leq \mu_0$. Pak máme:

$$\mu \leq \mu_0 \quad \Rightarrow \quad T_\mu = \underbrace{\frac{\overline{\boldsymbol{X}}_\mu - \mu_0}{S_{\boldsymbol{X}_\mu}}\sqrt{n}}_{\text{složitější rozdělení}} \quad = \quad \frac{\overline{\boldsymbol{X}}_\mu - \mu}{S_{\boldsymbol{X}_\mu}}\sqrt{n} + \underbrace{\frac{\mu - \mu_0}{S_{\boldsymbol{X}_\mu}}\sqrt{n}}_{\leq 0} \quad \leq \quad \underbrace{\frac{\overline{\boldsymbol{X}}_\mu - \mu}{S_{\boldsymbol{X}_\mu}}\sqrt{n}}_{t_{(n-1)}-\text{rozdělení}} \ =: U_\mu$$

Tedy dostali jsme, že $T_\mu \leq U_\mu$ a U_μ má $t_{(n-1)}$-rozdělení s $n-1$ stupni volnosti. Z toho máme, že:

$$E(T_\mu) \leq E(U_\mu) = 0$$

Můžeme tak očekávat, že hodnoty statistiky T_μ budou především v intervalu $(-\infty, 0\rangle$. Jako obor $\widetilde{W} \subseteq \mathbb{R}$ takových hodnot veličiny T, kdy už budeme zamítat, si proto zvolíme

$$\widetilde{W} : (u_1, \infty) \ ,$$

kde požadujeme, aby $u_1 \in \mathbb{R}$ bylo nejmenší takové, aby chyba 1. druhu byla nejvýše α, tj.

$$(\forall \mu \leq \mu_0) \quad \alpha \geq P_{(\mathbf{H}_0 \text{ platí})}\Big(\text{nastává chyba 1. druhu}\Big) = P_{(\mathbf{H}_0 \text{ platí})}\Big(\text{zamítáme } \mathbf{H}_0\Big) =$$
$$= P_{(\mathbf{H}_0 \text{ platí})}\Big(\ T_\mu \in \widetilde{W} \ \Big) = P_{(\mathbf{H}_0 \text{ platí})}\Big(\ u_1 < T_\mu \ \Big)$$

A teď si jen určíme, kolik musí být u_1 a současně ukážeme, že největší možná chyba nastává pro případ $\mu = \mu_0$:

Z toho, že $T_\mu \leq U_\mu$ a veličiny U_μ a T_{μ_0} mají obě $t_{(n-1)}$-rozdělení s $n-1$ stupni volnosti ihned dostaneme, že

$$P_{(\mathbf{H}_0 \text{ platí})}\Big(u_1 < T_\mu\Big) \leq P_{(\mathbf{H}_0 \text{ platí})}\Big(u_1 < U_\mu\Big) = 1 - F_{t_{(n-1)}}(u_1) = P_{(\mathbf{H}_0 \text{ platí})}\Big(u_1 < T_{\mu_0}\Big)$$

Vidíme tedy, že $P_{(\mathbf{H}_0 \text{ platí})}\Big(u_1 < T_\mu\Big) \leq P_{(\mathbf{H}_0 \text{ platí})}\Big(u_1 < T_{\mu_0}\Big) \leq \alpha$ a hledané nejmenší u_1 tak musí splňovat, že

$$P_{(\mathbf{H}_0 \text{ platí})}\Big(u_1 < T_{\mu_0}\Big) = \alpha$$

a protože T_{μ_0} má Studentovo rozdělení, je tudíž

$$u_1 = t_{1-\alpha;\, n-1}$$

a kritérium pro **ZAMÍTNUTÍ** je tak skutečně tvaru

$$\text{zamítáme } \mathbf{H}_0 \text{ (na dané hladině } \alpha) \quad \Leftrightarrow \quad t > t_{1-\alpha;\, n-1} \ .$$