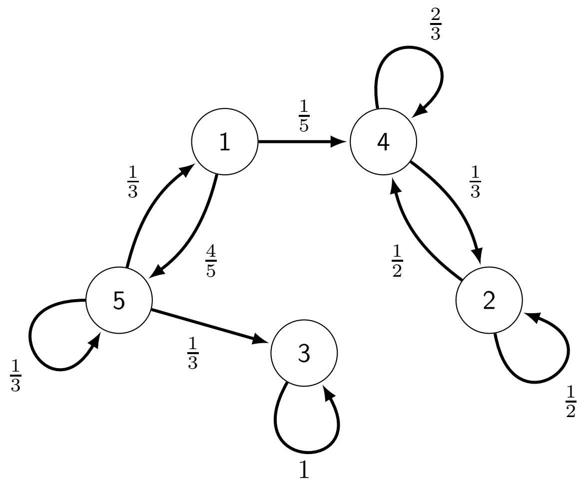
14. cvičení z PSI

16. - 20. května 2022

Poznámka: Postupné změny rozdělení pravděpodobnosti V Markovově řetězci během jednotlivých kroků si můžeme představovat tak, že máme k dispozici dané množství kapaliny (o objemu 1), které se přelévá mezi jednotlivými stavy. Přechodné stavy se pak vyznačují tím, že to, co z nich "odteče" do trvalých stavů, se už do nich nevrátí, takže celkové množství kapaliny v těchto stavech se postupně v limitě sníží až k nule.

14.1 Markovovův řetězec je dán grafem:



Stacionární rozdělení jsou tvaru $\boldsymbol{p}_{stac} = (1-\alpha)\cdot \boldsymbol{p}_{K_1} + \alpha \cdot \boldsymbol{p}_{K_2} = \left(0,\ \frac{2}{5}\alpha,\ 1-\alpha,\ \frac{3}{5}\alpha,\ 0\right)$, kde $0 \le \alpha \le 1$.

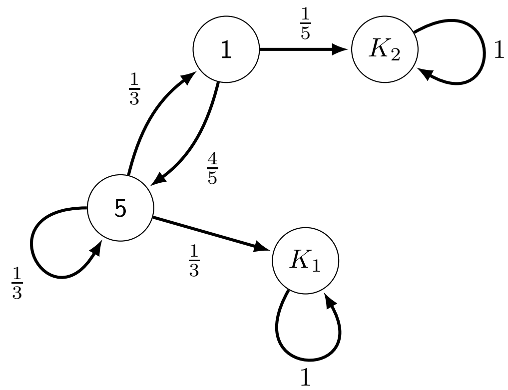
(a) Posuďte, zda libovolné počáteční rozdělení konverguje k některému stacionárnímu. K jakému stacionárnímu rozdělení konverguje počáteční rozdělení pravděpodobnosti, jestliže vyjdeme ze stavu 1?

(b) Odhadněte stav ve výchozím čase t, víte-li, že v čase $t+2$ byl řetězec ve stavu 2.

Řešení:
(a) Protože všechny komponenty mají periodu 1, tak libovolné počáteční rozdělení konverguje k nějakému stacionárnímu rozdělení.

Předpokládejme teď, že jsme ve stavu 1. Abychom našli, ke kterému stacionárnímu rozdělení konverguje toto počáteční rozdělení, potřebujeme zjistit hodnotu α.

K jejímu nalezení si vytvoříme nový Markovovům řetězec M', kde komponenty K_1 a K_2 nahradíme absorbčními stavy, které si označíme stejně (viz poznámky k Markovovým řetězcům).



Při pořadí stavů $K_1, K_2, 1, 5$ pak počáteční rozdělení $\widetilde{\mathbf{p}}(0) = (0,0,1,0)$ řetězce M' konverguje ke stacionárnímu rozdělení $\widetilde{\mathbf{p}}_{stac} = (1-\alpha, \alpha, 0, 0)$, konkrétně

$$\widetilde{\mathbf{p}}_{stac} = \widetilde{\mathbf{p}}(\infty) = \lim_{n\to\infty} \widetilde{\mathbf{p}}(n) = \lim_{n\to\infty} \widetilde{\mathbf{p}}(0)\cdot\widetilde{\mathbf{P}}^n = \widetilde{\mathbf{p}}(0)\cdot\lim_{n\to\infty}\widetilde{\mathbf{P}}^n = \widetilde{\mathbf{p}}(0)\cdot\widetilde{\mathbf{P}}^\infty$$

kde $\widetilde{\mathbf{P}}$ je matice přechodu řetězce M'. Potřebujeme tedy spočítat $\widetilde{\mathbf{P}}^\infty$ pro matici přechodu (pro pořadí stavů $K_1, K_2, 1, 5$)

$$\widetilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 4/5 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{pmatrix},$$

kde

$$\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1/5 \\ 1/3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 4/5 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Dále je

$$\left(\mathbf{I}_2 - \mathbf{Q}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4/5 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\underbrace{1\cdot\frac{2}{3} - \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{3}}_{=5/2}} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & 4/5 \\ 1/3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 & 2 \\ 5/6 & 5/2 \end{pmatrix}$$

Fundamentální matice tohoto řetězce je

$$\mathbf{F} = \left(\mathbf{I}_2 - \mathbf{Q}\right)^{-1}\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 5/3 & 2 \\ 5/6 & 5/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1/5 \\ 1/3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 5/6 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

Celkem tedy dostaneme

$$\widetilde{\mathbf{P}}^\infty = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \left(\mathbf{I}_2 - \mathbf{Q}\right)^{-1}\mathbf{R} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 5/6 & 1/6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a asymptotické rozdělení tak je

$$\widetilde{\boldsymbol{p}}(\infty) = \widetilde{\boldsymbol{p}}(0)\cdot\widetilde{\mathbf{P}}^\infty = (0,0,1,0)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 5/6 & 1/6 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (2/3, 1/3, 0, 0)\ .$$

Tudíž $(1-\alpha,\alpha,0,0) = \widetilde{\boldsymbol{p}}_{stac} = \widetilde{\boldsymbol{p}}(\infty) = (2/3, 1/3, 0, 0)$ a $\alpha = \frac{1}{3}$.

Když v původním řetězci vyjdeme za stavu 1 tak se asymptoticky přiblížíme k rozdělení

$$\boldsymbol{p}_{stac} = \tfrac{2}{3}\cdot \boldsymbol{p}_{K_1} + \tfrac{1}{3}\cdot \boldsymbol{p}_{K_2} = \left(0,\ \tfrac{2}{15},\ \tfrac{2}{3},\ \tfrac{1}{5},\ 0\right) \ .$$

Alternativní postup: Jak je vidět, k nalezení hodnoty α stačí znát např. první sloupec matice $\widetilde{\boldsymbol{P}}^{\infty}$, který je tvaru $\mathbf{u} = (1, 0, 1-\alpha, \beta)^T$. Místo počítání fundamentální matice můžeme využít vztahu

$$\widetilde{\boldsymbol{P}}\cdot\widetilde{\boldsymbol{P}}^{\infty} = \widetilde{\boldsymbol{P}}^{\infty}$$

ze kterého speciálně máme

$$\widetilde{\boldsymbol{P}}\cdot\mathbf{u}^T = \mathbf{u}^T$$

neboli

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1-\alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1-\alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{4}{5}\beta \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{3}(1-\alpha) + \frac{1}{3}\beta \end{pmatrix}$$

Vyřešením rovnic

$$1-\alpha = \tfrac{4}{5}\beta$$

$$\beta = \tfrac{1}{3}\left(1 + 1 - \alpha + \beta\right)$$

tak máme $\alpha = \frac{1}{3}$ a $\beta = \frac{5}{6}$.

(b) Pomocí metody maximální věrohodnosti budeme hledat stavy i (může jich být i víc!), ve kterých nastává maximum funkce

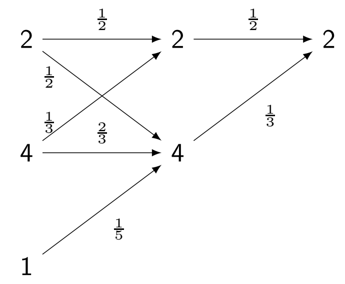
$$L(i) = P(X_t = i,\ X_{t+2} = 2)\ .$$

Hodnoty jednotlivých stavů v čase t nemáme zadány (ale mohlo by se stát, že zadány budou!). Budeme tedy předpokládat, že všechny stavy jsou na tom v té chvíli stejně (jinak bychom pochopitelně ani nemohli dál pokračovat). Tedy budeme předpokládat, že $P(X_t = 1) = \cdots = P(X_t = 5) = c = konst.$ (zřejmě je $c = \frac{1}{5}$, ale pro nás je podstatné jen to, že c je nenulové). Máme tedy

$$L(i) = P(X_t = i,\ X_{t+2} = 2) = \underbrace{P(X_t = i)}_{=c}\cdot\underbrace{P(X_{t+2} = 2|\ X_t = i)}_{=(\mathbb{P}^2)_{i2}} = c\cdot\sum_{j=1}^{5} p_{ij}\cdot p_{j2}$$

kde p_{ab} jsou hodnoty matice přechodu $\mathbb{P}$ (proč to takto funguje - viz "Poznámky k Markovovým řetězcům"). Při úpravě jsme jen využili známou rovnost $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B|A)$.

Hodnoty $L(i)$ zjistíme buď jako hodnoty ve 2. sloupci druhé mocniny matice přechodu $\mathbb{P}$ anebo (což bývá méně výpočetně náročné) si to můžeme usnadnit obrázkem, který znázorňuje všechny cesty končící ve stavu 2 o délce dvou kroků:



Dostáváme tak hodnoty

$L(1) = c \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} = c \cdot \frac{1}{15}$

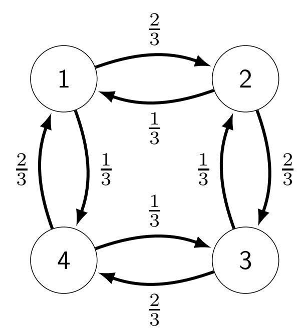
$L(2) = c \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\right) = c \cdot \frac{5}{12}$

$L(3) = L(5) = 0$

$L(4) = c \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}\right) = c \cdot \frac{7}{18}$

Vidíme tedy, že nejvěrohodnější stav v čase t byl stav 2.

14.2 Markovovův řetězec je dán grafem:



(a) Napište matici přechodu, klasifikujte stavy a stanovte všechny komponenty.

(b) Stanovte pravděpodobnosti přechodu ze stavu 1 do stavu 4 po právě 3 krocích.

(c) Popište Markovovův řetěz, který vznikne aplikováním d kroků, kde d je perioda původních stavů.

(d) Najděte stacionární rozdělení.

(e) Konverguje rozdělení stavů ke stacionárnímu? Za jakých podmínek? Odůvodněte.

Řešení:

Cvičení 1.1: `http://cmp.felk.cvut.cz/~navara/stat/MarkovCvic_print.pdf`

(a) Odpovídající matice přechodu je

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Všechny stavy jsou trvalé a navzájem propojené cestami. Tvoří tedy jedinou komponentu. V komponentě mají všechny stavy stejnou periodu π.

Její hodnotu zjistíme takto (viz postup hledání periody v "Poznámky k Markovovým řetězcům"):

- Perioda π dané komponenty musí dělit délku libovolné uzavřené cesty (vedoucí v této komponentě). Při letmém zkoušení cest nacházíme v grafu uzavřené cesty sudé délky a dokonce určitě máme uzavřenou cestu délky 2. Musí být buď $\pi = 1$ nebo $\pi = 2$.

- Vypadá to tedy, že perioda by měla být 2. Jestliže je perioda skutečně $\pi = 2$, existuje cyklický rozklad komponenty K délky 2, tj. K se rozloží na disjunktní množiny M_1 a M_2 takové, že uvnitř těchto množin M_i nesmějí vést mezi stavy šipky a naopak všechny šipky z dané množiny M_1 směřují do M_2 a šipky z M_2 zase zpět do M_1.

  Množiny M_i jsou určeny tak, že

  – stavy a a b jsou ve stejné množině M_i (pro nějaké $i = 1, 2$), jestliže jsou spojeny orientovanou cestou, jejíž délka je dělitelná dvěma.

  Naopak, jestliže takový cyklický rozklad délky 2 najdeme, bude perioda skutečně $\pi = 2$.

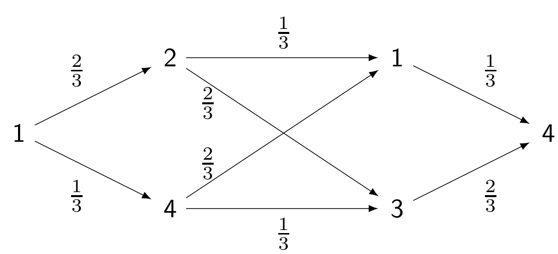
Zkusíme tedy množiny s takovýmito vlastnostmi vytvořit a to tak, že se díváme, kam se z daného stavu určitě dostaneme po sudém počtu kroků. Zřejmě stačí vzít množiny stavů $\{1, 3\}$ a $\{2, 4\}$, které cyklický rozklad tvoří. Tedy opravdu je $\pi = 2$.

(b) Pravděpodobnost přechodu z 1 do 4 ve třech krocích je

$$P(X_{t+3} = 4 | X_t = 1) = (\mathbf{P}^3)_{1,4} = \sum_{i,j=1}^{4} p_{1i} p_{ij} p_{j4} \ .$$

Místo počítání třetí mocniny matice přechodu si můžeme pomoct diagramem všech možných cest.

Všechny cesty z 1 do 4 ve třech krocích jsou popsány takto:



Cesty jsou celkem 4, přičemž jejich pravděpodobnosti jsou:

$$P(1 \to 4 \to 3 \to 4) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$$

$$P(1 \to 4 \to 1 \to 4) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$$

$$P(1 \to 2 \to 3 \to 4) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$$

$$P(1 \to 2 \to 1 \to 4) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$$

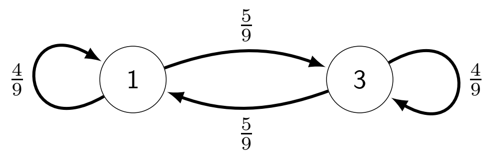
Tedy pravděpodobnost přechodu z 1 do 4 ve třech krocích je součet těchto pravděpodobností, tedy $\frac{2}{27} + \frac{2}{27} + \frac{8}{27} + \frac{2}{27} = \frac{14}{27}$.

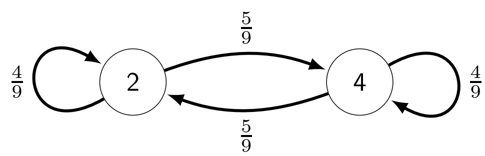
(c) Když např. začínáme ve stavech množiny $\{1,3\}$, pak v sudém počtu kroků se budeme opět nacházet v množině $\{1,3\}$ (a v lichém počtu kroků v množině $\{2,4\}$).

Řetězec M' daný aplikováním $d=2$ kroků je určený maticí $\mathbf{P}^2$ a rozpadne se tak na komponenty, které jsou tvořeny množinami cyklického rozkladu, tj. množinami $M_1=\{1,3\}$ a $M_2=\{2,4\}$, z nichž každá bude mít periodu 1.

Máme:

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/9 & 0 & 5/9 & 0 \\ 0 & 4/9 & 0 & 5/9 \\ 5/9 & 0 & 4/9 & 0 \\ 0 & 5/9 & 0 & 4/9 \end{pmatrix}.$$





(d) Řetězec má jen jednu komponentu a stacionární rozdělení je tak jen jedno. Protože všechny vrcholy v grafu mají stejné vlastnosti, můžeme toto rozdělení uhádnout

$$\mathbf{p}_{stac} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

(a pak jen snadno ověřit), že to skutečně stacionární rozdělení je.

(e) Řetězec je sice nerozložitelný (tj. má jen jednu komponentu), ale není ergodický (protože má periodu větší než 1). Tedy ne každé počáteční rozdělení (např. $\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0\right)$) konverguje ke stacionárnímu. Zřejmě totiž

$$\left(\tfrac{1}{2},0,\tfrac{1}{2},0\right)\cdot\mathbf{P} = \left(0,\tfrac{1}{2},0,\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\left(0,\tfrac{1}{2},0,\tfrac{1}{2}\right)\cdot\mathbf{P} = \left(\tfrac{1}{2},0,\tfrac{1}{2},0\right)$$

takže tato dvě rozdělení $\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0\right)$ a $\left(0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$ oscilují navzájem mezi sebou (tj. stále přeskakujeme mezi množinami M_1 a M_2). Vidíme, že tato dvě rozdělení NEKONVERGUJÍ ke stacionárnímu rozdělení.

Ke stacionárnímu rozdělení z bodu (d) konvergují pouze taková počáteční rozdělení $\mathbf{p} = (p_1,p_2,p_3,p_4)$, pro která "objem kapaliny" v M_1 je stejný jako "objem kapaliny" v M_2 (tj. je roven $\frac{1}{2}$), tedy $p_1+p_3=\frac{1}{2}=p_2+p_4$.

Že je to nutná podmínka, je zřejmé z toho, že objemy kapalin mezi M_1 a M_2 se při jednom kroku jen vyměňují a po dvou krocích se tak objem kapaliny v M_i nemění. Pro stacionární rozdělení jsou tyto objemy rovny $\frac{1}{2}$. Pokud tedy máme konvergenci, musí být objem v M_i roven $\frac{1}{2}$.

Že je to postačující podmínka, naopak plyne z toho, že po dvou krocích (viz část (c)) tvoří M_i komponenty "zkráceného řetězce" M' a mají periodu 1, tedy každé počáteční rozdělení (na tomto "zkráceném" řetězci M') konverguje ke stacionárnímu. Z podmínky $p_1 + p_3 = \frac{1}{2} = p_2 + p_4$ toto stacionární rozdělení musí nutně být $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. Toto platí jak pro všechny sudé kroky původního řetězce M, tak pro všechny liché kroky původního řetězce M. Neboli tyto dvě vybrané posloupnosti sudých kroků a lichých kroků dávají totéž a proto skutečně máme konvergenci původní posloupnosti (v M).

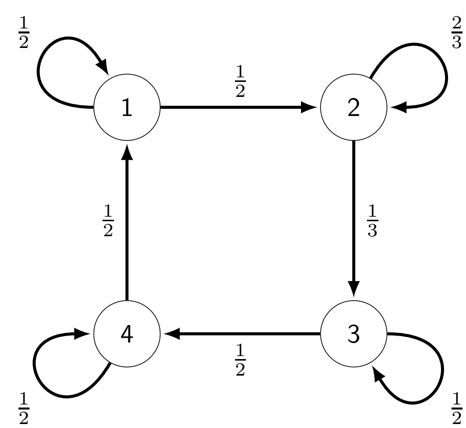
14.3 (maximálně věrohodné odhady)
Odhadněte stav i a k Markovova řetězce s maticí přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

z pozorované posloupnosti stavů $(2, i, k, 3)$.

Řešení:
Cvičení 3.1: `http://cmp.felk.cvut.cz/~navara/stat/MarkovCvic_print.pdf`

Pro větší názornost si nakreslíme diagram:



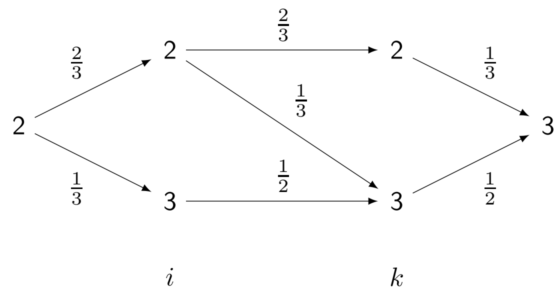
Stav odhadneme pomocí maximální věrohodnosti

$$L(i,k) = P\Big(X_0 = 2,\ X_1 = i,\ X_2 = k,\ X_3 = 3\Big).$$

V našem případě tak máme

$$L(i,k) = P(X_0 = 2) \cdot p_{2,i} \cdot p_{i,k} \cdot p_{k,3}\ .$$

Hodnotu počáteční pravděpodobnosti $c := P(X_0 = 2)$ sice neznáme, ale ani jí nepotřebujeme k výpočtu (za předpokladu, že byla nenulová). Abychom zjistili, které stavy i a k vůbec přicházejí (pro nenulovou věrohodnost) v úvahu, nakreslíme následující obrázek:



Vypsali jsme všechny stavy, na které přejde v jednom kroku počáteční stav 2 (druhý sloupec) a pak všechny stavy, které přejdou na koncový stav 3 (třetí sloupec). Mezi těmito dvěma sloupci nakreslíme všechny možné způsoby přechodu. Celkem máme tři možné cesty z počátečního 2 do koncového 3. Pak snadno dostáváme:

$$\begin{aligned}
L(2,2) &= c \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{3} &&= \tfrac{4}{27} \cdot c \\
L(2,3) &= c \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{2} &&= \tfrac{1}{9} \cdot c = \tfrac{3}{27} \cdot c \\
L(3,3) &= c \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} &&= \tfrac{1}{12} \cdot c \\
L(i,k) &= 0\,, && \text{jinak.}
\end{aligned}$$

Případ, pro který je hodnota věrohodnosti nejvyšší, je tedy $i = 2$ a $k = 2$ (za předpokladu, že $P(X_0 = 2) > 0$, jinak jsou všechny čtyři stavy stejně věrohodné).

14.4 (maximálně věrohodné odhady)

Markovův řetězec má dva stavy 1 a 2. Pravděpodobnost přechodu ze stavu 1 do stavu 2 je p, pravděpodobnost přechodu ze stavu 2 do stavu 1 je q. Z pozorované posloupnosti stavů

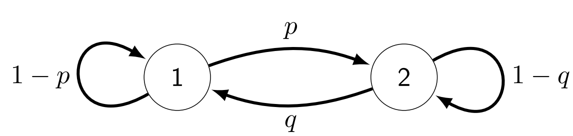
$$(1,2,2,1,1,1,2,1,1,1,2,2,1,1,1,1)$$

odhadněte parametry p, q.

Řešení:

Cvičení 3.3: `http://cmp.felk.cvut.cz/~navara/stat/MarkovCvic_print.pdf`

Markovovův řetězec má graf



a matici přechodu

$$\mathbb{P} = (p_{ij})_{i,j\in\{1,2\}} = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}.$$

Nechť n_{ij} jsou naměřené četnosti přechodu ze stavu i do j v naměřené posloupnosti stavů $(i_0, i_1, \ldots, i_k)$. Věrohodnostní funkce je pak tvaru

$$L(p,q) = P(X_0 = i_0,\ X_1 = i_1,\ \dots, X_k = i_k) = P(X_0 = i_0) \cdot \prod_{\ell=0}^{k-1} p_{i_\ell, i_{\ell+1}} =$$

$$= P(X_0 = i_0) \cdot \underbrace{(1-p)^{n_{11}} \cdot p^{n_{12}}}_{=L_1(p)} \cdot \underbrace{q^{n_{21}} \cdot (1-q)^{n_{22}}}_{=L_2(q)}$$

Jestliže budeme předpokládat, že $P(X_0 = i_0) \neq 0$ (jinak bychom neměli co zjišťovat, protože všechny možnosti by byly stejně věrohodné), pak je jasné, že maxima bude dosaženo, pokud budou maximalizovány obě funkce L_i každá v dané proměnné.

Stačí tedy zjistit, kdy obecně nabývá maxima funkce

$$L(\alpha) := (1-\alpha)^n \cdot \alpha^m$$

pro proměnnou $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$. Po zlogaritmovaní a zderivovaní máme

$$\lambda(\alpha) = \ln(L(\alpha)) = n \ln(1-\alpha) + m \ln \alpha$$

$$0 = \lambda'(\alpha) = -\frac{n}{1-\alpha} + \frac{m}{\alpha} = \frac{m - \alpha(n+m)}{(1-\alpha)\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{m}{n+m}$$

Pro původní $L(p,q)$ pak dostaneme maximum pro $p = \frac{n_{11}}{n_{11}+n_{12}}$ a $q = \frac{n_{22}}{n_{21}+n_{22}}$.

Pro naše zadání

$$(1, 2, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$$

a odpovídající tabulku n_{ij}:

$i \backslash j$	1	2
1	7	3
2	3	2

dostaneme tedy nejvěrohodnější matici přechodu tvaru

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \frac{7}{7+3} & \frac{3}{7+3} \\ \frac{3}{3+2} & \frac{2}{3+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Tento výsledek je i heuristicky očekávatelný, protože pokud jsme např. ze stavu 1 šli 7-krát do stavu 1 a 3-krát do stavu 2, pak přirozeně nejlepší poměr mezi $1-p$ a p je $(1-p) : p = 7 : 3$, neboli $p = \frac{3}{7+3}$.

14.5 (aplikace Markovových řetězců, asymptotické pravděpodobnosti stavů)

Alice trefí terč s pravděpodobností 1/3, Bob s pravděpodobností 1/2. Pokud hráč zasáhne terč, střílí dále, pokud mine, je na řadě druhý hráč. Začíná Alice. Alice vyhrává, pokud trefí terč 2× za sebou, Bob vyhrává, pokud trefí terč 3× za sebou. Pro oba hráče stanovte pravděpodobnosti výhry.

Řešení:

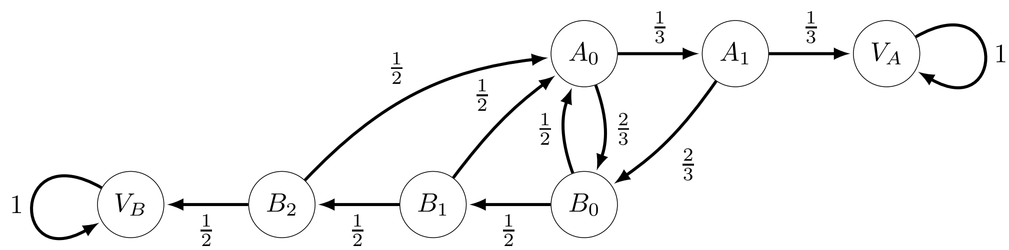
Cvičení 2.6: `http://cmp.felk.cvut.cz/~navara/stat/MarkovCvic_print.pdf`

Pokud bychom rozlišovali nejen to, který hráč je na řadě, ale i kolik již má úspěšných pokusů, potřebovali bychom 7 stavů:

- V_A - vyhrála Alice,

- V_B - vyhrál Bob,
- A_i - Alice má právě za sebou i úspěšných pokusů $i \in \{0, 1\}$,
- B_i - Bob má právě za sebou i úspěšných pokusů $i \in \{0, 1, 2\}$.

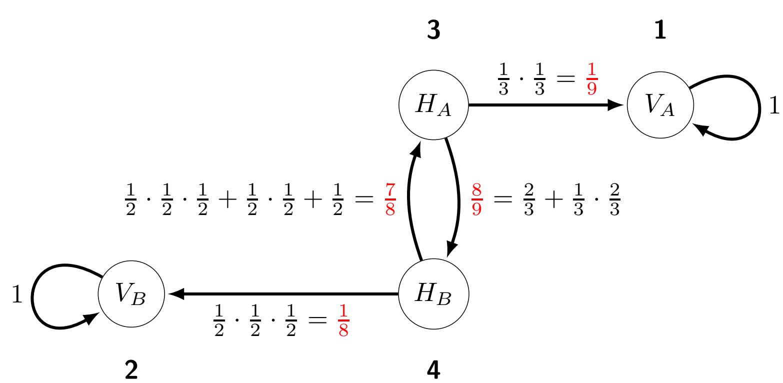
Odpovídající diagram by byl tento:



Protože nás zajímají pouze pravděpodobnosti výhry obou hráčů, můžeme si situaci popsat jednodušším způsobem a to tak, že rozlišíme pouze stavy:

- V_A - vyhrála Alice,
- V_B - vyhrál Bob,
- H_A - na řadě je Alice,
- H_B - na řadě je Bob,

kde celou sérii úspěšných pokusů daného hráče považujeme za jeden krok. Tento krok pak končí výhrou hráče s pravděpodobností $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ pro Alici, $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ pro Boba, nebo se na řadu dostává druhý hráč:



Stavy si očíslujeme tak, aby první byly ty absorpční a teprve po nich následovali ty přechodné:

$1 := V_A$ (vyhrála Alice), $2 := V_B$ (vyhrál Bob), $3 := H_A$ (na řadě je Alice), $4 := H_B$ (na řadě je Bob).

pravděpodobnosti výher Alice a Boba zjistíme z asymptotického rozdělení pravděpodobnosti $\boldsymbol{p}(\infty)$ s počátečním rozdělením

$$\boldsymbol{p}(0) = (0, 0, 1, 0) \ .$$

Je tedy potřeba spočítat $\mathbf{P}^\infty$ pro matici přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/9 & 0 & 0 & 8/9 \\ 0 & 1/8 & 7/8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{pmatrix},$$

kde

$$\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1/9 & 0 \\ 0 & 1/8 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 8/9 \\ 7/8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Fundamentální matice tohoto řetězce je

$$\mathbf{F} = \left(\mathbf{I}_2 - \mathbf{Q}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -8/9 \\ -7/8 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = (9/2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 8/9 \\ 7/8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/2 & 4 \\ 63/16 & 9/2 \end{pmatrix}$$

a tedy

$$\left(\mathbf{I}_2 - \mathbf{Q}\right)^{-1}\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 9/2 & 4 \\ 63/16 & 9/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/9 & 0 \\ 0 & 1/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 7/16 & 9/16 \end{pmatrix}.$$

Celkem tedy dostaneme

$$\mathbf{P}^{\infty} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \left(\mathbf{I}_2 - \mathbf{Q}\right)^{-1}\mathbf{R} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 7/16 & 9/16 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a asymptotické rozdělení tak je

$$\boldsymbol{p}(\infty) = \boldsymbol{p}(0) \cdot \mathbf{P}^{\infty} = (0,0,1,0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 7/16 & 9/16 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (1/2, 1/2, 0, 0)\ .$$

Zjistili jsme tak (vcelku překvapivě), že pravděpodobnosti výhry Alice i Boba jsou stejné (a sice $\frac{1}{2}$), pokud bude začínat Alice jako první.

Alternativní postup: K nalezení hodnoty výhry Alice (a tím i výhry Boba) stačí znát první sloupec matice $\mathbf{P}^{\infty}$, který je tvaru $\mathbf{u} = (1,0,a,c)^T$. Místo počítání fundamentální matice můžeme zase využít vztahu

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^{\infty} = \mathbf{P}^{\infty}$$

ze kterého speciálně máme

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{u}^T = \mathbf{u}^T$$

neboli

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/9 & 0 & 0 & 8/9 \\ 0 & 1/8 & 7/8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/9 + 8/9 \cdot c \\ 7/8 \cdot a \end{pmatrix}$$

Vyřešením rovnic

$$a = \tfrac{1}{9} + \tfrac{8}{9}c$$
$$c = \tfrac{7}{8}a$$

tak máme $P(V_A) = a = \frac{1}{2}$ a $c = \frac{7}{16}$.

Poznámka: Uvažujme následující obecnější případ. Pro $n, m, a, b \in \mathbb{N}$ předpokládejme, že

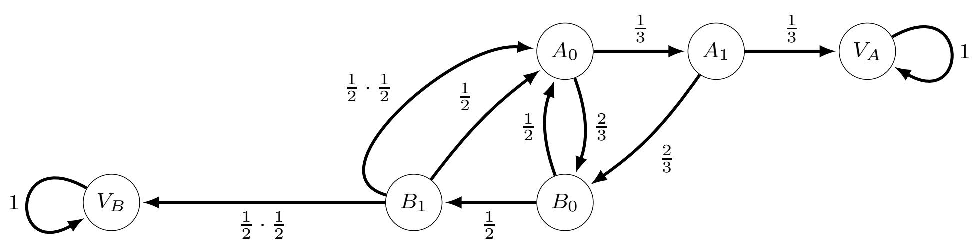
- Alice má pravděpodobnost zásahu $\frac{1}{n}$ a k výhře musí mít sérii a úspěšných pokusů a podobně
- Bob má pravděpodobnost zásahu $\frac{1}{m}$ a k výhře musí mít sérii b úspěšných pokusů a dále, že
- $\left(\frac{1}{n}\right)^a < \left(\frac{1}{m}\right)^b$ a proto opět necháme začít Alici.

Kdybychom opět chtěli, aby Alice a Bob měli stejné šance na výhru, zjistíme, že to nastane právě když bude platit

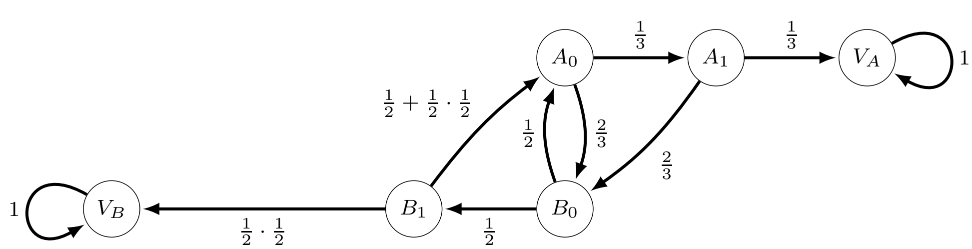
$$n^a - m^b = 1 \ .$$

V rámci teorie čísel se řešeními této rovnice zabýval Eugène Charles Catalan a v roce 1844 vyslovil hypotézu (tzv. Catalan's conjecture), že jediné řešení této rovnice v kladných přirozených číslech je právě jen $3^2 - 2^3 = 1$. Hypotézu potvrdil Preda Mihăilescu v roce 2002.

Ještě jedna poznámka: Můžeme si ještě podrobněji zdůvodnit, proč pravděpodobnosti výhry vycházejí u obou Markovových řetězců (složitějšího i jednoduššího) stejně. Pravděpodobnost výhry Boba (v obou grafech) představuje součet pravděpodobností všech cest v daném grafu vycházejících z A_0 (případně H_A) a končících v V_B. Nechť takováto cesta v prvním grafu obsahuje vrchol B_2. Protože tento vrchol je pouze průchozí a neobsahuje smyčku, můžeme např. cestu $A_0 \to \cdots \to B_1 \xrightarrow{\frac{1}{2}} B_2 \xrightarrow{\frac{1}{2}} V_B$ nahradit cestou $A_0 \to \cdots \to B_1 \xrightarrow{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} V_B$, která bude mít stejnou hodnotu pravděpodobnosti a bude cestou v novém grafu, kde jsme vrchol B_2 vynechali a příslušně změnili hodnoty šipek:



Podobně jsme v cestách, které v původním grafu obsahovaly úsek $\cdots \to B_1 \xrightarrow{\frac{1}{2}} B_2 \xrightarrow{\frac{1}{2}} A_0 \to \ldots$ nahradili tento úsek takto: $\cdots \to B_1 \xrightarrow{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} A_0 \to \ldots$ a tato nová cesta má opět stejnou pravděpodobnost jako ta, ze které vznikla. Celkově tedy zachováváme pravděpodobnost cest. Nyní máme nový graf, který má jen jednu nedokonalost a sice, že dva vrcholy jsou propojeny více než jednou šipkou. Tyto dvě šipky nyní spojíme do jedné a přiřadíme jí hodnotu součtu obou původních šipek. Tím opět zachováme pravděpodobnost cest - zde je jednodušší to zdůvodnit přes interpretaci s kapalinou: při jednom kroku proudí kapalina z B_1 do A_0 dvěma cestami, ale celkově ji přeteče stejně jako kdyby šla jen jednou cestou s odpovídajícím vyšším průtokem. Tímto tedy získáme nový graf, který už je skutečně Markovovým řetězcem:



Opakováním tohoto postupu dospějeme k jednoduššímu řetězci se čtyřmi vrcholy (viz výše), přičemž pravděpodobnosti výher zůstanou zachovány.

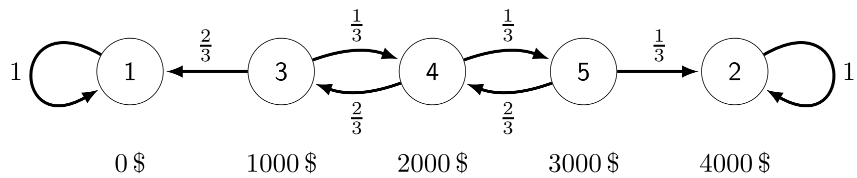
14.6 (aplikace Markovových řetězců, asymptotické pravděpodobnosti stavů)

Alice hraje v kasinu hru, kde s pravděpodobností 1/3 vyhraje. V každém kole vsadí 1000 dolarů. V případě výhry získá 1000 dolarů, v případě prohry o 1000 dolarů přijde. Alice odejde z kasina, jestliže prohraje všechny své peníze nebo bude mít 4000 dolarů. Jaká je pravděpodobnost, že Alice odejde s prázdnou, měla-li na začátku 3000 dolarů?

Řešení:

Příklad 3: `http://cmp.felk.cvut.cz/~navara/psi/pisemky/PSI150106res.pdf`

Nakreslíme si příslušný orientovaný graf:



Pro Alici uvažujme stavy

1 - odchází s prázdnou, 2 - má 4000 dolarů (a tedy odchází), 3 - má 1000 dolarů, 4 - má 2000 dolarů a 5 - má 3000 dolarů.

Stavy jsme si očíslovali tak, aby první byly ty absorpční a teprve po nich následovali ty přechodné. Na začátku má Alice 3000 dolarů, tedy je ve stavu číslo 5 a počáteční rozdělení pravděpodobnosti tak je

$$\boldsymbol{p}(0) = (0, 0, 0, 0, 1) .$$

pravděpodobnost, že Alice odejde s prázdnou odpovídá složce pro stav 1 v asymptotickém rozdělení pravděpodobnosti $\boldsymbol{p}(\infty)$.

Proč tomu tak je: Platí:

- (Podmíněná) pravděpodobnost $P\big(\underbrace{i \to \cdots \to j}_{n \text{ kroků}}\big)$ toho, že se po *právě* n krocích ze stavu i přesuneme do stavu j je
$$P\big(\underbrace{i \to \cdots \to j}_{n \text{ kroků}}\big) = \Big(\mathbf{P}^n\Big)_{i,j} .$$
To se snadno ukáže indukcí.
- Jestliže i_* je *absorpční* stav, pak (podmíněná) pravděpodobnost $P\big(\underbrace{i \to \cdots \to i_*}_{\le n \text{ kroků}}\big)$ toho, že se po *nejvýše* n krocích ze stavu i přesuneme do stavu i_* je
$$P\big(\underbrace{i \to \cdots \to i_*}_{\le n \text{ kroků}}\big) = P\big(\underbrace{i \to \cdots \to i_*}_{n \text{ kroků}}\big) = \Big(\mathbf{P}^n\Big)_{i,i_*} .$$
To je proto, že jakoukoliv posloupnost kratší než n můžeme nastavit opakovaným přidáním stavu i_* (protože je absorpční).
- Jestliže i_* je *absorpční* stav, pak (podmíněná) pravděpodobnost $P\big(\underbrace{i \to \cdots \to i_*}_{\text{konečně kroků}}\big)$ toho, že se po *konečně* mnoha krocích ze stavu i přesuneme do stavu i_* je
$$P\big(\underbrace{i \to \cdots \to i_*}_{\text{konečně kroků}}\big) = P\Big(\bigcup_n \underbrace{i \to \cdots \to i_*}_{\le n \text{ kroků}}\Big) = \lim_{n\to\infty} P\Big(\underbrace{i \to \cdots \to i_*}_{\le n \text{ kroků}}\Big) = \lim_{n\to\infty} \Big(\mathbf{P}^n\Big)_{i,i_*} = \Big(\mathbf{P}^\infty\Big)_{i,i_*} .$$

A protože $\boldsymbol{p}(\infty) = \boldsymbol{p}(0) \cdot \mathbf{P}^\infty$, můžeme tento závěr ekvivalentně vyjádřit přes rozdělení pravděpodobnosti.

Pro výpočet asymptotického rozdělení pravděpodobnosti si opět zapíšeme matici přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{pmatrix},$$

kde

$$\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Opět si určíme matici

$$\mathbf{P}^\infty := \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ (\mathbf{I}_3 - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{R} & \mathbf{0} \end{pmatrix} .$$

Spočítáme fundamentální matici $\mathbf{F} = \big(\mathbf{I}_3 - \mathbf{Q}\big)^{-1}$:

$$\Big(\mathbf{I}_3 - \mathbf{Q} \;\Big|\; \mathbf{I}_3\Big) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & -1/3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \cdots \sim$$

$$\sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 6 & 9 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right) = \Big(\mathbf{I}_3 \;\Big|\; \big(\mathbf{I}_3 - \mathbf{Q}\big)^{-1}\Big) .$$

Tedy

$$\mathbf{F} = \big(\mathbf{I}_3 - \mathbf{Q}\big)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 0 \\ -2/3 & 1 & -1/3 \\ 0 & -2/3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 6 & 9 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

a

$$\big(\mathbf{I}_3 - \mathbf{Q}\big)^{-1}\mathbf{R} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 6 & 9 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 14 & 1 \\ 12 & 3 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} .$$

Celkem tedy dostaneme

$$\mathbf{P}^\infty = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 14/15 & 1/15 & 0 & 0 & 0 \\ 12/15 & 3/15 & 0 & 0 & 0 \\ 8/15 & 7/15 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pravděpodobnost, že Alice vše prohraje, pokud na začátku měla 3000 dolarů, nyní odpovídá hodnotě

$$\Big(\mathbf{P}^\infty\Big)_{5,1} = \frac{8}{15} .$$

Alternativní postup: Hodnota pravděpodobnosti toho, že Alice odejde s prázdnou je $\Big(\mathbf{P}^\infty\Big)_{5,1}$. Stačí zase znát první sloupec matice $\mathbf{P}^\infty$, který je tvaru $\mathbf{u} = (1, 0, a, b, c)^T$. Místo počítání fundamentální matice můžeme zase využít vztahu

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^\infty = \mathbf{P}^\infty$$

ze kterého speciálně máme

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{u}^T = \mathbf{u}^T$$

neboli

$$\begin{pmatrix}1\\0\\a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 2/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0\\ 0 & 0 & 2/3 & 0 & 1/3\\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\2/3+1/3\cdot b\\2/3\cdot a+1/3\cdot c\\2/3\cdot b\end{pmatrix}$$

Vyřešením rovnic

$$a = \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}b$$

$$b = \tfrac{2}{3}a + \tfrac{1}{3}c$$

$$c = \tfrac{2}{3}b$$

tak máme $\left(\mathbf{P}^\infty\right)_{5,1} = c = \frac{8}{15}$.