3. cvičení z PST

8. února - 4. března 2022

Připomenutí: Jevy $A_1, \ldots, A_n$ jsou nezávislé $\overset{\text{def.}}{\iff}$ pro každou indexovou množinu $K \subseteq \{1, \ldots, n\}$ je

$$P\Big(\bigcap_{i \in K} A_i \Big) = \prod_{i \in K} P(A_i) \ .$$

Netriviální podmínky vzniknou pro $|K| \geq 2$. Máme tak $2^n - n - 1$ podmínek.

Speciálně: jevy A, B a C jsou nezávislé právě když:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B), \quad P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C), \quad P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$$

a

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

přičemž žádná z těchto 4 podmínek NENÍ důsledkem zbylých třech.

Příklad 3.1 *Pro hod dvěma symetrickými mincemi uvažujme jevy*

$A =$"na první minci padl líc",

$B =$"na druhé minci padl rub",

$C =$"na mincích padly různé výsledky".

Jak je to s nezávislostí jevů A, B, C?

Řešení:
Prostor všech možných výsledků jsou uspořádané dvojice hodnot na jednotlivých mincích

$$\Omega : \begin{array}{cc} (\text{líc}, \text{líc}) & (\text{líc}, \text{rub}) \\ (\text{rub}, \text{líc}) & (\text{rub}, \text{rub}) \end{array}$$

a každý výsledek bude stejně pravděpodobný. Pak máme $|A| = |B| = |C| = 2$ a tedy

$$P(A) = P(B) = P(C) = \tfrac{1}{2}$$

a dále

$$A \cap B = A \cap C = B \cap C = A \cap B \cap C = \{ \ (\text{líc}, \text{rub}) \ \} \ .$$

Tedy

$$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = P(A \cap B \cap C) = \tfrac{1}{4} \ .$$

a proto máme

$$P(A \cap B) = \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = P(A) \cdot P(B)$$

a podobně je to pro ostatní případy, zatímco

$$P(A \cap B \cap C) = \tfrac{1}{4} \neq \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C).$$

Jevy jsou tak po dvou nezávislé, ale ne celkově nezávislé.

Poznámka: Nepleťte si disjunktní jevy s nezávislými:

- A a B jsou **disjunktní** $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.
- A a B jsou **nezávislé** $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Příklad 3.2 *Náhodné jevy A a B jsou nezávislé a $P(A \cup B) = 0.545$, $P(A \cap B) = 0.105$. Určete pravděpodobnosti $P(A)$, $P(B)$ a $P(A \cap B^c)$.*

Řešení:
Jestliže využijeme nezávislosti náhodných jevů A a B, pak dostaneme

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B), \qquad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Označme si $P(A) = x$ a $P(B) = y$. Pro hledané pravděpodobnosti tak dostaneme soustavu rovnic

$$0.545 = x + y - 0.105, \qquad x \cdot y = 0.105 \Rightarrow y = \frac{0.105}{x}\,.$$

Po dosazení do první rovnice dostaneme kvadratickou rovnici pro neznámou x ve tvaru

$$x^2 - 0.65x + 0.105 = 0 \Rightarrow x_1 = 0.35, \quad x_2 = 0.3\,.$$

Ze symetrie vztahů plyne, že je

$$P(A) = 0.35, \quad P(B) = 0.3 \qquad \text{nebo} \qquad P(A) = 0.3, \quad P(B) = 0.35\,.$$

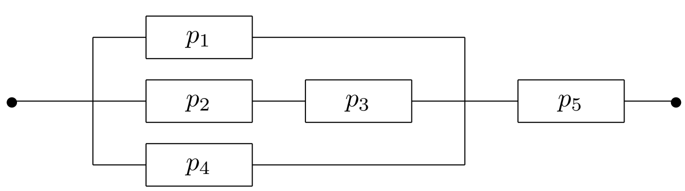
A dále pro první z možností je

$$P(A \cap B^c) = P(A) \cdot P(B^c) = 0.35 \cdot 0.7 = 0.245$$

a pro druhou volbu řešení je

$$P(A \cap B^c) = P(A) \cdot P(B^c) = 0.3 \cdot 0.65 = 0.195\ .$$

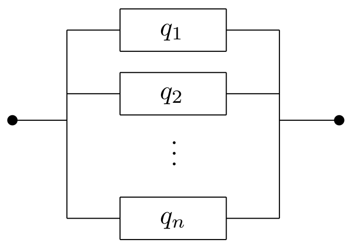
Příklad 3.3 *(operace s nezávislými jevy) Zařízení na obrázku je tvořeno zapojením bloků, které pracují nezávisle na sobě a pravděpodobností výskytu poruch jsou zadány. Vypočtěte pravděpodobnost poruchy funkce celého zařízení.*



Pravděpodobnosti vyčíslete pro $p_1 = 0.2$, $p_2 = p_3 = 0.4$, $p_4 = 0.3$ a $p_5 = 0.1$.

Řešení:
Úlohu si zjednodušíme tím, že budeme postupně nahrazovat více bloků jedním blokem, který bude mít stejnou pravděpodobnost poruchy.

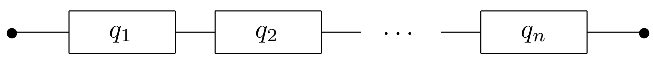
- Pro paralelní zapojení



a jevy $A_i =$"*i-tý blok (seshora) má poruchu*" je pravděpodobnost poruchy tohoto zapojení rovna

$$P(\text{"porucha paralelního zapojení"}) = P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdots P(A_n) = q_1 \cdots q_n \ .$$

- Pro sériové zapojení



a jevy $B_i =$"*i-tý blok (zleva) má poruchu*" je pravděpodobnost poruchy tohoto zapojení rovna

$$P(\text{"porucha sériového zapojení"}) = P(B_1 \cup \cdots \cup B_n) = 1 - P\big((B_1 \cup \cdots \cup B_n)^c\big) =$$

$$= 1 - P(B_1^c \cap \cdots \cap B_n^c) = 1 - P(B_1^c) \cdots P(B_n^c) = 1 - (1 - q_1) \cdots (1 - q_n) \ .$$

Pro vyřešení původního zadání teď

(a) nejdříve nahradíme sériové zapojení dvou bloků s pravděpodobnostmi poruch $p_2 = 0.4$ a $p_3 = 0.4$ jediným blokem s pravděpodobností poruchy

$$p_{2,3} = 1 - (1 - p_2)(1 - p_3) = 1 - 0.6 \cdot 0.6 = 0.64 \ .$$

(b) dále nahradíme paralelní zapojení tří bloků s pravděpodobnostmi poruch $p_1 = 0.2$, $p_{2,3} = 0.64$ a $p_4 = 0.3$ jediným blokem s pravděpodobností poruchy

$$p_{1,2,3,4} = p_1 \cdot p_{2,3} \cdot p_4 = 0.2 \cdot 0.64 \cdot 0.3 = 0.0384 \ .$$

(c) a nakonec nahradíme sériové zapojení dvou bloků s pravděpodobnostmi poruch $p_{1,2,3,4} = 0.0384$ a $p_5 = 0.1$ jediným blokem, který odpovídá celému zařízení a má pravděpodobnost poruchy

$$p_{1,2,3,4,5} = 1 - (1 - p_{1,2,3,4})(1 - p_5) = 1 - 0.9616 \cdot 0.9 = 1 - 0,86544 = 0.13456 \ .$$

Důležitá poznámka: Pro jev $A \subseteq \Omega$, kde $P(A) \neq 0$, má funkce

$$\widetilde{P}(\cdot) := P(\ \cdot\ |A)$$

všechny vlastnosti pravděpodobnosti (pro množinu výsledků Ω a σ-algebru $\mathcal{A}$). Tedy podmíněná pravděpodobnost se chová v prvním argumentu jako obyčejná pravděpodobnost. Pozor, pro druhý argument už podobné chování neplatí!

V následujících větách používáme tento základní vztah pro jevy A a B:

$$P(B \cap A) = P(B|A) \cdot P(A)$$

pokud je podmíněná pravděpodobnost $P(B|A)$ definovaná, tj. pokud je $P(A) \neq 0$.

- -

Věta o úplné pravděpodobnosti: Nechť $A_1, \ldots, A_n$ je úplný disjunktní systém jevů na prostoru všech výsledků Ω (tedy jejich sjednocením je celé Ω a jevy jsou pro dvou disjunktní).

Nechť $P(A_i) \neq 0$ pro všechna i. Pak pro každý jev $B \subseteq \Omega$ platí

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(B|A_k) \cdot P(A_k) \ .$$

Bayesova věta: Pro jevy A a B platí

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

pokud $P(A) \neq 0$ a $P(B) \neq 0$.

- -

A ve spojení s větou o úplné pravděpodobnosti máme

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B|A_k) \cdot P(A_k)} \ .$$

(Všimněte si, že výraz v čitateli je jedním ze sčítanců ve jmenovateli.)

Příklad 3.4 *Na fakultě je 50% studujících na informatice, 30% na matematice a 20% na fyzice. Z těch, co studují na informatice je 10% žen, na matematice 30% a na fyzice 20%.*

(a) *Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný studující je žena?*

(b) *Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný studující je muž na fyzice?*

(c) *Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná studentka studuje matematiku?*

Řešení:
Označme si jevy

A_1 = *"náhodně vybraný studující je informatik"*

A_2 = *"náhodně vybraný studující je matematik"*

A_3 = *"náhodně vybraný studující je fyzik"*

B = *"náhodně vybraný studující je žena"*

Jevy A_1, A_2, A_3 jsou navzájem disjunktní a jejich sjednocením je celý pravděpodobnostní prostor Ω (tvořený všemi studujícími). Tedy máme úplný systém disjunktních jevů na Ω. Dále známe

$$P(A_1) = 0.5 \qquad P(A_2) = 0.3 \qquad P(A_3) = 0.2$$
$$P(B|A_1) = 0.1 \quad P(B|A_2) = 0.3 \quad P(B|A_3) = 0.2$$

(a) Chceme znát $P(B)$. Podle věty o úplné pravděpodobnosti máme

$$P(B) = \sum_{j=1}^{3} P(B \cap A_j) = \sum_{j=1}^{3} P(B|A_j) \cdot P(A_j) =$$

$$= 0.1 \cdot 0.5 + 0.3 \cdot 0.3 + 0.2 \cdot 0.2 = \mathbf{0.18} \ .$$

(b) Chceme znát $P(B^c \cap A_3)$. Podle definice podmíněné pravděpodobnosti máme

$$P(B^c \cap A_3) = P(B^c|A_3) \cdot P(A_3) = (1 - 0.2) \cdot 0.2 = \mathbf{0.16} \ .$$

(c) Chceme znát $P(A_2|B)$. Podle Bayesovy věty máme

$$P(A_2|B) = \frac{P(B|A_2) \cdot P(A_2)}{P(B)} = \frac{0.3 \cdot 0.3}{0.18} = \mathbf{0.5} \ .$$

- -

Příklad můžeme řešit i bez explicitního použití výše uvedených vět a to pomocí velikosti množin. Tato velikost bude vyjadřovat "počty" studentů v dané množině ovšem s tím, že tento počet může být i desetinné číslo (používáme tak vlastně geometrický pravděpodobnostní model). Tato desetinná čísla pochopitelně nesmíme zaokrouhlovat!

Prostoru Ω přiřadíme nějakou velikost např. $vol(\Omega) = 100$ (obvykle je dobré si volit takovou velikost, kterou můžeme snadno dělit hodnotami ve jmenovatelích zlomků v zadaných pravděpodobnostech).

Teď si postupně můžeme začít vyplňovat tabulku níže:

- $\textit{počet studujících} = vol(\Omega) = 100$
- $\textit{počet studujících na informatice} = vol(A_1) = P(A_1) \cdot vol(\Omega) = 0.5 \cdot 100 = 50$ a podobně pro matematiku a fyziku
- $\textit{počet žen na informatice} = vol(B \cap A_1) = P(B|A_1) \cdot vol(A_1) = 0.1 \cdot 50 = 5$ a podobně pro matematiku a fyziku
- $\textit{počet mužů na informatice} = vol(B^c \cap A_1) = vol(A_1) - vol(B \cap A_1) = 50 - 5 = 45$ a podobně pro matematiku a fyziku

	infor. (A_1)	matem. (A_2)	fyz. (A_3)	
muži (B^c)	45	21	16	82
ženy (B)	5	9	4	18
	50	30	20	100

Odsud pak ihned máme např. že

$$\textit{počet žen} = vol(B) = \sum_{i=1}^{3} vol(B \cap A_i) = 5 + 9 + 4 = 18$$

a tudíž

$$P(B) = \frac{\textit{počet žen}}{\textit{počet studujících}} = \frac{vol(B)}{vol(\Omega)} = \frac{18}{100} = \mathbf{0.18}$$

$$P(B^c \cap A_3) = \frac{\textit{počet mužů na fyzice}}{\textit{počet studujících}} = \frac{vol(B^c \cap A_3)}{vol(\Omega)} = \frac{16}{100} = \mathbf{0.16}$$

a

$$P(A_2|B) = \frac{\textit{počet žen na matematice}}{\textit{počet žen}} = \frac{vol(B \cap A_2)}{vol(B)} = \frac{9}{18} = \mathbf{0.5} \ .$$

Příklad 3.5 *Na fakultě je 50% studujících na informatice, 30% na matematice a 20% na fyzice. Z těch, co studují na informatice je 10% žen a (podobně) na matematice 30% je žen. Mezi studujícími je celkově 80% mužů.*

(a) Jaké procento z mužů studuje na matematice?

(b) Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný studující je žena na informatice?

(c) Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný studující fyziky je muž?

Řešení:

Opět si označme (jako u příkladu **3.5**) jevy

$A_1 =$ *"náhodně vybraný student je informatik"*

$A_2 =$ *"náhodně vybraný student je matematik"*

$A_3 =$ *"náhodně vybraný student je fyzik"*

$B =$ *"náhodně vybraný student je žena"*

Opět máme úplný systém disjunktních A_1, A_2, A_3 jevů na $\Omega =$ *"všichni studující"*. Tentokrát známe tyto pravděpodobnosti

$$P(A_1) = 0.5 \qquad P(A_2) = 0.3 \quad P(A_3) = 0.2$$
$$P(B|A_1) = 0.1 \quad P(B|A_2) = 0.3$$
$$P(B^c) = 0.8$$

(a) Chceme znát $P(A_2|B^c)$. Podle Bayesovy věty máme

$$P(A_2|B^c) = \frac{P(B^c|A_2) \cdot P(A_2)}{P(B^c)} = \frac{(1-0.3) \cdot 0.3}{0.8} = \frac{21}{80} = \mathbf{0.2625} \ .$$

(b) Chceme znát $P(B \cap A_1)$. Podle definice podmíněné pravděpodobnosti máme

$$P(B \cap A_1) = P(B|A_1) \cdot P(A_1) = 0.1 \cdot 0.5 = \mathbf{0.05} \ .$$

(c) Chceme znát $P(B^c|A_3)$. Protože neznáme $P(A_3|B^c)$, využijeme vztah

$$P(B^c|A_3) = \frac{P(B^c \cap A_3)}{P(A_3)} \ .$$

Z věty o úplné pravděpodobnosti máme

$$P(B^c \cap A_3) = P(B^c) - \sum_{j=1}^{2} P(B^c \cap A_j) = P(B^c) - \sum_{j=1}^{2} P(B^c|A_j) \cdot P(A_j) =$$

$$= 0.8 - \Big((1-0.1) \cdot 0.5 + (1-0.3) \cdot 0.3\Big) = 0.8 - 0.66 = 0.14$$

takže

$$P(B^c|A_3) = \frac{P(B^c \cap A_3)}{P(A_3)} = \frac{0.14}{0.2} = \mathbf{0.7} \ .$$

- -

Příklad opět můžeme řešit i bez explicitního použití výše uvedených vět (viz příklad **3.5**). Prostoru Ω přiřadíme opět velikost např. $vol(\Omega) = 100$.

Teď postupně můžeme začít vyplňovat tabulku níže:

- *počet studujících* $= vol(\Omega) = 100$
- *počet studujících na informatice* $= vol(A_1) = P(A_1) \cdot vol(\Omega) = 0.5 \cdot 100 = 50$ a podobně pro matematiku
- *počet žen na informatice* $= vol(B \cap A_1) = P(B|A_1) \cdot vol(A_1) = 0.1 \cdot 50 = 5$ a podobně pro matematiku
- *počet mužů na informatice* $= vol(B^c \cap A_1) = vol(A_1) - vol(B \cap A_1) = 50 - 5 = 45$ a podobně pro matematiku
- *počet mužů* $= vol(B^c) = P(B^c) \cdot vol(\Omega) = 0.8 \cdot 100 = 80$ a podobně pro ženy
- *počet mužů na fyzice* $= vol(B^c \cap A_3) = vol(B^c) - vol(B^c \cap A_1) - vol(B^c \cap A_2) = 80 - 45 - 21 = 14$ a podobně pro ženy na fyzice

	infor. (A_1)	matem. (A_2)	fyz. (A_3)	
muži (B^c)	45	21	14	80
ženy (B)	$0.1 \cdot 50 = 5$	$0.3 \cdot 30 = 9$	6	20
	50	30	20	100

Odsud pak ihned máme že

$$P(A_2|B^c) = \frac{\textit{počet mužů na matematice}}{\textit{počet mužů}} = \frac{vol(B^c \cap A_2)}{vol(B^c)} = \frac{21}{80} = \mathbf{0.2625}$$

$$P(B \cap A_1) = \frac{\textit{počet žen na informatice}}{\textit{počet studujících}} = \frac{vol(B \cap A_1)}{vol(\Omega)} = \frac{5}{100} = \mathbf{0.05}$$

a

$$P(B^c|A_3) = \frac{\textit{počet mužů na fyzice}}{\textit{počet studujících na fyzice}} = \frac{vol(B^c \cap A_3)}{vol(A_3)} = \frac{14}{14+6} = \mathbf{0.7}\ .$$

Příklad 3.6 *Požití alkoholu bylo prokázáno u* 1% *všech řidičů a u* 10% *řidičů, kteří způsobili dopravní nehodu. Kolikrát se požitím alkoholu zvyšuje riziko nehody?*

Řešení:
Označme si jevy

$A =$ *"požil alkohol"*,

$H =$ *"způsobil nehodu"*.

Pak máme $P(A) = 0.01$ a $P(A|H) = 0.1$. Hledáme hodnotu $\frac{P(H|A)}{P(H|A^c)}$. Tudíž podle Bayesovy věty máme

$$\frac{P(H|A)}{P(H|A^c)} = \frac{P(A|H) \cdot P(H)}{P(A)} \cdot \frac{P(A^c)}{P(A^c|H) \cdot P(H)} =$$
$$= \frac{P(A|H) \cdot (1 - P(A))}{P(A) \cdot (1 - P(A|H))} = \frac{0.1 \cdot 0.99}{0.01 \cdot 0.9} = 11\ .$$

- -

Také na to můžeme jít následujícím způsobem:

$$0.1 = P\left(A|H\right) = \frac{P\left(H|A\right) \cdot P\left(A\right)}{P\left(H|A\right) \cdot P\left(A\right) + P\left(H|A^c\right) \cdot P\left(A^c\right)} = \frac{P\left(H|A\right) \cdot 0.01}{P\left(H|A\right) \cdot 0.01 + P\left(H|A^c\right) \cdot 0.99}$$

a odsud je

$$P\left(H|A\right) \cdot 0.001 + P\left(H|A^c\right) \cdot 0.099 = P\left(H|A\right) \cdot 0.01$$
$$P\left(H|A^c\right) \cdot 0.099 = P\left(H|A\right) \cdot 0.009 \ .$$

opět s výsledkem

$$\frac{P\left(H|A\right)}{P\left(H|A^c\right)} = \frac{0.099}{0.009} = 11 \ .$$