5. cvičení z PST

14. - 18. března 2022

Co je směs: Mějme Kolmogorův model $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, kde množina výsledků Ω se skládá ze dvou *disjunktních* jevů Ω_1 a Ω_2. Na každé z částí Ω_i vznikne Kolmogorův model s pravděpodobností $P_i(\,\cdot\,) := P(\,\cdot\,|\Omega_i)$ pro $i = 1, 2$.

Jestliže nyní máme náhodné veličiny $X_i : \Omega_i \to \mathbb{R}$ na každém z odvozených Kolmogorových modelů, pak veličina $X : \Omega \to \mathbb{R}$ definovaná sloučením obou veličin, tedy jako

$$X(\omega) = \begin{cases} X_1(\omega) & ,\omega \in \Omega_1 \\ X_2(\omega) & ,\omega \in \Omega_2 \end{cases}$$

se nazývá *směsí* veličin X_1 a X_2 a označuje se jako $X = \mathrm{Mix}_c(X_1, X_2)$, kde $c = P(\Omega_1)$.

V této chvíli se může zdát zbytečné vypisovat ještě konstantu c, která označuje pravděpodobnost výsledku z Ω_1. Způsob, který jsme teď popsali, je vlastně rozdělením původního modelu na dva odvozené.

Můžeme však také začít opačně - tedy vzít dva "nesouvisející" modely, tj. disjunktní množiny výsledků Ω_1 a Ω_2 s příslušnými pravděpodobnostmi P_1 a P_2 a z nich složit nový Kolmogorův model. Tento nový model bude přirozeně mít množinu výsledků $\Omega := \Omega_1 \cup \Omega_2$. Pravděpodobnost P na novém modelu ovšem nebude určena, dokud si nestanovíme, jakou chceme hodnotu $c = P(\Omega_1)$ (a tím i doplňkovou hodnotu $1 - c = P(\Omega_2)$). Protože opět chceme, abychom měli $P(\,\cdot\,|\Omega_i) = P_i(\,\cdot\,)$ pro $i = 1, 2$, tak nyní bude už pravděpodobnost P určená (z věty o úplné pravděpodobnosti) pro jevy $A_1 \subseteq \Omega_1$ a $A_2 \subseteq \Omega_2$ jako

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) = P(\Omega_1) \cdot P(A_1|\Omega_1) + P(\Omega_2) \cdot P(A_2|\Omega_2) =$$
$$= c \cdot P_1(A_1) + (1 - c) \cdot P_2(A_2)$$

tedy zde nutně *musíme* používat konstantu c, která pro různé hodnoty vytvoří různé Kolmogorovy modely a tím i různá rozdělení veličiny

$$X = \mathrm{Mix}_c(X_1, X_2)$$

jejíž předpis ovšem zůstane stále stejný (bez ohledu na c)!

(Rozdělení veličiny X se bude ale pochopitelně měnit podle toho, jaké pravděpodobnosti vzniknou na základě volby c.)

Příklad smíšeného rozdělení: Mějme veličinu $X =$ *"kolik naprší milimetrů srážek v daný den"*. Označme si $\Omega_1 =$ *"dny, kdy neprší"*, $\Omega_2 =$ *"dny, kdy prší"* a $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 =$ *"všechny dny"*. Pak konstantní veličina $D = X_{|\Omega_1} = 0$ má diskrétní rozdělení v rámci Ω_1 a u veličiny $S = X_{|\Omega_2}$ předpokládáme spojité rozdělení. Pak $X = \mathrm{Mix}_c(D, S)$, kde $c = P(\Omega_1) \in (0, 1)$, má smíšené rozdělení.

Připomenutí: Nechť $a \in \mathbb{R}$ je bod *spojitosti distribuční funkce* F_X náhodné veličiny X. Pak máme

$$P(X = a) = P(X \leq a) - P(X < a) = F_X(a) - \lim_{x \to a_-} F_X(t) = 0$$

a tedy

$$P(X \leq a) = P(X < a)$$

neboli v bodech spojitosti nezáleží na typu nerovnosti (neostré vs. ostré).

Speciálně pro veličinu X se spojitým rozdělením je $P(X = a) = 0$ pro každé $a \in \mathbb{R}$.

Poznámka: Pro veličinu X a její distribuční funkci F_X se definuje funkce

$$p_X(t) := P(X = t) = F_X(t) - F_X(t_-) \quad \text{pro všechna } t \in \mathbb{R}$$

Jestliže X má spojité rozdělení, pak je $p_X(t) = 0$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$, tj. tento případ není zajímavý.

Jestliže X má diskrétní rozdělení, pak se p_X nazývá *pravděpodobnostní funkce* a $\sum_{t \in \mathbb{R}} p_X(t) = 1$.

5.1 (rozdělení veličiny vytvořené jako směs)

Stroj se pohybuje po úsečce $\langle -1, 2\rangle$ rovnoměrně přímočaře sem a tam. V bodech 0 a 1 se zastaví, aby tu vykonal konkrétní činnost. Doba, kterou při zastavení stráví je 25% celkového času, přičemž poměr časů strávených v bodech 0 a 1 je $2:3$. Náhodná veličina Z představuje polohu stroje. Určete:

(a) distribuční funkci F_Z.

(b) pravděpodobnosti $P(0 \leq Z \leq 1)$ a $P(Z \geq 0.5)$.

(c) střední hodnotu $E(Z)$.

(d) $t \in \mathbb{R}$ takové, že $P(Z \leq t) = 0.9$.

Řešení:
Pravděpodobnost rozdělení veličiny

$$Z = \text{“\textit{poloha stroje}”}$$

budeme přirozeně určovat podle času, který popisuje pohyb stroje. Konkrétně si za Ω můžeme zvolit časový interval, který odpovídá jednomu projetí úsečky $\langle -1, 2\rangle$. Pak budeme mít $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ a $Z(\omega) =$ *“poloha stroje v čase ω”*.

Veličinu Z rozdělíme na ty polohy, kdy se stroj hýbe a ty, kdy stojí:

$$X = \text{“\textit{polohy, kdy stroj stojí}”}$$

$$Y = \text{“\textit{polohy, kdy se stroj hýbe}”}$$

tj. Z je pak směs $Z = \mathrm{Mix}_{(c_1,c_2)}(X, Y)$, kde $c_1 = 0.25$ je podíl času, který odpovídá stojícím polohám stroje a $c_2 = 1 - c_1 = 0.75$ je podíl času, které odpovídají polohám, kdy se stroj hýbe.

Pokud bychom to chtěli vyjádřit konkrétněji, máme:

$$\Omega_1 = \text{“\textit{časové okamžiky, kdy stroj stojí}”}, \qquad P(\Omega_1) = c_1 = 0.25$$

a

$$\Omega_2 = \text{“\textit{časové okamžiky, kdy se stroj hýbe}”}, \qquad P(\Omega_2) = c_2 = 0.75$$

a tedy $X = Z|_{\Omega_1}$ a $X : \Omega_1 \to \mathbb{R}$ a podobně $Y = Z|_{\Omega_2}$ a $Y : \Omega_2 \to \mathbb{R}$.

(a) Ze vztahu $Z = \mathrm{Mix}_{(c_1,c_2)}(X, Y)$ plyne

$$F_Z(t) = c_1 F_X(t) + c_2 F_Y(t)$$

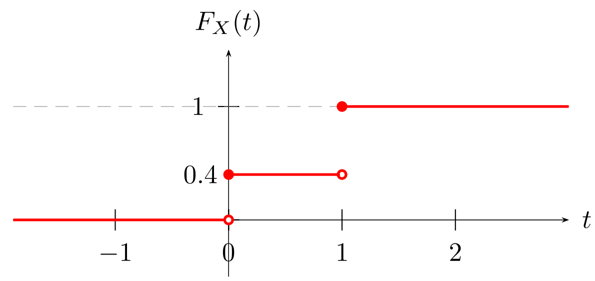
takže je potřeba určit distribuční funkce F_X a F_Y.

Veličina X má hodnoty $\{0, 1\}$, tedy má alternativní rozdělení $\mathrm{Alt}(p)$, kde p je pravděpodobnost hodnoty 1. Protože pravděpodobnosti hodnot 0 a 1 veličiny X jsou rozděleny v poměru $2 : 3$, máme $p = p_X(1) = \frac{3}{5} = 0.6$ a $p_X(0) = \frac{2}{5} = 0.4$.

Připomeňme, že pravděpodobnost hodnot veličiny X se počítá jako $p_X(u) = P_1(X = u) = P(Z = u\,|\Omega_1)$ tj. jako podmíněná pravděpodobnost vzhledem k Ω_1.

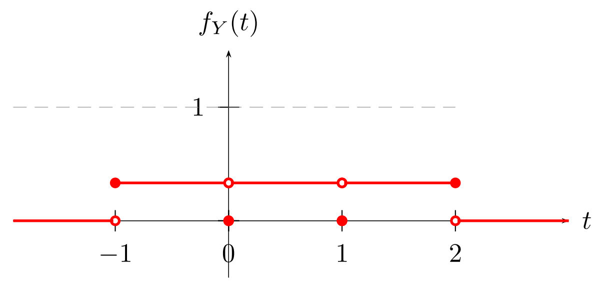
Tudíž X má distribuční funkci

$$F_X(t) = \sum_{u \leq t} p_X(u) = \begin{cases} 0\,, & t < 0\,, \\ 0.4\,, & 0 \leq t < 1\,, \\ 1\,, & t \geq 1\,. \end{cases}$$



Veličina Y bude mít (spojité) rovnoměrné rozdělení na množině svých hodnot $I = \langle -1, 2\rangle \setminus \{0, 1\}$. To znamená, že existuje hustota pravděpodobnosti f_Y veličiny Y tvaru

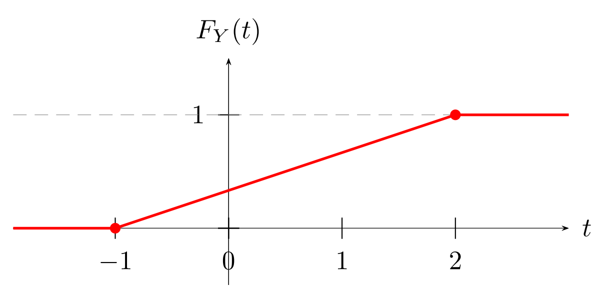
$$f_Y(t) = \begin{cases} c\,, & t \in I\,, \\ 0\,, & \text{jinak}\,, \end{cases}$$



Z podmínky, že plocha pod grafem hustoty je 1, snadno určíme konstantu $c = \frac{1}{3}$ (současně si můžeme hustotu pozměnit v konečně mnoha bodech, tj. např. v $t = 0$ a $t = 1$ můžeme f_Y udělat spojitou).

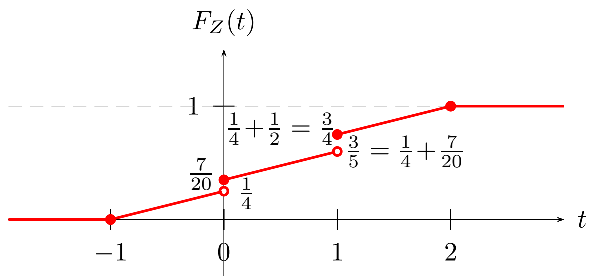
Distribuční funkce F_Y vznikne integrací hustoty f_Y a protože integrujeme konstantní funkci na intervalu $\langle -1, 2\rangle$, bude grafem F_Y na tomto intervalu úsečka. Konkrétně:

$$F_Y(t) = \int_{-\infty}^{t} f_Y(u)\,\mathrm{d}u = \begin{cases} & 0, & t < -1\,, \\ \int_{-1}^{t} \frac{1}{3}\,\mathrm{d}u = & \frac{t+1}{3}, & -1 \le t < 2\,, \\ & 1, & t \ge 2\,. \end{cases}$$



Pro distribuční funkci veličiny $Z = \text{Mix}_{0.25,\ 0.75}(X,Y)$ pak platí

$$F_Z(t) = \frac{1}{4}F_X(t) + \frac{3}{4}F_Y(t) = \begin{cases} & 0, & t < -1\,, \\ \frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{3}{4}\cdot\frac{t+1}{3} = & \frac{1}{4}t + \frac{1}{4}, & -1 \le t < 0\,, \\ \frac{1}{4}\cdot 0.4 + \frac{3}{4}\cdot\frac{t+1}{3} = & \frac{1}{4}t + \frac{7}{20}, & 0 \le t < 1\,, \\ \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{3}{4}\cdot\frac{t+1}{3} = & \frac{1}{4}t + \frac{1}{2}, & 1 \le t < 2\,, \\ & 1, & t \ge 2\,. \end{cases}$$



(b) $P(0 \le Z \le 1) = P(Z \le 1) - P(Z < 0) = F_Z(1) - \lim\limits_{t\to 0_-} F_Z(t) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$
$P(Z \ge 0.5) = 1 - P(Z < 0.5) = 1 - \lim\limits_{t\to 0.5_-} F_Z(t) = 1 - \left(\frac{1}{4}\cdot 0.5 + \frac{7}{20}\right) = \frac{21}{40}$.

(c) Pro alternativní rozdělení veličiny X je $E(X) = 0\cdot p_X(0) + 1\cdot p_X(1) = 0.6 = \frac{3}{5}$ a pro rovnoměrné rozdělení veličiny Y na intervalu $(a,b) = (-1,2)$ je $E(Y) = \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}$. Takže pro $Z = \text{Mix}_{1/4}(X,Y)$ je

$$E(Z) = \frac{1}{4}E(X) + \frac{3}{4}E(Y) = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{5} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{21}{40}\ .$$

(d) Hledáme $t \in \mathbb{R}$ tak, že $0.9 = P(Z \le t) = F_Z(t)$. K tomu potřebujeme vědět, kterou část předpisu pro F_Z máme použít. Protože $\frac{3}{4} \le 0.9 \le 1$, což je rozmezí hodnot na poslední rostoucí části předpisu, tak musíme použít právě tuto část:

$$0.9 = F_Z(t) = \frac{1}{4}t + \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad t = 3.6 - 2 = 1.6 \in \langle 1, 2\rangle\ .$$