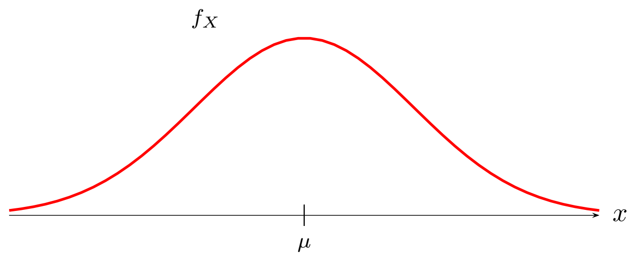
8. cvičení z STP

4. - 8. dubna 2022

Poznámky k normálnímu rozdělení:
Veličina X má *normální* (neboli Gaussovo) rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ (kde $\mu \in \mathbb{R}$ a $\sigma > 0$), jestliže má hustotu

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{pro} \;\; x \in \mathbb{R} \; .$$



Je to tedy spojité rozdělení, $E(X) = \mu$, $\mathrm{var}(X) = \sigma^2$ a oborem hodnot veličiny X je celá reálná osa. Všimněme si ještě, že hustota f_X je symetrická vzhledem ke středu μ a proto platí $F_X(\mu) = \frac{1}{2}$.

Toto rozdělení je limitním rozdělením, které aproximuje součty nezávislých stejně (nebo podobně) rozdělených veličin (více později v Centrální limitní větě). Typicky se tedy objevuje u veličin, jejichž hodnoty jsou ovlivněny mnoha drobnými odchylkami (např. u chyb měření, výšky člověka apod.)

U zmíněné výšky člověka (která může být samozřejmě jen kladná) nebo u veličin s hodnotami omezenými na nějaký interval, je přesto použití normálního rozdělení (které může nabývat libovolných hodnot) přiměřené. Je to tím, že u dané veličiny Y předpokládáme aproximaci pomocí normálního rozdělení obvykle jen ve vhodném okolí kolem střední hodnoty $\mu := E(Y)$. Je to podobná situace, jako když aproximujeme funkci pomocí jejího Taylorova polynomu v okolí daného bodu.

Přesněji to vystihuje toto tvrzení:

Věta: Nechť Y je veličina s hustotou f_Y, střední hodnotou μ a rozptylem $\sigma^2 \neq 0$. Nechť $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Jestliže se hustoty f_X a f_Y rovnají na nějakém intervalu $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ takovém, že $\mu \in (a, b)$ a pokud $F_Y(\mu) = \frac{1}{2}$, pak

$$F_Y(t) = F_X(t) \quad \text{pro všechna} \;\; t \in (a, b) \; .$$

Značení: Pro náhodnou veličinu X s konečnou střední hodnotou a konečným rozptylem, položme

$$\mathrm{norm}(X) := \frac{X - E(X)}{\sqrt{\mathrm{var}(X)}} \; .$$

Speciálně tedy vidíme, že $E\big(\mathrm{norm}(X)\big) = 0$ a $\mathrm{var}\big(\mathrm{norm}(X)\big) = 1$.

Platí: Pro takovouto veličinu X a konstanty $a > 0$ a $b \in \mathbb{R}$ je

$$\mathrm{norm}(aX + b) = \mathrm{norm}(X) \; .$$

Důležité vlastnosti normálního rozdělení:

- $X \sim N(\mu, \sigma^2) \;\Rightarrow\;$ norm$(X) = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ (je to tzv. normované normální rozdělení s hodnotami v tabulkách) dist. funkce pro $N(0,1)$ se značí Φ.

  V tomto případě pak máme $F_X(t) = P(X \le t) = P\Big(\underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{=\text{norm}(X)} \le \frac{t-\mu}{\sigma}\Big) = \Phi\Big(\frac{t-\mu}{\sigma}\Big)$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$.

- hustota $f_{N(0,1)}$ je sudá funkce $\;\Rightarrow\;$ $\Phi(t) + \Phi(-t) = 1$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$.

- Nechť $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, pro $i = 1, 2$, jsou nezávislé. Pak $X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ (tj. speciálně součet nezávislých normálních rozdělení je zase normální.)

Pro vybraná čísla $t \ge 0$ se dají hodnoty Φ najít ve statistických tabulkách. Pro záporná čísla si pak pomůžeme vztahem $\Phi(-t) = 1 - \Phi(t)$.

Pro lepší představu o tom, jakou roli pro veličinu s normálním rozdělením $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ hraje směrodatná odchylka σ se používá tzv.

pravidlo tří-sigma (`https://cs.wikipedia.org/wiki/Pravidlo_t\%C5\%99\%C3\%AD\_sigma`)

které je ovšem čistě jen technickou pomůckou:

Jestliže si budeme počítat pravděpodobnosti

$$P(|X-\mu| \le k \cdot \sigma) = P\Big(\Big|\underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{\sim N(0,1)}\Big| \le k\Big) = \Phi(k) - \Phi(-k) = 2 \cdot \Phi(k) - 1 \quad \text{pro} \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

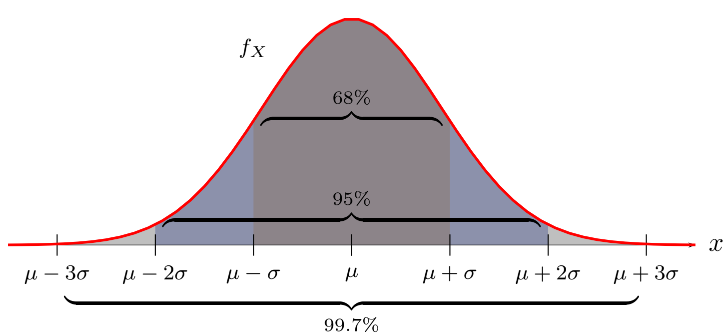
dostaneme postupně

$$P(|X-\mu| \le \sigma) = 2 \cdot \Phi(1) - 1 \doteq 2 \cdot 0.8413 - 1 = 0.6826 \doteq 68\%$$

$$P(|X-\mu| \le 2 \cdot \sigma) = 2 \cdot \Phi(2) - 1 \doteq 2 \cdot 0.9772 - 1 = 0.9544 \doteq 95\%$$

$$P(|X-\mu| \le 3 \cdot \sigma) = 2 \cdot \Phi(3) - 1 \doteq 2 \cdot 0.99865 - 1 = 0.9973 \doteq 99.7\%$$

Pro vyšší hodnoty, tj. $k \ge 4$ už jsou pravděpodobnosti vpodstatě rovny 1, takže se v praxi příliš nepoužívají (záleží samozřejmě na zvolené přesnosti).



Příklad 8.1 *Výška dětí v 1. třídě je náhodná veličina $X \sim N(130\,\text{cm},\ 36\,\text{cm}^2)$. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybrané dítě bude*

(a) větší než 136 cm,

(b) menší než 118 cm,

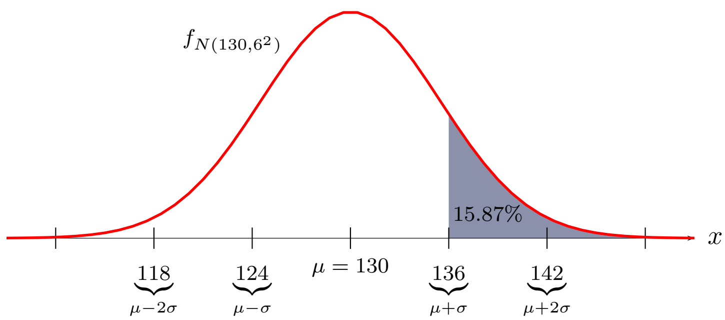
(c) mít výšku mezi 127 a 133 cm?

Řešení:
Nyní tedy máme $X \sim N(130,\ 36)$. Pro jednodušší zápis si ještě označme $Z := \mathrm{norm}(X)$.

(a)

$$P(X > 136) = P\Bigg(\underbrace{\frac{X-130}{\sqrt{36}}}_{Z} > \underbrace{\frac{136-130}{\sqrt{36}}}_{1}\Bigg) = P(Z > 1) = 1 - P(Z \leq 1) =$$

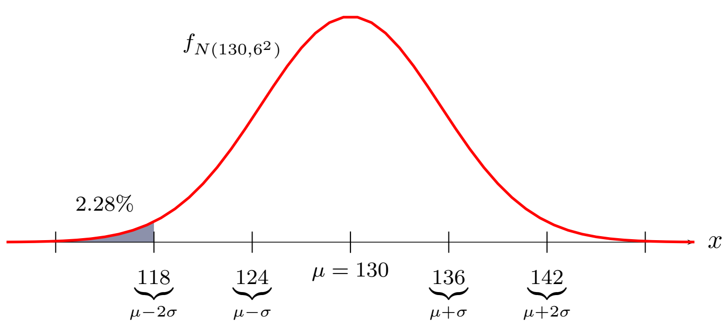
$$= 1 - \Phi(1) \doteq 1 - 0.8413 = 0.1587\ .$$



(b)

$$P(X < 118) = P\left(\frac{X-130}{\sqrt{36}} < \frac{118-130}{\sqrt{36}}\right) = P(Z < -2) = \Phi(-2) =$$

$$= 1 - \Phi(2) \doteq 1 - 0.9772 = 0.0228\ .$$



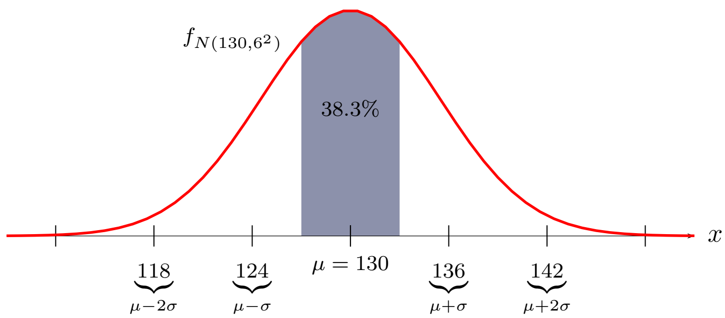
(c)

$$P(127 < X < 133) = P\left(\frac{127-130}{\sqrt{36}} < \frac{X-130}{\sqrt{36}} < \frac{133-130}{\sqrt{36}}\right) =$$

$$= P(-0.5 < Z < 0.5) = P(Z < 0.5) - P(Z \leq -0.5) =$$

$$= \Phi(0.5) - \Phi(-0.5) = \Phi(0.5) - \Big(1 - \Phi(0.5)\Big) =$$

$$= 2 \cdot \Phi(0.5) - 1 \doteq 2 \cdot 0.6915 - 1 = 0.383\ .$$



Poznamenejme ještě, že hodnoty výšek, které nás zajímaly (tj. 136 cm, 118 cm atd.) se pohybují celkem blízko střední hodnoty $E(X) = 130$ cm, takže předpoklad o normálnosti rozdělení X byl přiměřený.

- -

Výpočty si můžeme i urychlit přímým vzorcem $F_X(t) = \Phi(\frac{t-\mu}{\sigma})$, kde $\mu = 130$ cm a $\sigma = 6$ cm:

(a) $P(X > 136) = 1 - F_X(136) = 1 - \Phi(\frac{136-130}{6}) = \cdots \doteq 0.1587$

(b) $P(X < 118) = F_X(118) = \Phi(\frac{118-130}{6}) = \cdots \doteq 0.0228$

(c) $P(127 < X < 133) = F_X(133) - F_X(127) = \Phi(\frac{133-130}{6}) - \Phi(\frac{127-130}{6}) = \cdots \doteq 0.383$

Příklad 8.2 *Oštěpařky Anna a Barbora mají střední hodnoty hodů po řadě 67 m a 75 m a směrodatné odchylky 6 m a 3 m. Předpokládejme nezávislá normální rozdělení. Odhadněte pravděpodobnost, že při jednom hodu hodí Anna dál.*

Řešení:
Náhodná veličina

$A =$"*délka hodu Anny*"

má rozdělení $N(67, 6^2)$ a veličina

$B =$"*délka hodu Barbory*"

má rozdělení $N(75, 3^2)$.

Zajímá nás $P(A > B) = P(A - B > 0)$. Protože veličiny A a B jsou nezávislé, tak veličina $Z := A - B$ má také normální rozdělení, a sice

$$Z \sim N(67 - 75, 6^2 + 3^2) = N(-8, 45)\ .$$

Takže

$$P(A > B) = P(Z > 0) = P\left(\underbrace{\frac{Z-(-8)}{\sqrt{45}}}_{\text{norm}(Z)} > \frac{0-(-8)}{\sqrt{45}}\right) = 1 - P\left(\text{norm}(Z) \leq \frac{8}{\sqrt{45}}\right) =$$

$$= 1 - \Phi\left(\tfrac{8}{\sqrt{45}}\right) \doteq 1 - \Phi\left(1.1926\right) \doteq 1 - 0.883 = 0.117\,.$$

POZOR! Zatímco střední hodnota je lineární zobrazení, tak rozptyl se chová jinak! Konkrétně je to takto:

Nechť X a Y jsou veličiny se střední hodnotou a konečným rozptylem. Pak

- $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$
- $\mathrm{var}(X \pm Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y) \pm 2 \cdot \mathrm{cov}(X, Y)$ (≥ 0)

Zde $\mathrm{cov}(X, Y)$ je tzv. kovariance (viz poznámky níže). Speciálně, pokud X a Y jsou nezávislé, je $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$. Máme tedy:

- X a Y nezávislé $\Rightarrow$ $\mathrm{var}(X \pm Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y)$

Tedy v tomto případě se rozptyly VŽDY sčítají!

Připomenutí: Jestliže máme dvě náhodné veličiny $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$, pak zobrazení

$$(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$$

nazýváme náhodný (dvousložkový) vektor.

Tedy náhodnému výsledku ω (tj. elementárnímu jevu) přiřadíme dvojici hodnot $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Např. vybranému člověku z množiny lidí Ω přiřadíme jeho tělesnou výšku a hmotnost.

(Obdobně vznikne náhodný vektor s více složkami. My se teď zaměříme hlavně na dvousložkový případ.)

Náhodný vektor (X, Y) umí přenést a vytvořit rozdělení pravděpodobnosti na $\mathbb{R}^2$ - a to tak, že každá "rozumná" množina $A \subseteq \mathbb{R}^2$ (např. otevřená množina nebo interval atd.) bude mít prostě pravděpodobnost

$$P_{(X,Y)}(A) := P\Big(\underbrace{(X, Y)^{-1}(A)}_{\{\omega \in \Omega \mid (X(\omega), Y(\omega)) \in A\}} \Big) .$$

Rozdělení této pravděpodobnosti $P_{(X,Y)}$ na $\mathbb{R}^2$ můžeme opět úplně popsat, pokud známe pravděpodobnosti jen některých speciálních intervalů a ty nám definují tzv. *sdruženou distribuční funkci* $F_{(X,Y)} : \mathbb{R}^2 \to \langle 0, 1 \rangle$ jako

$$F_{(X,Y)}(a, b) := P(X \leq a, Y \leq b)$$

Je dobré si uvědomit, že náhodný vektor (X, Y) můžeme snadno sestavit z libovolných dvou náhodných veličin X a Y. Zatímco ale k počítání s veličinou X nám stačí znát jen její distribuční funkci F_X, k práci s vektorem nám NESTAČÍ znalost distribučních funkcí jeho složek! Potřebujeme totiž znát, jaký je vztah mezi veličinami X a Y, a ten je schovaný právě ve sdružené distribuční funkci.

Opět si připomeňme, že pojem nezávislosti pro jevy umožňuje přirozeně definovat nezávislost veličin :

Definice: Veličiny X a Y jsou *nezávislé* $\Leftrightarrow P(X \in I, Y \in J) = P(X \in I) \cdot P(Y \in J)$ pro libovolné intervaly $I, J \subseteq \mathbb{R}$.

Věta: X a Y jsou nezávislé $\Leftrightarrow F_{(X,Y)}(a, b) = F_X(a) \cdot F_Y(b)$ pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$.

Příklad 8.3 *Délka hrany krychle je náhodná veličina $X \sim \mathrm{Ro}(1, 2)$. Určete distribuční funkci náhodné veličiny Y popisující plochu povrchu této krychle.*

Řešení:
Máme veličiny

X= *"délka hrany krychle"*

Y= *"plocha povrchu krychle"*

takže $Y = 6 \cdot X^2$ a pro distribuční funkci náhodné veličiny Y dostáváme

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(6X^2 \le y) = P(X^2 \le \tfrac{y}{6}) = \begin{cases} P\left(|X| \le \sqrt{\frac{y}{6}}\,\right) = F_X\left(\sqrt{\frac{y}{6}}\,\right) & ,\ y \ge 0 \\ P(\emptyset) = 0 & ,\ y < 0\ . \end{cases}$$

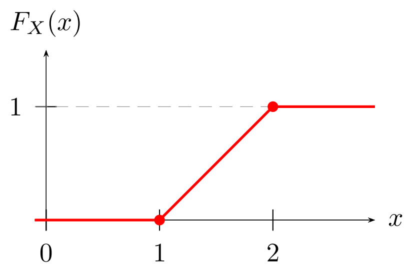
kde jsme využili toho, že obor hodnot pro X je $\langle 1, 2\rangle$, tedy $X \ge 0$ a speciálně tak platí, že $|X| = X$.

Teď si už si jen vyjádříme F_X a dosadíme:

Pro veličinu $X \sim \mathrm{Ro}(1, 2)$ je její hustota $f_X(x) = \begin{cases} 1, & 1 \le x \le 2 \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$ a distribuční funkce

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\ dt = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ x - 1, & 1 \le x \le 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

s grafem



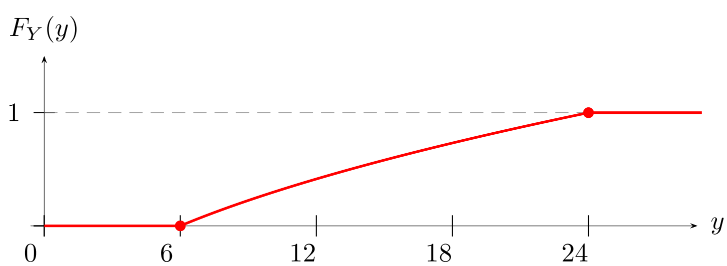
Do F_X (správně!) dosadíme $x = \sqrt{\frac{y}{6}}$ (pro $y \ge 0$) a přepíšeme podmínky pro y:

$$1 \le \sqrt{\tfrac{y}{6}} \le 2 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \le \tfrac{y}{6} \le 4 \quad \Leftrightarrow \quad 6 \le y \le 24$$

(zbylé podmínky jsou podobné) a dostaneme tak

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 6 \\ \sqrt{\frac{y}{6}} - 1, & 6 \le y \le 24 \\ 1, & y > 24 \end{cases}$$

s grafem



Příklad 8.4 *Průměrný počet zákazníků během dne v první prodejně je* 20*, ve druhé prodejně* 25*. Předpokládáme, že oba počty se řídí Poissonovým rozdělením. Odvoďte rozdělení počtu zákazníků v obou prodejnách dohromady.*

Řešení:
Označme si veličiny

$X =$ *"počet zákazníků během dne v* 1. *prodejně"*

$Y =$ *"počet zákazníků během dne v* 2. *prodejně"*

$Z =$ *"počet zákazníků během dne v obou prodejnách dohromady"*

kde X a Y budeme přirozeně pokládat za nezávislé. Máme

$$X \sim \text{Poiss}(\lambda), \text{ kde } \lambda = E(X) = 20$$

$$Y \sim \text{Poiss}(\mu), \text{ kde } \mu = E(Y) = 25$$

a

$$P(X = i) = \frac{\lambda^i}{i!} \cdot e^{-\lambda} \quad \text{a} \quad P(Y = j) = \frac{\mu^j}{j!} \cdot e^{-\mu}$$

Jelikož $Z = X + Y$ a případ $X + Y = k$ se rozloží na disjunktní možnosti $(X, Y) = (i, k - i)$ pro $i = 0, 1, \ldots, k$, dostáváme

$$P(Z = k) = P(X + Y = k) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} P(X = i,\ Y = k - i) \overset{\text{(nezávislost)}}{=} \sum_{i=0}^{k} P(X = i) \cdot P(Y = k - i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!} e^{-\mu} = e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{k!} \cdot \underbrace{\frac{k!}{i!(k-i)!}}_{\binom{k}{i}} \cdot \lambda^i \cdot \mu^{k-i} =$$

$$= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda^i \cdot \mu^{k-i} \overset{\text{(binom. věta)}}{=} \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} (\lambda + \mu)^k$$

tj. $Z \sim \text{Poiss}(\lambda + \mu)$ neboli $Z \sim \text{Poiss}(45)$.

Poznámka: Představme si, že jednotlivým prodejnám přiřadíme (čistě účelově) nějaké velikosti a a b (např. velikost plochy prodejny v m^2) tak, aby průměrný počet zákazníků na jednotku plochy byl v obou prodejnách stejný, tj. $\frac{\lambda}{a} = \frac{\mu}{b}$. Veličiny X a Y pak můžeme chápat jako počty událostí v intervalech délky a a b, přičemž v obou intervalech je "hustota událostí" stejná. Při tomto přístupu bude veličina Z představovat počet událostí v intervalu délky $a + b$, takže Poissonovo rozdělení se pak dá skutečně očekávat.

Připomenutí: Kovariance pro X a Y je definována jako

$$\text{cov}(X, Y) := E\Big((X - EX) \cdot (Y - EY)\Big) = \cdots = E(XY) - E(X) \cdot E(Y) .$$

Speciálně je $\text{cov}(X, X) = \text{var}(X)$.

Kovariance $\text{cov}(\cdot, \cdot)$ má tyto vlastnosti (X, Y, Z jsou veličiny, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ jsou konstanty):

- je lineární v každé složce zvlášť (tj. je bilineární), tedy:

$$\operatorname{cov}(aX+bY,Z) = a\cdot\operatorname{cov}(X,Z) + b\cdot\operatorname{cov}(Y,Z)$$
$$\operatorname{cov}(Z,aX+bY) = a\cdot\operatorname{cov}(Z,X) + b\cdot\operatorname{cov}(Z,Y)$$

- symetrická, tj. $\operatorname{cov}(X,Y) = \operatorname{cov}(Y,X)$
- pozitivně semi-definitní, tj. $\operatorname{cov}(X,X) \geq 0$, kde navíc platí, že: $\operatorname{cov}(X,X) = 0 \ \Rightarrow\ \exists \alpha \in \mathbb{R}$, že $P(X=\alpha)=1$ (neboli: X odpovídá konstantní veličině)
- $\operatorname{cov}(X+c, Y+d) = \operatorname{cov}(X,Y)$.

Platí : X a Y jsou nezávislé veliciny $\implies$ $\operatorname{cov}(X,Y)=0$.
(POZOR: Opačná implikace obecně neplatí!!)

Příklad 8.5 *Nechť* $X \sim \mathrm{Ro}(0,2)$ *a* $Y = X^2+1$.

(a) Sestrojte distribuční funkci náhodné veličiny Y.

(b) Spočtěte $\operatorname{cov}(X,Y)$.

(c) Rozhodněte, zda jsou X *a* Y *nezávislé a proč.*

Řešení:

(a) Distribuční funkce F_Y se dá získat pomocí distribuční funkce F_X. Před výpočtem si ještě uvědomme, že $X \geq 0$ (protože její obor hodnot je $\langle 0,2\rangle$). Speciálně tedy $|X| = X$. Pro distribuční funkci náhodné veličiny Y máme

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2+1 \leq y) =$$

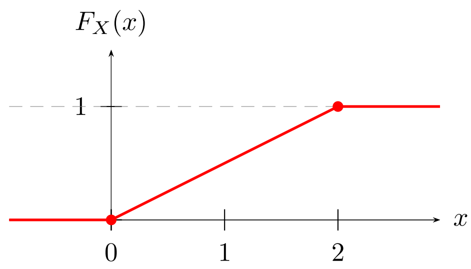
$$= P(X^2 \leq y-1) = \begin{cases} P(\emptyset) = 0 & ,\ y-1<0 \\ P\left(|X| \leq \sqrt{y-1}\ \right) = F_X\left(\sqrt{y-1}\ \right) & ,\ y-1 \geq 0. \end{cases}$$

Teď už si stačí jen vyjádřit F_X a dosadit.

Pro veličinu $X \sim \mathrm{Ro}(0,2)$ je její hustota $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$ a distribuční funkce je pak

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\ dt = \begin{cases} 0, & x<0 \\ x/2, & 0 \leq x \leq 2 \\ 1, & x>2 \end{cases}$$

s grafem



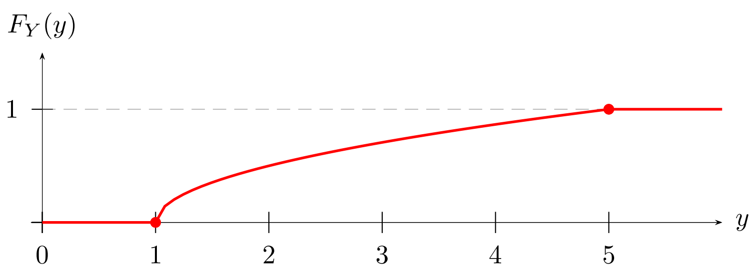
Do F_X (správně!) dosadíme $x = \sqrt{y-1}$ (pro $y - 1 \geq 0$) a přepíšeme podmínky pro y:

$$0 \leq \sqrt{y-1} \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq y-1 \leq 4 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq y \leq 5$$

(zbylé podmínky jsou podobné) a dostaneme tak

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 1 \\ \frac{\sqrt{y-1}}{2}, & 1 \leq y \leq 5 \\ 1, & y > 5 \end{cases}$$

s grafem



(b) Kovarianci vypočteme ze vztahu

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \operatorname{cov}(X, X^2+1) = \operatorname{cov}(X, X^2) = E(X \cdot X^2) - E(X) \cdot E(X^2)$$

Stačí si tedy pro $n \geq 1$ zjistit

$$E(X^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \cdot f_X(x)\, dx = \int_0^2 \frac{x^n}{2}\, dx = \left[\frac{x^{n+1}}{2(n+1)}\right]_0^2 = \frac{2^n}{n+1}$$

a dosazením dostaneme

$$\operatorname{cov}(X,Y) = 2 - 1 \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}\,.$$

(c) Protože $\operatorname{cov}(X,Y) \neq 0$, jsou veličiny X a Y závislé. Toto zjištění ovšem můžeme udělat i bez výpočtu kovariance:

Veličiny X a Y jsou funkčně propojené, takže stačí najít podmínky, které naráz nemůžou splnit, ale jednotlivě, s nenulovými pravděpodobnostmi, ano. Z předchozích úprav už víme, že pro $1 < y < 5$ platí

$$Y \leq y \quad \Leftrightarrow \quad X^2 + 1 \leq y \quad \Leftrightarrow \quad X \leq \sqrt{y-1}$$

a pravděpodobnosti těchto jevů jsou (z tvaru F_X a F_Y) ostře mezi 0 a 1. Takže např. z volby $y = 2$ dostaneme, že

$$Y \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad X \leq 1$$

takže

$$P(\underbrace{Y \leq 2,\ X > 1}_{\emptyset}) = 0 \neq \underbrace{P(Y \leq 2)}_{F_Y(2)=0.5} \cdot \underbrace{P(X > 1)}_{1-F_X(1)=0.5}$$

z čehož plyne, že veličiny X a Y jsou závislé.

Poznámka: Jak se dá očekávat, pokud jedna veličina závisí svými hodnotami na druhé, nejspíš nezávislé nebudou. Výjimkou je jen jeden případ a celá situaci se dá popsat takto:

Věta: Nechť X a $h(X)$ jsou obě náhodné veličiny, kde $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je borelovská funkce (např. spojitá). Pak X a $h(X)$ jsou nezávislé veličiny právě jen pokud

- $h(X)$ je konstantní veličina (přesněji: ex. $c \in \mathbb{R}$, že $P\big(h(X) = c\big) = 1$).

Příklad:

(1) Pro představu, kdy může třeba nastat případ nezávislosti v předchozí větě, si vezmeme $X \sim \mathrm{Ro}(1, 2)$ a funkci $h(x) = \max\{x, 3\}$. Vidíme, že ani veličina X ani funkce h nejsou konstantní, ale jejich složení $Y = h(X) = \max\{X, 3\} = 3$ už konstanta je. No a veličiny X a $Y = 3$ už samozřejmě nezávislé jsou.

(2) Ukažme si příklad dvou veličin tvaru X a $Y = h(X)$, které budou závislé a přitom bude platit $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$.

Stačí zvolit $X \sim \mathrm{Ro}(-1, 1)$ a $Y = X^2$. Podle věty výše X a Y budou závislé, protože Y není konstanta.

(Proč Y není (skoro všude) konstantní: protože X má spojité rozdělení, tak je $P(X = a) = 0$ pro každé $a \in \mathbb{R}$. Odsud ihned máme, že pro $b \in \mathbb{R}$ je $P(Y = b) = P(X^2 = b) = 0$. Tedy Y nemůže splňovat $P(Y = c) = 1$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$ a tudíž nemůže být konstanta.)

Současně s tím vidíme, že $E(X) = \frac{-1+1}{2} = 0$ a dále, že

$$E(X \cdot Y) = E(X \cdot X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} t^3 \cdot f_X(t)\ \mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \underbrace{t^3 \cdot \tfrac{1}{2}}_{\text{lichá funkce}}\ \mathrm{d}t = 0$$

A dále, střední hodnota $E(Y) = E(X^2)$ existuje, i když už nulová nebude.

Tím tedy dostaneme

$$\mathrm{cov}(X, Y) = \underbrace{E(XY)}_{=0} - \underbrace{E(X)}_{=0} \cdot E(Y) = 0\ .$$