14. cvičení z PRA

20. - 24. května 2024

Poznámky k testu dobré shody: Chceme otestovat (na hladině α), jestli daná veličina X s konečně mnoha (navzájem různými!) hodnotami $a_1, \ldots, a_k$ (ne nutně číselnými) má předepsané pravděpodobnosti $(p_1, \ldots, p_k)$, tedy nulovou hypotézu

$$\mathbf{H}_0 : P(X = a_i) = p_i \text{ pro všechna } i \in \{1, \ldots, k\}$$

proti alternativní hypotéze:

$$\mathbf{H}_A : P(X = a_{i_0}) \neq p_{i_0}, \text{ pro alespoň jedno } i_0 \in \{1, \ldots, k\}$$

Při n pokusech s veličinou X si pro $i = 1, \ldots, k$ označme veličiny

$$N_i = \text{“}\textit{počet výskytů případu } X = a_i \textit{ při } n \textit{ pokusech}\text{”} .$$

Máme tedy náhodný vektor

$$\boldsymbol{N} = (N_1, \ldots, N_k)$$

a vztah $N_1 + \cdots + N_k = n$. Už z toho vidíme, že veličiny N_i nejsou nezávislé, ale zase k té nezávislosti tak daleko nemají. Náhodný vektor $\boldsymbol{N}$ má tzv. multinomické rozdělení a jednotlivá marginální rozdělení veličin jsou binomická, konkrétně $N_i \sim \text{Bi}(n, p_i)$. Speciálně tedy $E(N_i) = n \cdot p_i$.

Jako testovací veličinu zde používáme:

$$T = \sum_{i=1}^{k} \frac{(N_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i}$$

která má asymptoticky (tj. pro $n \to \infty$) tzv. χ^2-rozdělení s $k - 1$ stupni volnosti. Pro praktické použití této asymptotiky se obvykle požaduje, aby platilo, že

$$n \cdot p_i \geq 5 \quad \text{pro všechna} \quad i \in \{1, \ldots, k\} .$$

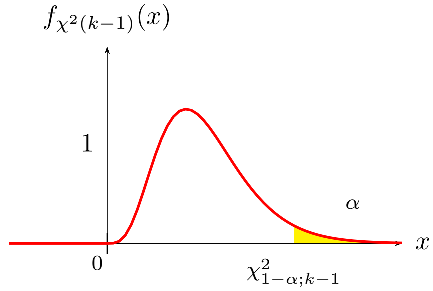
Hodnoty $n \cdot p_i$ se označují jako tzv. *teoretické četnosti*.

Pokud tedy platí nulová hypotéza $\mathbf{H}_0$, měly by být hodnoty veličiny T malé. Jestliže hodnoty T budou příliš velké, bude to důvod k zamítnutí nulové hypotézy.

Jak určit hranici, kde už nastane zamítnutí: veličina T má (přibližně) $\chi^2(k-1)$ rozdělení, tedy platí

$$P_{(H_0 \text{ platí})}\left(T > \chi^2_{1-\alpha;\, k-1}\right) \doteq \alpha$$

kde $\chi^2_{1-\alpha;\, k-1}$ je hodnota kvantilu pro $\chi^2(k-1)$ rozdělení (viz obrázek, kde α je velikost žluté plochy pod hustotou $f_{\chi^2(k-1)}(x)$ pro $\chi^2(k-1)$ rozdělení).



Kritérium pro **ZAMÍTNUTÍ $\mathbf{H}_0$** (na hladině α) proto volíme jako

$$\mathbf{H}_0 \text{ zamítáme (na hladině } \alpha) \quad \Leftrightarrow \quad t > \chi^2_{1-\alpha;\, k-1}\,.$$

Z definice chyby 1. druhu, tj.

$$\text{nastává chyba 1. druhu} \quad \Leftrightarrow \quad (\text{hypotéza } \mathbf{H}_0 \text{ platí} \quad \& \quad \text{my ji zamítáme})$$

pak totiž máme, že

$$P_{(H_0 \text{ platí})}\Big(\text{nastává chyba 1. druhu}\Big) = P_{(H_0 \text{ platí})}\Big(\text{zamítáme } \mathbf{H}_0 \text{ (na hladině } \alpha)\Big) =$$

$$= P_{(H_0 \text{ platí})}\left(T > \chi^2_{1-\alpha;\, k-1}\right) \doteq \alpha$$

neboli pravděpodobnost chyby 1. druhu (ovšem za předpokladu platnosti $\mathbf{H}_0$!) je pak omezena hodnotou α.

Příklad 14.1 (test dobré shody)

Firma má 3 pobočky. Dva roky bylo sledováno, která z nich zaznamenala nejvyšší měsíční výnos. Bylo zjištěno, že nejvýnosnější byla první pobočka $10\times$*, druhá* $6\times$ *a třetí* $8\times$*.*
Je možné říct, že první pobočka je nejvýnosnější $2\times$ *častěji než každá ze zbylých dvou? Testujte na hladině* 1%*.*

Řešení:
Máme tedy veličinu

$$X = \text{“\textit{číslo pobočky, která je zrovna (tj. v daném měsíci) nejvýnosnější}”}$$

s $k = 3$ hodnotami {*první, druhá, třetí*}.

Nejdříve si potřebujeme zjistit, jaké rozdělení

$$P(X = \textit{první}) = p_1, \quad P(X = \textit{druhá}) = p_2, \quad P(X = \textit{třetí}) = p_3$$

vlastně předpokládáme. Z požadavku máme

$$p_1 = 2 \cdot p_2, \quad p_1 = 2 \cdot p_3, \quad p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

z čehož dostáváme

$$(p_1, p_2, p_3) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

Naše hypotéza tedy je

$\mathbf{H}_0$: veličina X má rozdělení s pravděpodobnostmi $(p_1, p_2, p_3) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$,

a alternativní hypotéza bude:

$\mathbf{H}_A$: veličina X má rozdělení *jiné* než $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

Využijeme test dobré shody. Celkový počet měření (tj. počet měsíců) je $n = 10 + 6 + 8 = 24$. Pro přehlednost si vypíšeme tabulku s jednotlivými četnostmi (pozorovanými i teoretickými):

i (pobočky)	první	druhá	třetí
n_i (pozorované četnosti)	10	8	6
p_i (teoretické pravděpodobnosti)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$n \cdot p_i$ (teoretické četnosti)	$24 \cdot \frac{1}{2} = 12$	$24 \cdot \frac{1}{4} = 6$	$24 \cdot \frac{1}{4} = 6$

Vidíme, že všechny teoretické četnosti jsou ≥ 5, takže skutečně můžeme použít asymptotické přiblížení pro testovací statistiku T (ta tedy bude mít χ^2-rozdělení). Teď už si jen spočítáme hodnotu této statistiky

$$t = \sum_{i=1}^{3} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = \frac{(10-12)^2}{12} + \frac{(8-6)^2}{6} + \frac{(6-6)^2}{6} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 0 = 1$$

a porovnáme s kvantilem χ^2-rozdělení s $k - 1 = 3 - 1 = 2$ stupni volnosti:

$$t = 1 \not\geq 9.21 \doteq \chi^2_{0.99;\,2} = \chi^2_{1-\alpha;\,k-1}$$

Protože zamítací kritérium NENÍ splněno, tak $\mathbf{H}_0$ **NEZAMÍTÁME** (na hladině α).

- -

Poznámky k testu nezávislosti: Máme veličiny

- X s (různými) hodnotami $\{a_1, \ldots, a_k\}$ a
- Y s (různými) hodnotami $\{b_1, \ldots, b_\ell\}$

a chceme otestovat (na hladině α), hypotézu

$\mathbf{H}_0$: rozdělení veličin X a Y jsou *nezávislá*

proti alternativní hypotéze:

$\mathbf{H}_A$: rozdělení veličin X a Y jsou *závislá*

Při n pokusech s náhodným vektorem (X, Y) si pro $i = 1, \ldots, k$ označme veličiny

$$N_{i,j} = \text{“}\textit{počet výskytů případu } (X,Y) = (a_i, b_j) \textit{ při } n \textit{ pokusech}\text{”}\,.$$

a opět máme náhodný vektor

$$\boldsymbol{N} = (N_{1,1}, \ldots, N_{k,\ell})$$

s multinomickým rozdělením. Marginální rozdělení jednotlivých veličin $N_{i,j}$ jsou opět binomická a *za předpokladu nezávislosti X a Y* mají střední hodnotu

$$E(N_{i,j}) = n \cdot P(X = a_i, Y = b_j) \overset{\text{(nezáv.)}}{=} n \cdot P(X = a_i) \cdot P(Y = b_j)\,.$$

Podobně jako v testu dobré shody by tyto střední hodnoty představovaly teoretické četnosti až na to, že pravděpodobnosti $P(X = a_i)$ a $P(Y = b_j)$ nemáme v hypotéze uvedeny. Proto je odhadneme jako

$$P(X = a_i) \doteq \frac{n_{i,\bullet}}{n} \quad \text{a} \quad P(Y = b_j) \doteq \frac{n_{\bullet,j}}{n}$$

kde $n_{i,\bullet}$ a $n_{\bullet,j}$ jsou naměřené hodnoty veličin

$$N_{i,\bullet} = \sum_{j=1}^{\ell} N_{i,j} = \text{“}\textit{počet výskytů případu } X = a_i \textit{ při } n \textit{ pokusech}\text{”}$$

$$N_{\bullet,j} = \sum_{i=1}^{k} N_{i,j} = \text{“}\textit{počet výskytů případu } Y = b_j \textit{ při } n \textit{ pokusech}\text{”}$$

což jsou tzv. *marginální četnosti*.

Z tohoto důvodu jako testovací veličinu volíme:

$$T = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\left(N_{i,j} - \frac{N_{i,\bullet} \cdot N_{\bullet,j}}{n}\right)^2}{\frac{N_{i,\bullet} \cdot N_{\bullet,j}}{n}}$$

která má asymptoticky (tj. pro $n \to \infty$) opět χ^2-rozdělení, tentokrát ale s $(k-1) \cdot (\ell - 1)$ stupni volnosti. Pro praktické použití této asymptotiky se obvykle opět požaduje, aby platilo, že

$$\frac{n_{i,\bullet} \cdot n_{\bullet,j}}{n} \geq 5 \quad \text{pro všechna} \quad i = 1, \ldots, k \text{ a } j = 1, \ldots, \ell.$$

Kritérium pro **ZAMÍTNUTÍ H**$_0$ (na hladině α) volíme podobně jako u testu dobré shody a sice

$$\mathbf{H}_0 \text{ zamítáme (na hladině } \alpha) \quad \Leftrightarrow \quad t > \chi^2_{1-\alpha;\,(k-1)(\ell-1)} \ .$$

- -

Příklad 14.2 *Na $n = 100$ osobách byla pozorována barva očí a vlasů. Naměřeny byly následující sdružené četnosti:*

Vlasy / *Oči*	*tmavé*	*světlé*
modré	10	20
šedé	10	10
hnědé	40	10

1. *Jsou barvy očí a vlasů nezávislé? Testujte na hladině 5%.*
2. *Otestujte na hladině 5%, jestli je v populaci stejně tmavovlasých jako světlovlasých.*

Řešení:

Označme si veličiny

X= *"barva očí daného člověka"*

Y= *"barva vlasů daného člověka"*

a dál budeme pracovat s náhodným vektorem (X, Y), tj. u daného člověka budeme zjišťovat barvu očí a barvu vlasů.

(a) Budeme testovat hypotézu:

H$_0$: rozdělení veličin X a Y jsou *nezávislá*

proti alternativní hypotéze:

H$_1$: rozdělení veličin X a Y jsou *závislá.*

na hladině významnosti $\alpha = 5\%$.

Četnost případu $(X, Y) = (i, j)$ v tabulce označme jako $n_{i,j}$ a marginální četnosti pak budou

$n_{i,\bullet} = \sum_j n_{i,j}$ pro případ $X = i$

$n_{\bullet,j} = \sum_i n_{i,j}$ pro případ $Y = j$.

což jsou součty v řádcích a sloupcích tabulky:

$n_{i,j}$ $(Y=)\ j$ $(X=)\ i$	tmavé	světlé	$n_{i,\bullet}$
modré	10	20	30
šedé	10	10	20
hnědé	40	10	50
$n_{\bullet,j}$	60	40	

Za předpokladu $\mathbf{H}_0$ pak jako teoretické četnosti budeme chápat hodnoty $\frac{n_{i,\bullet}\cdot n_{\bullet,j}}{n}$ v této tabulce:

$\frac{n_{i,\bullet}\cdot n_{\bullet,j}}{n}$ $(Y=)\ j$ $(X=)\ i$	tmavé	světlé	$n_{i,\bullet}$
modré	$\frac{30\cdot 60}{100}=18$	$\frac{30\cdot 40}{100}=12$	30
šedé	$\frac{20\cdot 60}{100}=12$	$\frac{20\cdot 40}{100}=8$	20
hnědé	$\frac{50\cdot 60}{100}=30$	$\frac{50\cdot 40}{100}=20$	50
$n_{\bullet,j}$	60	40	

Podmínka na tyto teoretické (tj. očekávané) četnosti ≥ 5 je splněna, takže test nezávislosti můžeme použít. Pro hodnotu testovací statistiky dostaneme

$$t=\sum_{i,j}\frac{\left(n_{i,j}-\frac{n_{i,\bullet}\cdot n_{\bullet,j}}{n}\right)^2}{\frac{n_{i,\bullet}\cdot n_{\bullet,j}}{n}}=$$

$$=\frac{(10-18)^2}{18}+\frac{(10-12)^2}{12}+\frac{(40-30)^2}{30}+\frac{(20-12)^2}{12}+\frac{(10-8)^2}{8}+\frac{(10-20)^2}{20}=18+\frac{1}{18}\doteq 18.056\ .$$

Tuto hodnotu dále porovnáme s hodnotou kvantilu χ^2 pro $(k-1)(\ell-1)$ stupňů volnosti, kde k je počet položek veličiny X a ℓ je počet položek veličiny Y. Tento počet je nyní jiný, než by byl u "obvyklého" testu dobré shody s $k\cdot\ell$ položkami, protože data jsme použili k odhadu marginálních pravděpodobností.

Kritérium pro **ZAMÍTNUTÍ** $\mathbf{H}_0$ (na hladině α) bude tedy tvaru

$$t>\chi^2_{1-\alpha;\ (k-1)(\ell-1)}\quad\Leftrightarrow\quad \text{zamítáme } \mathbf{H}_0 \text{ (na hladině } \alpha)\ .$$

Hledaný kvantil je

$$\chi^2_{1-\alpha;\ (3-1)(2-1)}=\chi^2_{0.95;\ 2}\doteq 5.992\ .$$

Protože

$$t\doteq 18.056>5.992\doteq\chi^2_{0.95;\ 2}\ ,$$

hypotézu o nezávislosti **ZAMÍTÁME**.

- -

(b) V tomto případě budeme uvažovat pouze veličinu Y a testovat (na hladině $\alpha=5\%$) hypotézu

$\widetilde{\mathbf{H}}_0$: veličina Y má rozdělení s pravděpodobnostmi $(p_1,p_2)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$,

proti alternativní hypotéze

$\widetilde{\mathbf{H}}_A$: veličina Y má rozdělení *jiné* než $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Využijeme teď opět test dobré shody. Celkový počet měření je zase $n = 100$. Naměřené četnosti odpovídají už spočítaným marginálním četnostem pro hodnoty veličiny Y, tedy $n_i = n_{\bullet,i}$. Pro přehlednost si zase vypíšeme tabulku s jednotlivými četnostmi (pozorovanými i teoretickými):

i (barvy vlasů)	tmavé	světlé
n_i (pozorované četnosti)	60	40
p_i (teoretické pravděpodobnosti)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$n \cdot p_i$ (teoretické četnosti)	$100 \cdot \frac{1}{2} = 50$	$100 \cdot \frac{1}{2} = 50$

Vidíme, že všechny teoretické četnosti jsou ≥ 5, takže můžeme použít asymptotické přiblížení pro testovací statistiku T. Teď už si jen spočítáme hodnotu této statistiky

$$t = \sum_{i=1}^{2} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = \frac{(60-50)^2}{50} + \frac{(40-50)^2}{50} = 2 + 2 = 4$$

a porovnáme s kvantilem χ^2-rozdělení s $k - 1 = 2 - 1 = 1$ stupněm volnosti:

$$t = 4 > 3.84 \doteq \chi^2_{0.95;\,1} = \chi^2_{1-\alpha;\,k-1}$$

Protože zamítací kritérium JE splněno, tak $\widetilde{\mathbf{H}}_0$ **ZAMÍTÁME** (na hladině α).

Příklad 14.3 (test nezávislosti veličin)

V přímořském středisku probíhá kurz surfování a vodních lyží pro děti. Vybíráme 100 účastníků a sledujeme následující rozdělení sportů mezi chlapce a dívky:

	surf	*vodní lyže*
chlapci	40	20
dívky	20	20

(a) Testujte na hladině $\alpha = 1\%$, zda je druh sportu nezávislý na tom, zda je zvolen chlapcem nebo dívkou.

(b) Testujte na hladině $\alpha = 5\%$, zda jsou počty chlapců a dívek účastnících se kurzu přibližně stejné.

Řešení:

Nechť veličina X označuje pohlaví daného dítěte a Y druh sportu, který si vybralo.

(a) Budeme testovat hypotézu:

$\mathbf{H}_0$: rozdělení veličin X a Y jsou *nezávislá*

proti alternativní hypotéze:

$\mathbf{H}_1$: rozdělení veličin X a Y jsou *závislá.*

na hladině významnosti $\alpha = 5\%$.

Naměřené četnosti $n_{i,j}$ a marginální četnosti $n_{i,\bullet}$ a $n_{\bullet,j}$ pak budou:

$n_{i,j}$ $(Y=)\ j$ $(X=)\ i$	surf	vodní lyže	$n_{i,\bullet}$
chlapci	40	20	60
dívky	20	20	40
$n_{\bullet,j}$	60	40	

Celkový počet dětí je $n = \sum_{i,j} n_{ij} = 40+20+20+20 = 100$. Za předpokladu $\mathbf{H}_0$ pak teoretické četnosti $\frac{n_{i,\bullet} \cdot n_{\bullet,j}}{n}$ v této tabulce budou:

$\frac{n_{i,\bullet} \cdot n_{\bullet,j}}{n}$ $(Y=)\ j$ $(X=)\ i$	surf	vodní lyže	$n_{i,\bullet}$
chlapci	$\frac{60 \cdot 60}{100} = 36$	$\frac{40 \cdot 60}{100} = 24$	60
dívky	$\frac{60 \cdot 40}{100} = 24$	$\frac{40 \cdot 40}{100} = 16$	40
$n_{\bullet,j}$	60	40	

Podmínka na tyto teoretické (tj. očekávané) četnosti ≥ 5 je splněna, takže test nezávislosti můžeme použít. Pro hodnotu testovací statistiky dostaneme

$$t = \sum_{i,j} \frac{\left(n_{i,j} - \frac{n_{i,\bullet} \cdot n_{\bullet,j}}{n}\right)^2}{\frac{n_{i,\bullet} \cdot n_{\bullet,j}}{n}} =$$

$$= \frac{(40-36)^2}{36} + \frac{(20-24)^2}{24} + \frac{(20-24)^2}{24} + \frac{(20-16)^2}{16} \doteq 2.78 \ .$$

Tuto hodnotu dále porovnáme s hodnotou kvantilu χ^2 pro $(k-1)(\ell-1) = 1$ stupňů volnosti, kde $k = 2$ je počet položek veličiny X a $\ell = 2$ je počet položek veličiny Y.

Kritérium pro **ZAMÍTNUTÍ** $\mathbf{H}_0$ (na hladině α) bude tedy tvaru

$$t > \chi^2_{1-\alpha;1} \quad \Leftrightarrow \quad \text{zamítáme } \mathbf{H}_0 \text{ (na hladině } \alpha) \ .$$

Hledaný kvantil je

$$\chi^2_{1-\alpha;\,1} = \chi^2_{0.99;\,1} = 6.63 \ .$$

Protože

$$t \doteq 2.78 \not> 6.63 \doteq \chi^2_{0.99;1} \ ,$$

hypotézu o nezávislosti **NEZAMÍTÁME**.

- -

(b) V tomto případě budeme uvažovat pouze veličinu X a testovat (na hladině $\alpha = 5\%$) hypotézu

$\widetilde{\mathbf{H}}_0$: veličina X má rozdělení s pravděpodobnostmi $(p_1, p_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$,

proti alternativní hypotéze

$\widetilde{\mathbf{H}}_A$: veličina X má rozdělení *jiné* než $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Využijeme teď opět test dobré shody. Celkový počet měření je zase $n = 100$. Naměřené četnosti odpovídají už spočítaným marginálním četnostem pro hodnoty veličiny X, tedy $n_i = n_{i,\bullet}$. Pro přehlednost si zase vypíšeme tabulku s jednotlivými četnostmi (pozorovanými i teoretickými):

i	chlapci	dívky
n_i (pozorované četnosti)	60	40
p_i (teoretické pravděpodobnosti)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$n \cdot p_i$ (teoretické četnosti)	$100 \cdot \frac{1}{2} = 50$	$100 \cdot \frac{1}{2} = 50$

Vidíme, že všechny teoretické četnosti jsou ≥ 5, takže můžeme použít asymptotické přiblížení pro testovací statistiku T. Teď už si jen spočítáme hodnotu této statistiky

$$t = \sum_i \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = \frac{(60-50)^2}{50} + \frac{(40-50)^2}{50} = 2 + 2 = 4$$

a porovnáme s kvantilem χ^2-rozdělení s $k - 1 = 2 - 1 = 1$ stupněm volnosti:

$$t = 4 > 3.84 \doteq \chi^2_{0.95;1} = \chi^2_{1-\alpha;1}$$

Protože zamítací kritérium JE splněno, tak $\widetilde{\mathbf{H}}_0$ **ZAMÍTÁME** (na hladině α).

Příklad 14.4 (oboustranný intervalový odhad pro střední hodnotu)

Opakovaná měření stejné koncentrace látky (tj. náhodné veličiny X) vedla k následujícím výsledkům:

$$\boldsymbol{x} = (0.2,\ 0.23,\ 0.21,\ 0.16,\ 0.18,\ 0.19,\ 0.14,\ 0.18,\ 0.21)\ .$$

Najděte oboustranný symetrický 90% interval spolehlivosti pro střední hodnotu μ.
(Nápověda: $\sum_i x_i = 1.7$, $\sum_i x_i^2 = 0.3272$).

Řešení:
Pro veličinu X budeme předpokládat normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ (to jednak přibližně platí a především pouze za tohoto předpokladu můžeme používat známé vzorce). Dále budeme předpokládat, že měření byla nezávislá.

Intervalový odhad střední hodnoty μ (pro spolehlivost $0.9 = 1 - \alpha$) je:

$$\langle \mu_L,\ \mu_U \rangle = \left\langle \overline{\boldsymbol{x}} - \frac{s_{\boldsymbol{x}}}{\sqrt{n}}\, t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1},\quad \overline{\boldsymbol{x}} + \frac{s_{\boldsymbol{x}}}{\sqrt{n}}\, t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1} \right\rangle .$$

Pro jeho vyčíslení potřebujeme znát realizaci výběrového průměru $\overline{\boldsymbol{x}}$ a výběrového rozptylu $s^2_{\boldsymbol{x}}$ z realizace $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ rozsahu $n = 9$:

- realizace výběrového průměru:

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \tfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{0.2 + 0.23 + \cdots + 0.21}{9} = \frac{1.7}{9} \doteq \mathbf{0.189}$$

- realizace výběrového rozptylu

$$s^2_{\boldsymbol{x}} = \tfrac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{\boldsymbol{x}})^2 = \tfrac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) - \tfrac{n}{n-1} \overline{\boldsymbol{x}}^2 =$$

$$= \tfrac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) - \tfrac{1}{n(n-1)} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 =$$

$$= \underbrace{\frac{0.2^2 + 0.23^2 + \cdots + 0.21^2}{8}}_{=\frac{0.3272}{8}=0.0409} - \frac{1.7^2}{9 \cdot 8} \doteq \mathbf{7.6 \cdot 10^{-4}} \ ,$$

- realizace směrodatné odchylky

$$s_{\boldsymbol{x}} = \sqrt{s_{\boldsymbol{x}}^2} \doteq \mathbf{2.76 \cdot 10^{-2}}$$

Intervalový odhad střední hodnoty μ (pro spolehlivost $0.9 = 1 - \alpha$) nyní je:

$$\langle \mu_L,\ \mu_U \rangle = \left\langle \overline{\boldsymbol{x}} - \frac{s_{\boldsymbol{x}}}{\sqrt{n}}\, t_{1-\frac{\alpha}{2};\, n-1}, \quad \overline{\boldsymbol{x}} + \frac{s_{\boldsymbol{x}}}{\sqrt{n}}\, t_{1-\frac{\alpha}{2};\, n-1} \right\rangle \doteq$$

$$\doteq \left\langle 0.189 - \frac{2.76 \cdot 10^{-2}}{3}\, \underbrace{t_{0.95;\, 8}}_{1.86}, \quad 0.189 + \frac{2.76 \cdot 10^{-2}}{3}\, t_{0.95;\, 8} \right\rangle \doteq$$

$$\doteq \langle \mathbf{0.172},\ \mathbf{0.206} \rangle \ .$$

Příklad 14.5 (jednostranné intervalové odhady pro střední hodnotu)

V terénu jsme naměřeli tyto výšky rostlin daného druhu (v centimetrech)

$$(75,\, 85,\, 58,\, 72,\, 70,\, 75) \ .$$

Předpokládejme, že výška rostliny X má normálního rozdělení $\mathrm{N}(\mu,\, \sigma^2)$. *Stanovte horní a dolní* 95% *interval spolehlivosti pro střední hodnotu μ.*
(Nápověda: $\sum_i x_i = 435$ cm, $\sum_i x_i^2 = 31923$ cm^2).

Řešení:

K určení intervalového odhadu opět použijeme statistiku

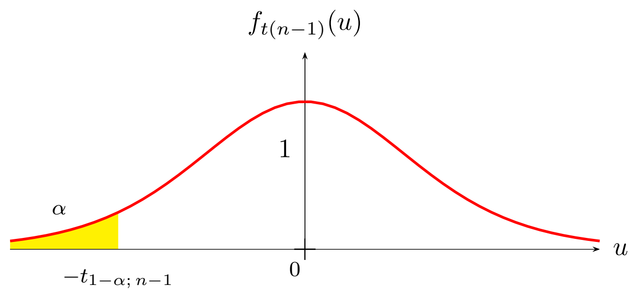
$$T = \frac{\overline{\boldsymbol{X}} - \mu}{S_{\boldsymbol{X}}} \sqrt{n}$$

která má Studentovo rozdělení $t(n-1)$, kde $n = 6$ je rozsah souboru. Poznamenejme, že zatímco centrální limitní větu používáme pro velká n, protože obvykle pro X máme nějaké "obecné" rozdělení, tak v případě, kdy X má *právě* normální rozdělení, známe rozdělení veličiny T také přesně a to pro jakákoliv n (tj. i malá).

- Horní interval spolehlivosti pro μ (tj. μ bude omezené *seshora*) dostaneme ze vztahu

$$P\Big(\underbrace{t_{\alpha;\, n-1}}_{-t_{1-\alpha;\, n-1}} \ \leq\ T \Big) = 1 - \alpha$$

který vyjadřuje dolní $1 - \alpha = 95\%$ intervalový odhad pro veličinu T (viz obrázek):



Případ

$$-t_{1-\alpha;\,n-1} \;\le\; \tfrac{\overline{\boldsymbol{X}}-\mu}{S_{\boldsymbol{X}}}\sqrt{n}\;.$$

tedy nastává s pravděpodobností $1-\alpha = 95\%$. Po úpravě dostaneme pro horní interval spolehlivosti parametru μ tvar:

$$\mu \;\le\; \overline{\boldsymbol{X}} + \frac{S_{\boldsymbol{X}}}{\sqrt{n}}\, t_{0.95;\,5}\;.$$

Pro jeho vyčíslení potřebujeme znát realizaci výběrového průměru $\overline{\boldsymbol{x}}$ a výběrového rozptylu $s_{\boldsymbol{x}}^2$

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i = \frac{435}{6} = \mathbf{72.5}$$

$$s_{\boldsymbol{x}}^2 = \frac{1}{5}\left(\sum_{i=1}^{6} x_i^2 - 6\cdot(\overline{\boldsymbol{x}})^2\right) = \frac{385.5}{5} \doteq \mathbf{77.1}\,, \qquad s_{\boldsymbol{x}} \doteq \mathbf{8.78}\,.$$

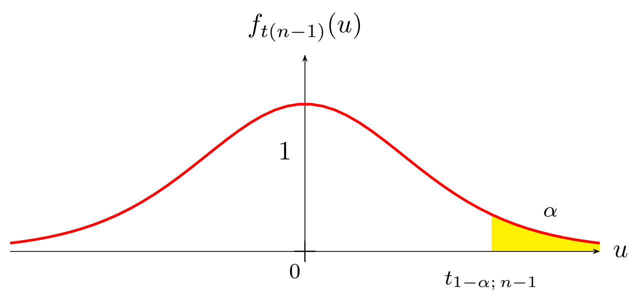
Z tabulek kvantilů Studentova rozdělení dostaneme $t_{0.95;\,5} \doteq 2.02$, a hledaný interval je tedy

$$(-\infty,\ \mu_H\rangle = \left(-\infty, \quad \overline{\boldsymbol{x}} + \frac{s_{\boldsymbol{x}}}{\sqrt{n}}\cdot t_{0.95;\,5}\right\rangle = \left(-\infty, \quad 72.5 + \frac{8.78}{\sqrt{6}}\cdot 2.02\right\rangle =$$

$$= (-\infty,\ \mathbf{79.74}\rangle\;.$$

• Podobně dostaneme dolní interval spolehlivosti pro μ (tj. μ bude omezené *zezdola*) ze vztahu pro horní $1-\alpha = 95\%$ intervalový odhad veličiny T (viz obrázek)

$$P\Big(T \;\le\; t_{1-\alpha;\,n-1}\Big) = 1-\alpha$$



tedy

$$\frac{\overline{\boldsymbol{X}}-\mu}{S_{\boldsymbol{X}}}\sqrt{n} \;\le\; t_{1-\alpha;\,n-1}.$$

a po úpravě

$$\overline{\boldsymbol{X}} - \frac{S_{\boldsymbol{X}}}{\sqrt{n}}\, t_{0.95;\,5} \;\leq\; \mu$$

a dosazení máme

$$\langle \mu_D,\ \infty) = \left\langle \overline{\boldsymbol{x}} - \frac{s_{\boldsymbol{x}}}{\sqrt{n}} \cdot t_{0.95;\,5}\ , \quad \infty \right) = \left\langle 72.5 - \frac{8.781}{\sqrt{6}} \cdot 2.02\ , \quad \infty \right) =$$

$$= \langle \mathbf{65.26},\ \infty)\ .$$

Příklad 14.6 (test střední hodnoty normálního rozdělení při neznámém rozptylu)

Provádíme průzkum, jaký skutečný objem piva X točí v nejmenované restauraci. Zakoupeno bylo $n = 10$ piv a jejich objem byl (v litrech):

$$\boldsymbol{x} = (0.510,\ \ 0.462,\ \ 0.491,\ \ 0.466,\ \ 0.451,\ \ 0.503,\ \ 0.475,\ \ 0.487,\ \ 0.512,\ \ 0.505)\,.$$

Předpokládejte, že natočený objem piva X se řídí normálním rozdělením a jednotlivá měření jsou nezávislá.

(a) Pro zvolenou hladinu $\alpha = 0.05$ odhadněte (symetricky intervalově) střední hodnotu objemu natočeného piva.

(b) Na hladině $\alpha = 0.05$ otestujte hypotézu, že dostaneme natočeno alespoň $\mu_0 = 0.5$ litru.

(Nápověda: $\sum_i x_i = 4.86\ \ell$, $\sum_i (\overline{x} - x_i)^2 \doteq 42.5 \cdot 10^{-4}\ \ell^2$).

Řešení:
Rozptyl je neznámý. Spočítáme si proto realizaci výběrového průměru $\overline{\boldsymbol{x}}$ a výběrové směrodatné odchylky $s_{\boldsymbol{x}}$:

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{10}(0.510 + 0.462 + \cdots + 0.505) = \frac{4.86}{10} = \mathbf{0.486}$$

$$s_{\boldsymbol{x}}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{\boldsymbol{x}})^2 = \frac{42.5 \cdot 10^{-4}}{9} \doteq \mathbf{4.72 \cdot 10^{-4}}$$

$$s_{\boldsymbol{x}} = \sqrt{s_{\boldsymbol{x}}^2} = \sqrt{4.72} \cdot 10^{-2} \doteq \mathbf{2.17 \cdot 10^{-2}}\ .$$

(a) Potřebný kvantil Studentova rozdělení je $t_{1-\frac{\alpha}{2};\,n-1} = t_{0.975;\,9} \doteq 2.26$ a hledaný oboustranný symetrický 95% interval spolehlivosti (v litrech) pro střední hodnotu μ tedy je

$$\langle \mu_L,\ \mu_U \rangle = \left\langle \overline{\boldsymbol{x}} - \frac{s_{\boldsymbol{x}}}{\sqrt{n}} \cdot t_{0.975;\,9}, \quad \overline{\boldsymbol{x}} + \frac{s_{\boldsymbol{x}}}{\sqrt{n}} \cdot t_{0.975;\,9} \right\rangle \doteq$$

$$\doteq \left\langle 0.486 - \underbrace{\frac{2.17 \cdot 10^{-2}}{\sqrt{10}} \cdot 2.26}_{\doteq 0.016},\ \ 0.486 + \frac{2.17 \cdot 10^{-2}}{\sqrt{10}} \cdot 2.26 \right\rangle \doteq \langle \mathbf{0.47},\ \mathbf{0.502} \rangle\ .$$

(b) Otestujeme nulovou hypotézu

$\mathbf{H}_0 : \mu \geq 0.5 \; (= \mu_0)$

proti alternativní hypotéze:

$\mathbf{H}_1 : \mu < 0.5$

na hladině významnosti $\alpha = 0.05$.

Opět použijeme statistiku

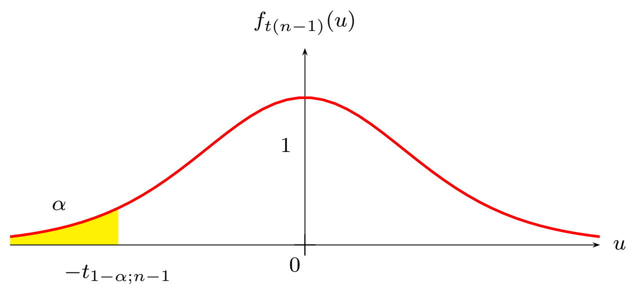
$$T = \frac{\overline{\boldsymbol{X}} - \mu_0}{S_{\boldsymbol{X}}} \cdot \sqrt{n}$$

a **ZAMÍTACÍ** kritérium

$$t < -t_{1-\alpha;n-1} \quad \Leftrightarrow \quad \text{zamítáme } \mathbf{H}_0 \text{ (na dané hladině } \alpha) \ .$$

Proč má zamítací kritérium uvedený tvar: Za předpokladu platnosti nulové hypotézy, tj. pokud $E(X) \geq \mu_0$, bude mít hustota pro statistiku T svůj vrchol v intervalu $\langle 0, \infty)$. Očekávané hodnoty takovéto statistiky T by se měly pohybovat spíše v kládných až nulových hodnotách. Pokud se příliš odchýlí do záporných hodnot, bude to důvod k zamítnutí nulové hypotézy. "Nejhorší" z tohoto hlediska je krajní případ $E(X) = \mu_0$, pro který má T opět Studentovo t-rozdělení s $n-1$ stupni volnosti (viz obrázek). (V ostatních případech $\mu > \mu_0$ uz ovšem statistika T Studentovo rozdělení *nemá*!)

Chyba 1. druhu s pravděpodobností α zde tedy bude soustředěna jen na jedné straně:



Podobně jako předtím máme

$$P_{(H_0 \text{ platí})}\Big(\text{nastává chyba 1. druhu}\Big) = P_{(H_0 \text{ platí})}\Big(\text{zamítáme } \mathbf{H}_0\Big) =$$

$$= P_{(H_0 \text{ platí})}\Big(\; T < -t_{1-\alpha;n-1} \; \Big) = \alpha$$

Realizace testovací statistiky je

$$t = \frac{\overline{\boldsymbol{x}} - \mu_0}{s_{\boldsymbol{x}}} \sqrt{n} \doteq \frac{0.486 - 0.5}{2.17 \cdot 10^{-2}} \sqrt{10} \doteq -2.04$$

a kvantil Studentova rozdělení je

$$-t_{1-\alpha;n-1} = -t_{0.95;\,9} \doteq -1.83 \ .$$

Protože

$$t \doteq -2.04 < -1.83 \doteq -t_{0.95;\,9} \ ,$$

nulovou hypotézu tedy **ZAMÍTÁME**. V této hospodě bychom si tedy asi pivo dávat nechtěli.

Doplnění: Na druhé straně, pokud by přišla do této hospody kontrola a chtěla testovat správnou míru, tj. hypotézu

$\mathbf{H}_0' : \mu = 0.5 \; (= \mu_0)$

také na hladině $\alpha = 0.05$, dojde k jinému závěru:

$$|t| \doteq 2.04 \not> 2.26 \doteq t_{0.975;\,9} = t_{1-\frac{\alpha}{2};\,n-1}$$

a tudíž hypotézu $\mathbf{H}_0'$ **NEZAMÍTNE**.

Test pomocí intervalu spolehlivosti z části (a):

$$\mu_0 = 0.5 \in \langle 0.47,\ 0.502 \rangle = \langle \mu_L,\ \mu_U \rangle$$

nám dává opět stejnou odpověď, tj. nezamítnutí.