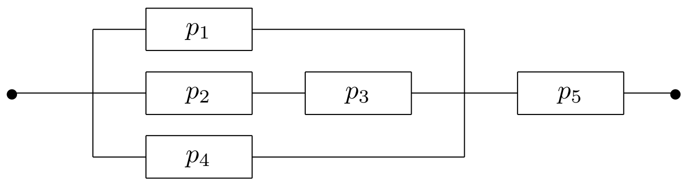
3. cvičení z PRA

4. - 8. března 2024

Příklad 3.1 *(operace s nezávislými jevy) Signál prochází zařízením zleva doprava. Jednotlivé bloky v zařízení mají poruchu s pravděpodobnostmi vyznačenými na obrázku a výskyty poruch jsou na sobě nezávislé. Určete pravděpodobnost, že vyslaná zpráva bude přenesena.*

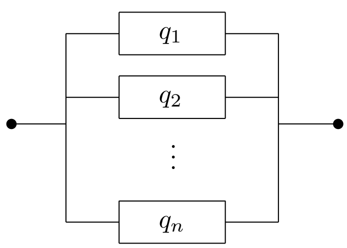


Pravděpodobnosti jsou $p_1 = 0.2$, $p_2 = p_3 = 0.4$, $p_4 = 0.3$ *a* $p_5 = 0.1$.

Řešení:

Úlohu si zjednodušíme tím, že budeme postupně nahrazovat více bloků jedním blokem, který bude mít stejnou pravděpodobnost poruchy.

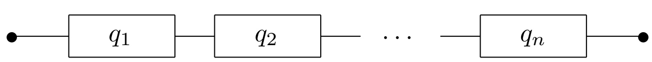
- Pro paralelní zapojení



a jevy $A_i =$"*i-tý blok (seshora) má poruchu*" je pravděpodobnost poruchy tohoto zapojení rovna

$$P(\text{“porucha paralelního zapojení”}) = P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdots P(A_n) = q_1 \cdots q_n \ .$$

- Pro sériové zapojení



a jevy $B_i =$"*i-tý blok (zleva) má poruchu*" je pravděpodobnost poruchy tohoto zapojení rovna

$$P(\text{“porucha sériového zapojení”}) = P(B_1 \cup \cdots \cup B_n) = 1 - P\big((B_1 \cup \cdots \cup B_n)^c\big) =$$

$$= 1 - P(B_1^c \cap \cdots \cap B_n^c) = 1 - P(B_1^c) \cdots P(B_n^c) = 1 - (1 - q_1) \cdots (1 - q_n) \ .$$

Pro vyřešení původního zadání teď

(a) nejdříve nahradíme sériové zapojení dvou bloků s pravděpodobnostmi poruch $p_2 = 0.4$ a $p_3 = 0.4$ jediným blokem s pravděpodobností poruchy

$$p_{2,3} = 1 - (1 - p_2)(1 - p_3) = 1 - 0.6 \cdot 0.6 = 0.64 \ .$$

(b) dále nahradíme paralelní zapojení tří bloků s pravděpodobnostmi poruch $p_1 = 0.2$, $p_{2,3} = 0.64$ a $p_4 = 0.3$ jediným blokem s pravděpodobností poruchy

$$p_{1,2,3,4} = p_1 \cdot p_{2,3} \cdot p_4 = 0.2 \cdot 0.64 \cdot 0.3 = 0.0384 \ .$$

(c) a nakonec nahradíme sériové zapojení dvou bloků s pravděpodobnostmi poruch $p_{1,2,3,4} = 0.0384$ a $p_5 = 0.1$ jediným blokem, který odpovídá celému zařízení a má pravděpodobnost poruchy

$$p_{1,2,3,4,5} = 1 - (1 - p_{1,2,3,4})(1 - p_5) = 1 - 0.9616 \cdot 0.9 = 1 - 0,86544 = 0.13456 \ .$$

Připomenutí: Geometrický pravděpodobnostní prostor je zobecněním klasického pravděpodobnostního prostoru. Množinou všech možných výsledků zde bude nějaká podmnožina $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, které jsme schopni přiřadit její n-rozměrný konečný objem a jevy budou její podmnožiny, kterým také umíme přiřadit nějaký objem. Protože vlastnost přiřazení objemu (tzv. měřitelnost) není vůbec samozřejmostí, je nutné začít uvažovat jen určité podmnožiny množiny Ω (tj. jevy) a tedy i pojem σ-algebry, který takovéto množiny vymezí. Podrobnější specifikací jevů se nebudeme zabývat. Opřeme se jen o skutečnost, že to celé funguje, pokud pracujeme s otevřenými množinami (a jejich spočetnými průniky, sjednoceními a doplňky.) Objem množiny (jevu) A budeme značit $vol(A)$.

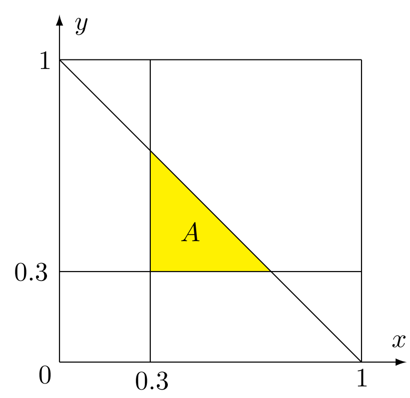
Opět (jako u klasické pravděpodobnosti) budeme považovat všechny výsledky za rovnocenné, takže pravděpodobnost jevu A nebude záviset na tvaru ani umístění množiny A uvnitř množiny Ω, ale pouze na její velikosti, takže pak je $P(A) = \frac{vol(A)}{vol(\Omega)}$.

Příklad 3.2 *Mějme dvě náhodná čísla x a y mezi 0 a 1. Jaká je pravděpodobnost, že jsou obě větší než 0.3 a zároveň jejich součet je menší než 1?*

Řešení:
Množina všech možných výsledků Ω jsou tedy dvojice čísel (x, y) z $\langle 0, 1\rangle$, tj. $\Omega = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$. Hledáme tedy pravděpodobnost jevu

$$A = \{(x, y) \in \Omega \mid x > 0.3 \ \wedge \ y > 0.3 \ \wedge \ x + y < 1\} \ .$$

Ta je dána poměrem plochy $vol(A)$ množiny A a plochy $vol(\Omega)$ množiny Ω.



Takže

$$vol(A) = \tfrac{1}{2}(0.7 - 0.3) \cdot (0.7 - 0.3) = 0.08$$

a proto je

$$P(A) = \frac{vol(A)}{vol(\Omega)} = \frac{0.08}{1} = 0.08.$$

Příklad 3.3 *Na rovnoměrnou nekonečnou čtvercovou mřížku, kde vzdálenost průsečíků je a, hodíme minci o průměru b, kde $b < a$. Jaká je pravděpodobnost, že mince protne nějakou z linek této mřížky?*

Řešení:
Všechny možné výsledky budou souřadnice (x, y) středu mince na ploše. Plocha, kterou máme k dispozici je nekonečná. Protože ale čtverce, na které je rozdělena, považujeme za rovnocenné, zvolíme si jeden z nich např.

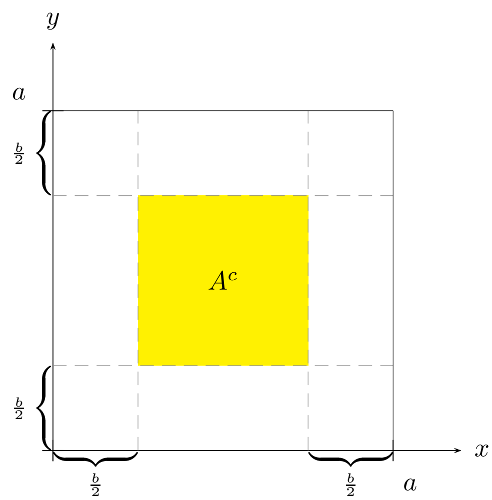
$$\Omega = \langle 0, a\rangle \times \langle 0, a\rangle$$

jako referenční, a všechny případy, kdy střed mince dopadne mimo tento čtverec, se ztotožní pomocí posunutí s případem, kdy střed mince je ve čtverci Ω. Zajímá nás tedy pravděpodobnost jevu

$$A = \text{“\textit{mince protne hranu referenčního čtverce} } \Omega\text{”} .$$

Jednodušší je popsat doplněk (viz obrázek)

$$A^c = \text{“\textit{mince NEprotne hranu referenčního čtverce} } \Omega\text{”} = \left(\tfrac{b}{2}, a - \tfrac{b}{2}\right) \times \left(\tfrac{b}{2}, a - \tfrac{b}{2}\right)$$



Takže

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{(a-b)^2}{a^2} = \frac{b}{a} \cdot \left(2 - \frac{b}{a}\right) .$$

Příklad 3.4 *Lodě A a B připlují do přístavu náhodně a nezávisle na sobě v následujících 24 hodinách. Loď A počká 2 hodiny a pak odplouvá, B počká 1 hodinu a pak odplouvá. Jaká je pravděpodobnost, že se v přístavu potkají?*

Řešení:
Označme S jev, že se dané lodě v přístavu potkají. Možné výsledky jsou časy (x, y), kdy jednotlivé lodě připlují. Takže

$$\Omega = \langle 0, 24\rangle \times \langle 0, 24\rangle$$

Loď A má dobu pobytu v přístavu v intervalu $\langle x, x+2\rangle$ a podobně loď B má dobu pobytu v přístavu v intervalu $\langle y, y+1\rangle$.

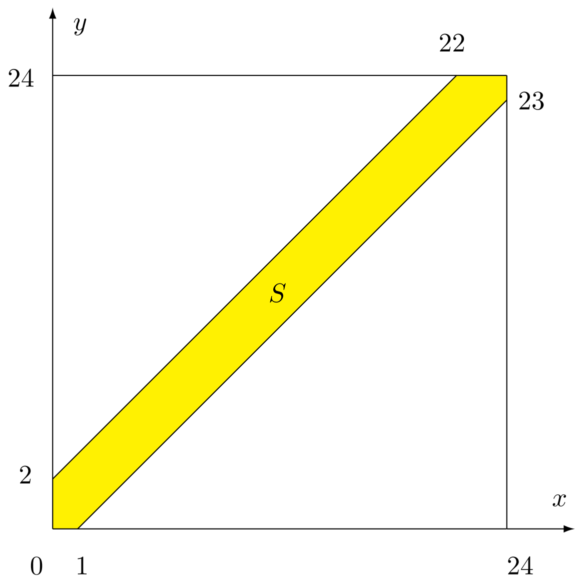
Odpovídající jev setkání je

$$S = \textit{“lodě se setkají v přístavu”} = \{(x,y) \in \Omega \mid \text{intervaly } \langle x, x+2\rangle \text{ a } \langle y, y+1\rangle \text{ mají neprázdný průnik}\} =$$

$$= \{(x,y) \in \Omega \mid x \le y+1,\ y \le x+2\}$$

Take se to dá odvodit tak, že

- pokud je $x \le y$, pak musí být $y \le x+2$,
- a pokud je $y \le x$, pak musí být $x \le y+1$.



Jednodušší je zase spočítat pravděpodobnost doplňku S^c

$$P(S) = 1 - P(S^c) = 1 - \frac{(22^2+23^2)/2}{24^2} \doteq 0.12.$$

Jevy A, B a C jsou nezávislé právě když:

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B), \quad P(A\cap C) = P(A)\cdot P(C), \quad P(B\cap C) = P(B)\cdot P(C)$$

a

$$P(A\cap B\cap C) = P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$$

přičemž žádná z těchto 4 podmínek NENÍ důsledkem zbylých třech.

Příklad 3.5 *Nezávislé jevy A, B, C mají po řadě pravděpodobnosti* 0.2, 0.3, 0.4. *Určete pravděpodobnost jevu $X = (A\cup B)\cap C$.*

Řešení:

Použijeme, že pokud jevy $A_1, \dots, A_n$ jsou nezávislé, pak také jevy

- $A_1 \cup A_2, A_3, \dots, A_n$ jsou nezávislé
- $A_1 \cap A_2, A_3, \dots, A_n$ jsou nezávislé
- $A_1^c, A_2, A_3, \dots, A_n$ jsou nezávislé

Nezávislé jevy tedy můžeme libovolně sdružovat nebo pronikat (daný jev vždy sjednotíme nebo pronikneme vždy jen s jednou skupinou jevů), a můžeme je libovolně převracet na jejich doplňky. Výsledek jsou opět nezávislé jevy.

Protože A, B, C jsou nezávislé, jsou i jevy $A \cup B$ a C nezávislé. Tedy máme

$$P(X) = P((A \cup B) \cap C) = P(A \cup B) \cdot P(C)$$

přičemž

$$\begin{aligned} P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) &= \\ = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) & \\ = 0.2 + 0.3 - 0.2 \cdot 0.3 = 0.44 \ , & \end{aligned}$$

Celkem tak dostaneme

$$P(X) = P(A \cup B) \cdot P(C) = 0.44 \cdot 0.4 = 0.176 \ .$$

Příklad 3.6 *Náhodné jevy A a B jsou nezávislé a $P(A \cup B) = 0.545$, $P(A \cap B) = 0.105$. Určete pravděpodobnosti $P(A)$, $P(B)$ a $P(A \cap B^c)$.*

Řešení:

Jestliže využijeme nezávislosti náhodných jevů A a B, pak dostaneme

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B), \qquad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Označme si $P(A) = x$ a $P(B) = y$. Pro hledané pravděpodobnosti tak dostaneme soustavu rovnic

$$0.545 = x + y - 0.105, \qquad x \cdot y = 0.105 \Rightarrow y = \frac{0.105}{x} \, .$$

Po dosazení do první rovnice dostaneme kvadratickou rovnici pro neznámou x ve tvaru

$$x^2 - 0.65x + 0.105 = 0 \Rightarrow x_1 = 0.35, \quad x_2 = 0.3 \, .$$

Ze symetrie vztahů plyne, že je

$$P(A) = 0.35, \quad P(B) = 0.3 \qquad \text{nebo} \qquad P(A) = 0.3, \quad P(B) = 0.35 \, .$$

A dále pro první z možností je

$$P(A \cap B^c) = P(A) \cdot P(B^c) = 0.35 \cdot 0.7 = 0.245$$

a pro druhou volbu řešení je

$$P(A \cap B^c) = P(A) \cdot P(B^c) = 0.3 \cdot 0.65 = 0.195 \ .$$