5. cvičení z PRA

18. - 22. březen 2024

Připomenutí: Hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny X je taková nezáporná integrabilní funkce $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, že

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(u)\ \mathrm{d}u$$

pro každé $t \in \mathbb{R}$.

Odsud snadno máme, že pokud $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval (nebo i nějaká množina poskládaná z intervalů), pak

$$P(X \in I) = \int_{I} f_X(u)\ \mathrm{d}u$$

tedy pravděpodobnost, že hodnoty veličiny X padnou do I, zjistíme prostě zintegrováním hustoty přes I (podobně zjišťujeme např. hmotnost nějaké křivky, když zintegrujeme hustotu (hmotnosti) přes danou křivku).

Poznamenejme ještě důležitou věc a sice, že hustota f_X NENÍ zdaleka určena jednoznačně jako funkce (např. její změnou v konečně mnoha bodech se nezmění příslušné integrály, takže i změněná funkce bude také hustotou). Pokud veličina X hustotu má, pak platí, že derivace funkce F_X, tj. $(F_X)'$ je hustotou veličiny X (tato derivace sice nemusí všude existovat, ale to není na překážku - tam, kde neexistuje, si prostě zvolíme libovolné nezáporné hodnoty).

Příklad 5.1 *Určete konstantu $c \in \mathbb{R}$ tak, aby funkce*

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot xe^{-2x} & , x \in (0,1) \\ 0 & , \mathit{jinak.} \end{cases}$$

byla hustotou nějaké náhodné veličiny.

Řešení:

Máme charakterizační větu:

> Nezáporná integrabilní funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je hustotou pravděpodobnosti nějaké náhodné veličiny X právě když $\int_{\mathbb{R}} f(x)\ dx = 1$.

Použitím integrace per partes dostaneme

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = \int_{-\infty}^{0} 0\ dx + \int_{0}^{1} c \cdot xe^{-2x}\ dx + \int_{1}^{\infty} 0\ dx =$$

$$= c\left[x \cdot \frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^1 + c\int_0^1 \frac{e^{-2x}}{2}\ dx = -\frac{c}{2}e^{-2} + c\left[\frac{e^{-2x}}{-4}\right]_0^1 = c \cdot \frac{1-3e^{-2}}{4},$$

a tudíž $c = \frac{4}{1-3e^{-2}}$. Protože $c > 0$, je splněna i nezápornost funkce f.

Příklad 5.2 *Mějme funkci*

$$f(x) = \begin{cases} 3e^{-3x} & x \in \langle 0, \infty) \\ 0 & \mathit{jinak.} \end{cases}$$

(a) Ověřte, že f je hustota pravděpodobnosti nějaké náhodné veličiny X.

(b) Sestrojte distribuční funkci veličiny X příslušnou této hustotě.

(c) Spočtěte pravděpodobnost $P(-1 \leq X \leq 1)$.

(d) Spočtěte střední hodnotu $E(X)$ a rozptyl $\mathrm{var}(X)$.

Řešení:

(a) Funkce f je nezáporná a platí, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = \int_{-\infty}^{0} 0\ dx + \int_{0}^{\infty} 3e^{-3x}\ dx = \left[e^{-3x}\right]_0^{\infty} = 1,$$

tudíž vlastnost $\int_{\mathbb{R}} f(x)\ dx = 1$ je splněna. Graf hustoty f viz níže.

(b) Příslušná distribuční funkce F_X pro veličinu X je

pro $t \in (0, \infty)$: $F_X(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} f(x)\ dx = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\ dx + \int\limits_{0}^{t} 3e^{-3x}\ dx = \left[e^{-3x}\right]_0^t = 1 - e^{-3t}$.

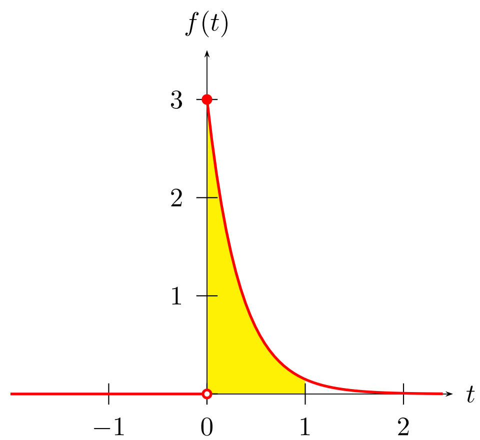
pro $t \in (-\infty, 0\rangle$: $F_X(t) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0\ dt = 0$.

Graf distribuční funkce F_X viz níže.

(c) Hledaná pravděpodobnost je

$$P(-1 \leq X \leq 1) = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{0}^{1} 3e^{-3x}dx = 1 - e^{-3}.$$

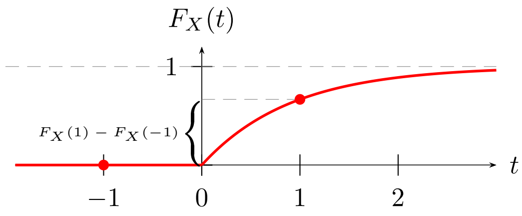
Geometrická interpretace této hodnoty je plocha pod grafem hustoty v intervalu $\langle -1, 1\rangle$:



Lze využít také distribuční funkce:

$$P(-1 \leq X \leq 1) = \underbrace{P(X \leq 1)}_{F_X(1)} - \underbrace{P(X < -1)}_{\substack{\text{limita zleva } F_X(t) \\ \text{v bodě } -1}} \overset{(\text{spojitost } F_X)}{=} F_X(1) - F_X(-1) = 1 - e^{-3 \cdot 1} - 0 = 1 - e^{-3}.$$

Geometrická interpretace v tomto případě je rozdíl funkčních hodnot distribuční funkce:



(d) Použitím integrace per partes dostaneme

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\ dx = \int_{0}^{\infty} 3xe^{-3x} dx = \frac{1}{3},$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\ dx = \int_{0}^{\infty} 3x^2 e^{-3x} dx = \frac{2}{9}.$$

Střední hodnota je tudíž $E(X) = 1/3$ a rozptyl

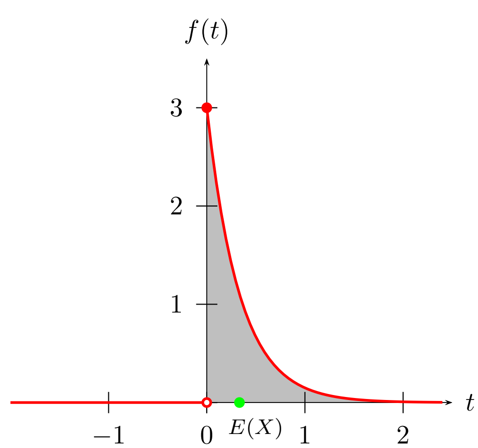
$$\mathrm{var}(X) = E\Big(\big(X - E(X)\big)^2\Big) = E\big(X^2\big) - \big(E(X)\big)^2 = \frac{2}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{9}.$$

Poznamenejme ještě, že veličina X má tzv. *exponenciální* rozdělení, tj.

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & ,\ t < 0 \\ 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} & ,\ t \geq 0 \end{cases}$$

kde $\tau > 0$ je parametr, jehož význam je, ze $E(X) = \tau$. Dále ještě platí, že $\mathrm{var}(X) = \tau^2$.

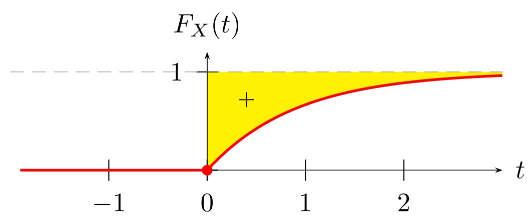
Geometrická interpretace hodnoty $E(X)$ - je to vodorovná souřadnice (zelený bod) těžiště plochy pod grafem hustoty (šedá plocha):



Ještě jedna geometrická interpretace hodnoty $E(X)$ - je to rozdíl velikosti plochy *nad* grafem distr. funkce F_X *v intervalu* $(0, +\infty)$ a velikosti plochy *pod* grafem distr. funkce F_X *v intervalu* $(-\infty, 0)$. Konkrétně:

$$E(X) = -\int_{-\infty}^{0} F_X(t)\ dt + \int_{0}^{\infty} \big(1 - F_X(t)\big)\ dt$$

Tento vztah platí dokonce pro jakoukoliv náhodnou veličinu X (diskrétní, spojitou i smíšenou).



V tomto případě je velikost plochy pod grafem F_X na intervalu $(-\infty, 0)$ nulová, takže v obrázku nejde zvýraznit jako plocha se záporným znaménkem.

Připomeňme si **definici nezávislosti veličin:** Veličiny $X_1, \dots, X_n$ jsou *nezávislé* $\Leftrightarrow$ pro libovolné intervaly $I_1, \dots, I_n \subseteq \mathbb{R}$ platí, že

$$P(X_1 \in I_1, \dots,\ X_n \in I_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in I_i)$$

konkrétně se lze (ekvivalentně) omezit jen na určité intervaly a pak máme:

Veličiny $X_1, \dots, X_n$ jsou *nezávislé* $\Leftrightarrow$ pro libovolné $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ platí, že

$$P(X_1 \leq a_1, \dots,\ X_n \leq a_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq a_i)$$

Pro rozptyl jejich součtu pak platí:
Nechť $X_1, \dots, X_n$ jsou nezávislé veličiny, pak

$$\mathrm{var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}(X_i)$$

- -

Příklad 5.3 *Pravděpodobnost, že atlet v oddíle skočí do dálky přes* 5 *m, je* 0.7*. V oddíle je* 6 *atletů.*

(a) Určete rozdělení náhodné veličiny

$$X = \begin{cases} 1, & \textit{atlet skočil přes } 5\,m \\ 0, & \textit{atlet neskočil přes } 5\,m, \end{cases}$$

její střední hodnotu $E(X)$ *a rozptyl* $\mathrm{var}(X)$*.*

(b) Určete rozdělení náhodné veličiny

$$Y = \text{“ počet atletů v oddíle, kteří skočili přes } 5\,\text{m ”}$$

její střední hodnotu $E(Y)$ *a rozptyl* $\operatorname{var}(Y)$.

(c) Jaká je pravděpodobnost, že přes $5\,\text{m}$ *skočí v oddíle alespoň* 4 *atleti?*

Řešení:

(a) Veličina X má *alternativní* rozdělení, tj. $X \sim \text{Alt}(p)$, kde $p = P(X = 1) = 0.7$ je pravděpodobnost úspěšného pokusu a $P(X = 0) = 1 - p = 0.3$.

A dále máme

$$E(X) = \sum_{i \in \mathbb{R}} i \cdot P(X = i) = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p = 0.7$$

$$E(X^2) = \sum_{i \in \mathbb{R}} i^2 \cdot P(X = i) = 0^2 \cdot (1 - p) + 1^2 \cdot p = p = 0.7$$

a

$$\operatorname{var}(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = p - p^2 = p(1 - p) = 0.7 \cdot 0.3 = 0.21 \ .$$

(b) Veličina Y představuje počet úspěchů při $n = 6$ nezávislých pokusech, s pravděpodobností úspěchu $p = 0.7$, takže Y má *binomické rozdělení* $\text{Binom}(n, p)$. Hodnoty veličiny Y jsou $k = 0, 1, \ldots, n$ a jejich pravděpodobnosti jsou

$$P(Y = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} = \binom{6}{k} 0.7^k \cdot 0.3^{6-k} \ .$$

Pro další výpočty se hodí všimnout si, že $Y = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ kde

$$X_i = \begin{cases} 1, & i\text{-tý atlet skočil přes } 5\,\text{m} \\ 0, & i\text{-tý atlet neskočil přes } 5\,\text{m}, \end{cases}$$

jsou navzájem nezávislé náhodné veličiny a $X_i \sim \text{Alt}(p)$.

Pro střední hodnotu veličiny Y pak máme

$$E(Y) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{E(X_i)}_{p} = n \cdot p = 6 \cdot 0.7 = 4.2$$

a z nezávislosti X_i pak pro rozptyl máme

$$\operatorname{var}(Y) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\operatorname{var}(X_i)}_{p(1-p)} = np(1 - p) = 6 \cdot 0.7 \cdot 0.3 = 1.26 \ .$$

(c)

$$P(Y \geq 4) = \sum_{k=4}^{6} \binom{6}{k} 0.7^k \cdot 0.3^{6-k} = 15 \cdot 0.7^4 \cdot 0.3^2 + 6 \cdot 0.7^5 \cdot 0.3^1 + 1 \cdot 0.7^6 \cdot 1 =$$

$$= 0.324135 + 0.302526 + 0.117649 = 0.74431 \ .$$