

6. cvičení z PRA

25. - 29. března 2024

Poznámky k Poissonovu rozdělení: Pro veličinu

$$X = \text{“počet událostí během intervalu délky } T\text{”}$$

kde interval je obvykle časový (ale může být i délkový nebo měřený nějakou jinou jednotkou), můžeme předpokládat *Poissonovo* rozdělení

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \quad \text{kde } k = 0, 1, 2, \dots$$

s (bezrozměrným) parametrem $\lambda > 0$, pokud jsou splněny následující podmínky

- počet událostí může nabývat libovolných (konečných) hodnot.
- jednotlivé události jsou nezávislé a nenastávají současně (lze je časově oddělit),
- *průměrný* počet událostí v libovolném časovém podintervalu je úměrný pouze časové délce tohoto podintervalu a ne jeho umístění v původním intervalu (tj. lze říct, že střední četnosti událostí za jednotku času se s průběhem doby nemění),

V praxi půjde např. o příchod zákazníka do fronty, chytání ryb, průjezd aut atd. a to během nějaké předem určené doby.

Parametr λ pak představuje střední hodnotu (tj. $E(X) = \lambda$) protože:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}}_{=e^{\lambda}} = \lambda$$

Poissonovo rozdělení je většinou spíše limitní případ a používá se jako aproximace binomického rozdělení $\text{Bi}(n, p)$, u kterého sice neznáme n a p , ale víme, že n je (dostatečně) velké a známe střední hodnotu dané veličiny (viz níže).

V praxi tedy můžeme podmínky Poissonova rozdělení přibližně zajistit pokud budou události pocházet z velkého počtu nezávislých zdrojů (z každého jen jednou) a podmínky se během měření nebudou měnit (tj. nebude se náhle měnit “okamžitá střední četnost událostí”).

Poznámka: Ke tvaru Poissonova rozdělení se můžeme dostat pomocí binomického rozdělení (s využitím výše uvedených předpokladů) takto:

Časový interval délky T si rozdělíme na n dílků, a budeme předpokládat, že v každém se může stát maximálně jedna událost se stejnou pravděpodobností p_n . Dostaneme tak binomické rozdělení veličiny

$$X_n = \text{“počet událostí v daném časovém úseku délky } T \text{ rozděleném na } n \text{ dílků”}$$

se střední hodnotou $\lambda = E(X_n) = n \cdot p_n$, kterou si vezmeme jako pevnou (neboli vlastně položíme $p_n := \frac{\lambda}{n}$). Tedy X_n má binomické rozdělení $\text{Bi}(n, p_n)$. Spočítáme si teď limitu (pro pevně zvolené k):

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} (p_n)^k (1 - p_n)^{n-k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}_{\rightarrow e^{-\lambda}} \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\rightarrow 1} \underbrace{\prod_{i=0}^{k-1} \left(\frac{n-i}{n}\right)}_{\rightarrow 1} = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}. \end{aligned}$$

Připomeňme si, že pojem nezávislosti pro jevy umožňuje přirozeně definovat nezávislost veličin :

Definice: Veličiny X a Y jsou *nezávislé* $\Leftrightarrow P(X \in I, Y \in J) = P(X \in I) \cdot P(Y \in J)$ pro libovolné intervaly $I, J \subseteq \mathbb{R}$.

Příklad 6.1 Na látce (pevné šířky) je průměrně jeden kaz na 10 m délky. Předpokládáme, že počet kazů se řídí Poissonovým rozdělením. Jaká je pravděpodobnost, že na 50 m délky látky bude

- (a) přesně 10 kazů,
- (b) maximálně 3 kazy,
- (c) přesně 5 kazů, z toho 4 na prvních 20 m?

Řešení:

Označme si náhodnou veličinu

$$X = \text{“počet kazů na 50 m délky látky”}$$

Pak $X \sim \text{Poiss}(\lambda)$ a pravděpodobnosti hodnot jsou

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \text{pro } k = 0, 1, \dots$$

kde $E(X) = \lambda$. Pro veličinu \tilde{X} , označující počet kazů na 10 m délky, předpokládáme také Poissonovo rozdělení se střední hodnotou $E(\tilde{X}) = 1$. Protože střední hodnota má být úměrná délce intervalu dostaneme

$$\frac{E(X)}{E(\tilde{X})} = \frac{50 \text{ m}}{10 \text{ m}} = 5 \quad \Rightarrow \quad \lambda = E(X) = 5$$

Tudíž

(a) $P(X = 10) = \frac{5^{10}}{10!} e^{-5} \doteq 0.0181$.

(b) $P(X \leq 3) = e^{-5} \left(\frac{5^0}{0!} + \frac{5^1}{1!} + \frac{5^2}{2!} + \frac{5^3}{3!} \right) = e^{-5} \left(1 + 5 + \frac{25}{2} + \frac{125}{6} \right) = \frac{118}{3} e^{-5} \doteq 0.265$.

(c) Označme si veličiny

$$X_1 = \text{“počet kazů na prvních 20 m délky látky”}$$

$$X_2 = \text{“počet kazů na zbylých 30 m délky látky”}.$$

Ty budou nezávislé. Analogicky k předešlému budeme mít

$$P(X_1 = k) = \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1} \quad \text{a} \quad P(X_2 = k) = \frac{\lambda_2^k}{k!} e^{-\lambda_2},$$

kde $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = 3$. Hledaná pravděpodobnost je (díky nezávislosti X_1 a X_2) tedy

$$P(X_1 = 4, X_2 = 1) \stackrel{(\text{nezáv. } X_i)}{=} P(X_1 = 4) \cdot P(X_2 = 1) = \frac{2^4}{4!} e^{-2} \cdot \frac{3^1}{1!} e^{-3} = 2e^{-5} \doteq 0.01348.$$

Připomenutí: Veličina

$$X = \text{“počet neúspěchů než nastane první úspěch”}$$

má geometrické rozdělení $\text{Geom}(p)$, pokud můžeme opakovat libovolné množství nezávislých pokusů, které mají všechny stejnou pravděpodobnost úspěchu p . Příkladem je třeba situace, že se chceme trefit míčem do koše apod.

Hodnoty veličiny X jsou $\{0, 1, 2, \dots\}$. Pro odvození rozdělení X si pro $i = 1, 2, 3 \dots$ označme jevy

$$A_i = \text{“}i\text{-tý pokus je úspěšný”}$$

keré budou nezávislé s budou mít pravděpodobnosti $P(A_i) = p$. Pak máme pravděpodobnosti

$$P(X = k) = P(A_1^c \cap \dots \cap A_k^c \cap A_{k+1}) = P(A_1^c) \cdot \dots \cdot P(A_k^c) \cdot P(A_{k+1}) = (1 - p)^k p$$

pro $k = 0, 1, 2, \dots$. Pro střední hodnotu a rozptyl pak máme:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} kp(1 - p)^k = \dots = \frac{1-p}{p}$$

$$\text{var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

což si můžeme lépe zapamatovat jako

$$\text{var}(X) = \frac{1}{p} \cdot E(X) .$$

Příklad 6.2 *Pravděpodobnost narození chlapce je 0.51. Jaká je pravděpodobnost, že v dané porodnici dnes bylo nejpозději (v časovém pořadí) čtvrté narozené dítě holčička?*

Řešení:

Lze použít dva přístupy:

(a) Vezmeme si náhodnou veličinu

$$X = \text{“ počet narozených chlapců před první narozenou holčičkou.”}$$

Ta má *geometrické* rozdělení $\text{Geom}(p)$ s pravděpodobností $p = 1 - 0.51 = 0.49$ úspěšného pokusu (tj. narození holčičky). Hodnoty veličiny X jsou $k = 0, 1, 2, \dots$ s pravděpodobnostmi

$$P(X = k) = (1 - p)^k \cdot p = 0.51^k \cdot 0.49$$

Pro jednodušší výpočet si ještě označme $q = 1 - p = 0.51$. Hledaná pravděpodobnost je tedy

$$P(X < 4) = \sum_{k=0}^3 q^k \cdot (1 - q) = (1 - q) \cdot \underbrace{(1 + q + \dots + q^3)}_{\frac{1-q^4}{1-q}} = 1 - q^4 = 1 - 0.51^4 \doteq 0.9323.$$

(b) Vezmeme si náhodnou veličinu

$$Y = \text{“ počet narozených holčiček mezi prvními 4 narozenými dětmi.”}$$

Ta má binomické rozdělení $\text{Bi}(4, p)$, kde je opět $p = 0.49$. Hledaná pravděpodobnost je tedy

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{4}{0} p^0 \cdot (1 - p)^4 = 1 - q^4 = 1 - 0.51^4.$$

Příklad 6.3 *Při numerickém výpočtu se reálná čísla zaokrouhlují na jedno desetinné místo. Jaká je pravděpodobnost, že vzdálenost skutečného čísla od zaokrouhleného bude větší než 0.04?*

Řešení:

Podobně jako v příkladu o házení mince na nekonečnou mřížku (**Příklad 2.2**) budeme předpokládat, že vstupní hodnoty (tj. čísla, která budeme zaokrouhlovat) pocházejí z nějakého referenčního intervalu $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ délky 0.1 (zaokrouhlujeme na jedno desetinné místo), na kterém máme geometrickou pravděpodobnost, např. $\Omega = \langle -0.05, 0.05 \rangle$.

Označme si teď náhodnou veličinu $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ jako

$$X = \text{“skutečná hodnota”} - \text{“zaokrouhlená hodnota”}$$

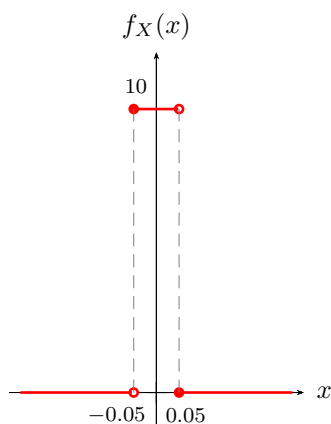
tj. pro $\omega \in \Omega = \langle -0.05, 0.05 \rangle$ to funguje jako

$$X(\omega) = \omega - 0 = \omega \quad \text{pro} \quad -0.05 \leq \omega < 0.05,$$

A nás teď zajímá pravděpodobnost $P(|X| > 0.04)$. K tomu potřebujeme znát rozdělení veličiny X . Intuitivně tušíme, že X bude mít rovnoměrné rozdělení na své množině hodnot, tj. v intervalu $\langle -0.05, 0.05 \rangle$. Předpokládejme tedy, že $X \sim \text{Ro}(-0.05, 0.05)$ (níže si to pak zdůvodníme). Veličina X má pak spojitě rozdělení s hustotou pravděpodobnosti

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{0.05 - (-0.05)} = 10 & , \quad -0.05 \leq x < 0.05 \\ 0 & , \quad \text{jinak} \end{cases}$$

s grafem

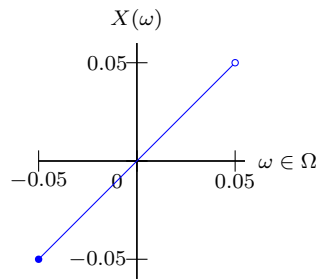


(Hodnoty f_X v krajních bodech intervalu nejsou podstatné.)

Hledaná pravděpodobnost je tudíž

$$\begin{aligned} P(|X| > 0.04) &= 1 - P(|X| \leq 0.04) = 1 - P(-0.04 \leq X \leq 0.04) = \\ &= 1 - \int_{-0.04}^{0.04} 10 \, dx = 1 - 10 \cdot 0.08 = 0.2 . \end{aligned}$$

Poznámka: Výše zmíněné rovnoměrné rozdělení si můžeme ještě odvodit. Veličinu X si můžeme znázornit tímto grafem:



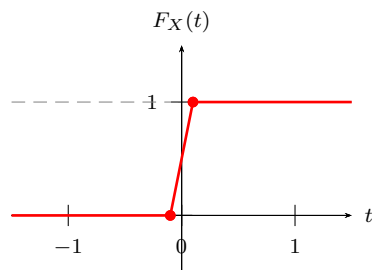
Odsud snadno vidíme, že pro $t \in (-0.05, 0.05)$ je

$$\text{vol}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq t\}) = \text{vol}(\langle -0.05, t \rangle) = t + 0.05$$

takže distribuční funkce je

$$F_X(t) = P(X \leq t) = \begin{cases} 0 & , t < -0.05 \\ \frac{\text{vol}\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq t\}}{\text{vol}(\Omega)} = \frac{t+0.05}{0.1} = 10t + 0.5 & , t \in \langle -0.05, 0.05 \rangle \\ 1 & , t \geq 0.05 \end{cases}$$

s grafem



Distribuční funkce F_X je tedy spojitá a má výše uvedenou hustotu.

Poznámky k exponenciálnímu rozdělení:

Exponenciální rozdělení popisuje pravděpodobnost veličiny

$$Y = \text{“doba mezi dvěma následnými výskyty události”},$$

v systému, který nemá paměť na předchozí události. Tedy to, co se stane od určitého okamžiku, nezávisí na tom, co bylo předtím. V praxi jde např. o dobu, za kterou se porouchá zařízení, které se ”neopotřebává” (např. polovodičové součástky), nebo o dobu radioaktivního rozpadu atd. Exponenciální rozdělení je jediné, které splňuje následující rovnici:

$$P(Y > s + t \mid Y > s) = P(Y > t)$$

pro všechna $s, t > 0$. Rovnice vyjadřuje to, že pravděpodobnost, že zařízení bude bez poruchy pracovat alespoň t hodin, je stejná v případě, že jsme jej právě zapnuli (pravá strana rovnice), jako za předpokladu, že předtím už bez poruchy pracovalo s hodin (levá strana rovnice).

Exponenciální rozdělení $\text{Exp}(\frac{1}{\tau})$ je charakterizováno parametrem $\tau > 0$ (s fyzikálním rozměrem času), který představuje střední dobu čekání, tedy $E(Y) = \tau$ a dále ještě platí $\text{var}(Y) = \tau^2$. Distribuční funkce pro $Y \sim \text{Exp}(\frac{1}{\tau})$ je

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & , t \leq 0 \\ 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} & , t > 0. \end{cases}$$

Doplnění: Diskrétní analogií exponenciálního rozdělení je *geometrické* rozdělení, které neměří čas spojitě ale pouze diskrétně. Jak už víme, je to rozdělení veličiny

$$\tilde{Y} = \text{”počet neúspěšných pokusů než nastane první úspěch”},$$

např. v situaci, že se chceme trefit míčem do koše atd. Hodnoty \tilde{Y} jsou $\{0, 1, 2, \dots\}$. Je to opět jediné takové diskrétní rozdělení splňující analogickou rovnici:

$$P(\tilde{Y} > k + n | \tilde{Y} > n) = P(\tilde{Y} > k)$$

pro všechna $k, n \in \mathbb{N}_0$ s podobným významem jako u exponenciálního rozdělení.

Souvislost mezi exponenciálním a Poissonovým rozdělením:

Nechť

$$Y = \text{”doba čekání na událost”}$$

je veličina s exponenciálním rozdělením. Pak veličina

$$X = \text{”počet událostí během doby } T\text{”}$$

má Poissonovo rozdělení a platí

$$E(Y) = \frac{T}{E(X)}$$

kde doba T je vyjádřena ve stejných jednotkách, jaké má veličina Y . Neboli

$$\text{”střední doba čekání”} = \frac{\text{”délka intervalu”}}{\text{”střední počet událostí v tomto intervalu”}}$$

Příklad 6.4 Na zákaznickou linku přichází průměrně 12 hovorů za hodinu. Ženy volají dvakrát častěji než muži. Doba čekání na hovor má exponenciální rozdělení.

- Jaká je pravděpodobnost, že nejbližší hovor přijde nejdříve za 10 minut?
- Určete čas t takový, že nejbližší hovor přijde nejdříve za t minut s pravděpodobností 0.7.
- Jaká je pravděpodobnost, že v pracovní době mezi 10:00 a 10:40 zavolají maximálně 3 zákazníci a všichni budou ženy?

Řešení:

Tuto úlohu můžeme řešit jak s využitím exponenciálního rozdělení, tak Poissonova rozdělení.

- Pomocí exponenciálního: Podle věty má veličina

$$X = \text{”počet hovorů během doby 60 min”}$$

Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda = E(X) = 12$. Tudíž náhodná veličina

$$Y = \text{”doba čekání na hovor” [v minutách]}$$

má exponenciální rozdělení se střední hodnotou $\tau = E(Y) = \frac{60 \text{ min}}{12} = 5 \text{ min}$. Její distribuční funkce je tedy

$$F_Y(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t/5} & , t > 0 \\ 0 & , t \leq 0. \end{cases}$$

Hledaná pravděpodobnost pak je

$$P(Y > 10 \text{ min}) = 1 - P(Y \leq 10 \text{ min}) = 1 - F_Y(10) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{10}{5}}\right) = e^{-2} \doteq 0.1353 .$$

Pravděpodobnost také můžeme spočítat pomocí hustoty f_Y veličiny Y :

$$f_Y(t) = \begin{cases} \frac{1}{5}e^{-t/5} & , t > 0 \\ 0 & , t \leq 0. \end{cases}$$

jako

$$P(Y > 10 \text{ min}) = \int_{10}^{\infty} f_Y(t) dt = \int_{10}^{\infty} \frac{1}{5}e^{-t/5} dt = e^{-2} .$$

- *Pomocí Poissonova:* Podle věty opět víme, že veličina

$$X' = \text{“počet hovorů během doby 10 min”}$$

má Poissonovo rozdělení s parametrem λ' . Hledaná pravděpodobnost je dána jako

$$P(X' = 0) = \frac{(\lambda')^0}{0!} \cdot e^{-\lambda'} = e^{-\lambda'} .$$

K určení parametru λ' použijeme vztah mezi veličinami Y a X' a podobně mezi veličinami Y a X , tj.

$$\frac{E(X')}{10 \text{ min}} = \frac{1}{E(Y)} = \frac{E(X)}{60 \text{ min}}$$

což odpovídá i požadavku, že průměrný počet událostí v časovém intervalu je úměrný jeho délce. Konkrétně tedy $\lambda' = E(X') = \frac{10 \text{ min}}{60 \text{ min}} \cdot 12 = 2$ a hledaná pravděpodobnost je pak

$$P(X' = 0) = e^{-2} .$$

- (b) • *Pomocí exponenciálního:* Z předchozího víme, že

$$Y = \text{“doba čekání na hovor” [v minutách]}$$

má exponenciální rozdělení se střední hodnotou $\tau = E(Y) = 5 \text{ min}$. Pak pro hledaný čas $t > 0$ máme

$$0.7 = P(Y > t) = 1 - P(Y \leq t) = 1 - F_Y(t) = 1 - (1 - e^{-t/5}) = e^{-t/5}$$

tedy

$$t = -5 \cdot \ln 0.7 \doteq 1.78 \text{ min} .$$

- *Pomocí Poissonova:* Vezmeme veličinu (závislou na t - zde je to parametr)

$$\tilde{X} = \text{“počet hovorů během doby t minut”}$$

která bude mít Poissonovo rozdělení s parametrem $\tilde{\lambda}$, pro který máme vztah

$$\tilde{\lambda} = E(\tilde{X}) = \frac{t}{\tau} = \frac{t}{5}$$

Hodnotu t pak dostaneme z rovnice

$$0.7 = P(\tilde{X} = 0) = \frac{(\tilde{\lambda})^0}{0!} e^{-\tilde{\lambda}} = e^{-t/5}$$

což vede pochopitelně na stejný výsledek

$$t = -5 \cdot \ln 0.7 \doteq 1.78 \text{ min} .$$

(c) Označme si veličiny

$$X_0 = \text{“počet všech hovorů během 40 min”} \sim \text{Poiss}(\lambda_0)$$

$$X_1 = \text{“počet hovorů od žen během 40 min”} \sim \text{Poiss}(\lambda_1)$$

$$X_2 = \text{“počet hovorů od mužů během 40 min”} \sim \text{Poiss}(\lambda_2) .$$

Budeme předpokládat nezávislost hovorů od žen a od mužů, tj. nezávislost veličin X_1 a X_2 . Analogicky k předešlému budeme mít $\lambda_0 = 12 \cdot \frac{40 \text{ min}}{60 \text{ min}} = 8$. Pro určení hodnot λ_1 a λ_2 teď využijeme toho, že $X_0 = X_1 + X_2$, tj. dostaneme

$$8 = E(X_0) = E(X_1) + E(X_2)$$

a z poměrů volání žen a mužů zase máme, že

$$E(X_1) : E(X_2) = 2 : 1 .$$

Tedy $\lambda_1 = E(X_1) = 8 \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{3}$ a $\lambda_2 = E(X_2) = 8 \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$.

Hledaná pravděpodobnost je (díky nezávislosti X_1 a X_2) tedy

$$\begin{aligned} P(X_1 \leq 3, X_2 = 0) &\stackrel{(\text{nezáv. } X_i)}{=} P(X_1 \leq 3) \cdot P(X_2 = 0) = \\ &= e^{-\frac{16}{3}} \left(1 + \frac{16}{3} + \frac{\left(\frac{16}{3}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{16}{3}\right)^3}{6} \right) \cdot e^{-\frac{8}{3}} = \frac{3713}{81} e^{-8} \doteq 0.0154. \end{aligned}$$