8. cvičení z PRA

8. - 12. dubna 2024

Připomenutí: Jestliže máme dvě náhodné veličiny $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$, pak zobrazení

$$(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$$

nazýváme náhodný (dvousložkový) vektor.

Tedy náhodnému výsledku ω (tj. elementárnímu jevu) přiřadíme dvojici hodnot $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Např. vybranému člověku z množiny lidí Ω přiřadíme jeho tělesnou výšku a hmotnost.

(Obdobně vznikne náhodný vektor s více složkami. My se teď zaměříme hlavně na dvousložkový případ.)

Náhodný vektor (X, Y) umí přenést a vytvořit rozdělení pravděpodobnosti na $\mathbb{R}^2$ - a to tak, že každá "rozumná" množina $A \subseteq \mathbb{R}^2$ (např. otevřená množina nebo interval atd.) bude mít prostě pravděpodobnost

$$P_{(X,Y)}(A) := P\Big(\underbrace{(X, Y)^{-1}(A)}_{\{\omega \in \Omega \mid (X(\omega), Y(\omega)) \in A\}} \Big) .$$

Rozdělení této pravděpodobnosti $P_{(X,Y)}$ na $\mathbb{R}^2$ můžeme opět úplně popsat, pokud známe pravděpodobnosti jen některých speciálních intervalů a ty nám definují tzv. *sdruženou distribuční funkci* $F_{(X,Y)} : \mathbb{R}^2 \to \langle 0, 1\rangle$ jako

$$F_{(X,Y)}(a, b) := P(X \le a, Y \le b)$$

Je dobré si uvědomit, že náhodný vektor (X, Y) můžeme snadno sestavit z libovolných dvou náhodných veličin X a Y. Zatímco ale k počítání s veličinou X nám stačí znát jen její distribuční funkci F_X, k práci s vektorem nám NESTAČÍ znalost distribučních funkcí jeho složek! Potřebujeme totiž znát, jaký je vztah mezi veličinami X a Y, a ten je schovaný právě ve sdružené distribuční funkci.

Opět si připomeňme, že pojem nezávislosti pro jevy umožňuje přirozeně definovat nezávislost veličin :

Definice: Veličiny X a Y jsou *nezávislé* $\Leftrightarrow$ $P(X \in I, Y \in J) = P(X \in I) \cdot P(Y \in J)$ pro libovolné intervaly $I, J \subseteq \mathbb{R}$.

Věta: X a Y jsou nezávislé $\Leftrightarrow$ $F_{(X,Y)}(a, b) = F_X(a) \cdot F_Y(b)$ pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$.

Příklad 8.1 *Délka hrany krychle je náhodná veličina $X \sim \mathrm{Ro}(1, 2)$. Určete distribuční funkci náhodné veličiny Y popisující plochu povrchu této krychle.*

Řešení:
Máme veličiny

X= *"délka hrany krychle"*

Y= *"plocha povrchu krychle"*

takže $Y = 6 \cdot X^2$ a pro distribuční funkci náhodné veličiny Y dostáváme

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(6X^2 \le y) = P(X^2 \le \tfrac{y}{6}) = \begin{cases} P\left(|X| \le \sqrt{\frac{y}{6}}\,\right) = F_X\left(\sqrt{\frac{y}{6}}\,\right) & , \ y \ge 0 \\ P(\emptyset) = 0 & , \ y < 0 \ . \end{cases}$$

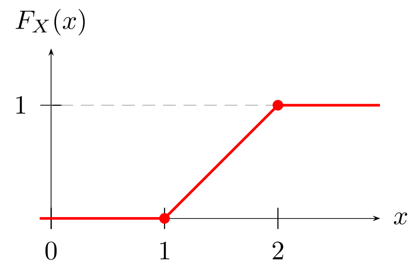
kde jsme využili toho, že obor hodnot pro X je $\langle 1,2\rangle$, tedy $X \geq 0$ a speciálně tak platí, že $|X| = X$.

Teď si už si jen vyjádříme F_X a dosadíme:

Pro veličinu $X \sim \mathrm{Ro}(1,2)$ je její hustota $f_X(x) = \begin{cases} 1, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$ a distribuční funkce

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ x-1, & 1 \leq x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

s grafem



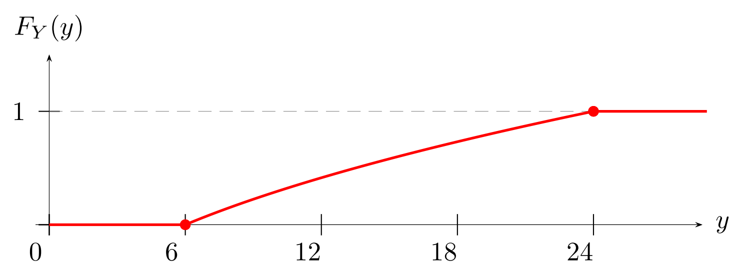
Do F_X (správně!) dosadíme $x = \sqrt{\frac{y}{6}}$ (pro $y \geq 0$) a přepíšeme podmínky pro y:

$$1 \leq \sqrt{\tfrac{y}{6}} \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq \tfrac{y}{6} \leq 4 \quad \Leftrightarrow \quad 6 \leq y \leq 24$$

(zbylé podmínky jsou podobné) a dostaneme tak

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 6 \\ \sqrt{\frac{y}{6}} - 1, & 6 \leq y \leq 24 \\ 1, & y > 24 \end{cases}$$

s grafem



Příklad 8.2 *Průměrný počet zákazníků během dne v první prodejně je 20, ve druhé prodejně 25. Předpokládáme, že oba počty se řídí Poissonovým rozdělením. Odvoďte rozdělení počtu zákazníků v obou prodejnách dohromady.*

Řešení:
Označme si veličiny

X = *"počet zákazníků během dne v 1. prodejně"*

Y = *"počet zákazníků během dne v 2. prodejně"*

Z = *"počet zákazníků během dne v obou prodejnách dohromady"*

kde X a Y budeme přirozeně pokládat za nezávislé. Máme

$$X \sim \text{Poiss}(\lambda), \text{ kde } \lambda = E(X) = 20$$

$$Y \sim \text{Poiss}(\mu), \text{ kde } \mu = E(Y) = 25$$

a

$$P(X = i) = \frac{\lambda^i}{i!} \cdot e^{-\lambda} \quad \text{a} \quad P(Y = j) = \frac{\mu^j}{j!} \cdot e^{-\mu}$$

Jelikož $Z = X + Y$ a případ $X + Y = k$ se rozloží na disjunktní možnosti $(X, Y) = (i, k - i)$ pro $i = 0, 1, \ldots, k$, dostáváme

$$P(Z = k) = P(X + Y = k) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} P(X = i,\ Y = k - i) \overset{\text{(nezávislost)}}{=} \sum_{i=0}^{k} P(X = i) \cdot P(Y = k - i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!} e^{-\mu} = e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{k!} \cdot \underbrace{\frac{k!}{i!(k-i)!}}_{\binom{k}{i}} \cdot \lambda^i \cdot \mu^{k-i} =$$

$$= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda^i \cdot \mu^{k-i} \overset{\text{(binom. věta)}}{=} \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} (\lambda + \mu)^k$$

tj. $Z \sim \text{Poiss}(\lambda + \mu)$ neboli $Z \sim \text{Poiss}(45)$.

Poznámka: Představme si, že jednotlivým prodejnám přiřadíme (čistě účelově) nějaké velikosti a a b (např. velikost plochy prodejny v m^2) tak, aby průměrný počet zákazníků na jednotku plochy byl v obou prodejnách stejný, tj. $\frac{\lambda}{a} = \frac{\mu}{b}$. Veličiny X a Y pak můžeme chápat jako počty událostí v intervalech délky a a b, přičemž v obou intervalech je "hustota událostí" stejná. Při tomto přístupu bude veličina Z představovat počet událostí v intervalu délky $a + b$, takže Poissonovo rozdělení se pak dá skutečně očekávat.

Připomenutí: Kovariance pro X a Y je definována jako

$$\text{cov}(X, Y) := E\Big((X - EX) \cdot (Y - EY)\Big) = \cdots = E(XY) - E(X) \cdot E(Y) \ .$$

Speciálně je $\text{cov}(X, X) = \text{var}(X)$.

Kovariance $\text{cov}(\cdot, \cdot)$ má tyto vlastnosti (X, Y, Z jsou veličiny, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ jsou konstanty):

- je lineární v každé složce zvlášť (tj. je bilineární), tedy:

$$\text{cov}(aX + bY, Z) = a \cdot \text{cov}(X, Z) + b \cdot \text{cov}(Y, Z)$$
$$\text{cov}(Z, aX + bY) = a \cdot \text{cov}(Z, X) + b \cdot \text{cov}(Z, Y)$$

- symetrická, tj. $\operatorname{cov}(X,Y)=\operatorname{cov}(Y,X)$
- pozitivně semi-definitní, tj. $\operatorname{cov}(X,X)\geq 0$, kde navíc platí, že:
  $\operatorname{cov}(X,X)=0 \ \Rightarrow\ \exists\alpha\in\mathbb{R}$, že $P(X=\alpha)=1$ (neboli: X odpovídá konstantní veličině)
- $\operatorname{cov}(X+c,Y+d)=\operatorname{cov}(X,Y)$.

Platí : X a Y jsou nezávislé veliciny $\Longrightarrow$ $\operatorname{cov}(X,Y)=0$.

(POZOR: Opačná implikace obecně neplatí!!)

Příklad 8.3 *Nechť* $X\sim \mathrm{Ro}(0,2)$ *a* $Y=X^2+1$.

(a) Sestrojte distribuční funkci náhodné veličiny Y.

(b) Spočtěte $\operatorname{cov}(X,Y)$.

(c) Rozhodněte, zda jsou X *a* Y *nezávislé a proč.*

Řešení:

(a) Distribuční funkce F_Y se dá získat pomocí distribuční funkce F_X. Před výpočtem si ještě uvědomme, že $X\geq 0$ (protože její obor hodnot je $\langle 0,2\rangle$). Speciálně tedy $|X|=X$. Pro distribuční funkci náhodné veličiny Y máme

$$F_Y(y)=P(Y\leq y)=P(X^2+1\leq y)=$$

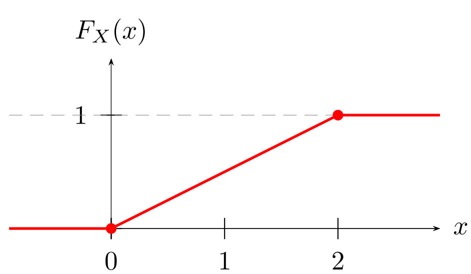
$$=P(X^2\leq y-1)=\begin{cases} P(\emptyset)=0 & ,\ y-1<0 \\ P\left(|X|\leq\sqrt{y-1}\,\right)=F_X\left(\sqrt{y-1}\,\right) & ,\ y-1\geq 0. \end{cases}$$

Teď už si stačí jen vyjádřit F_X a dosadit.

Pro veličinu $X\sim\mathrm{Ro}(0,2)$ je její hustota $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0\leq x\leq 2\\ 0, & \text{jinak}\end{cases}$ a distribuční funkce je pak

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\ dt=\begin{cases}0, & x<0\\ x/2, & 0\leq x\leq 2\\ 1, & x>2\end{cases}$$

s grafem



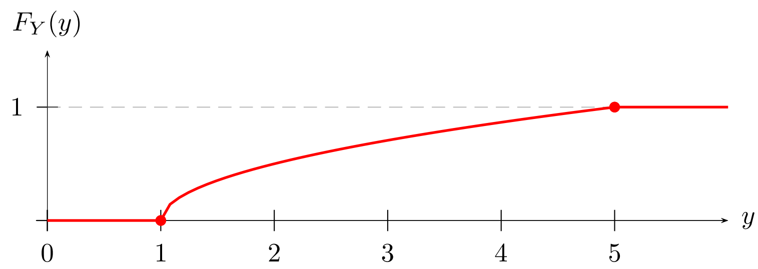
Do F_X (správně!) dosadíme $x = \sqrt{y-1}$ (pro $y - 1 \geq 0$) a přepíšeme podmínky pro y:

$$0 \leq \sqrt{y-1} \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq y-1 \leq 4 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq y \leq 5$$

(zbylé podmínky jsou podobné) a dostaneme tak

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 1 \\ \frac{\sqrt{y-1}}{2}, & 1 \leq y \leq 5 \\ 1, & y > 5 \end{cases}$$

s grafem



(b) Kovarianci vypočteme ze vztahu

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \operatorname{cov}(X, X^2+1) = \operatorname{cov}(X, X^2) = E(X \cdot X^2) - E(X) \cdot E(X^2)$$

Stačí si tedy pro $n \geq 1$ zjistit

$$E(X^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \cdot f_X(x)\ dx = \int_0^2 \frac{x^n}{2}\ dx = \left[\frac{x^{n+1}}{2(n+1)}\right]_0^2 = \frac{2^n}{n+1}$$

a dosazením dostaneme

$$\operatorname{cov}(X,Y) = 2 - 1 \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}\ .$$

(c) Protože $\operatorname{cov}(X,Y) \neq 0$, jsou veličiny X a Y závislé. Toto zjištění ovšem můžeme udělat i bez výpočtu kovariance:

Veličiny X a Y jsou funkčně propojené, takže stačí najít podmínky, které naráz nemůžou splnit, ale jednotlivě, s nenulovými pravděpodobnostmi, ano. Z předchozích úprav už víme, že pro $1 < y < 5$ platí

$$Y \leq y \quad \Leftrightarrow \quad X^2 + 1 \leq y \quad \Leftrightarrow \quad X \leq \sqrt{y-1}$$

a pravděpodobnosti těchto jevů jsou (z tvaru F_X a F_Y) ostře mezi 0 a 1. Takže např. z volby $y = 2$ dostaneme, že

$$Y \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad X \leq 1$$

takže

$$P(\underbrace{Y \leq 2,\ X > 1}_{\emptyset}) = 0 \neq \underbrace{P\left(Y \leq 2\right)}_{F_Y(2)=0.5} \cdot \underbrace{P\left(X > 1\right)}_{1-F_X(1)=0.5}$$

z čehož plyne, že veličiny X a Y jsou závislé.

Poznámka: Jak se dá očekávat, pokud jedna veličina závisí svými hodnotami na druhé, nejspíš nezávislé nebudou. Výjimkou je jen jeden případ a celá situaci se dá popsat takto:

Věta: Nechť X a $h(X)$ jsou obě náhodné veličiny, kde $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je měřitelná funkce (např. spojitá). Pak X a $h(X)$ jsou nezávislé veličiny právě jen pokud

- $h(X)$ je konstantní veličina (přesněji: ex. $c \in \mathbb{R}$, že $P\big(h(X) = c\big) = 1$).

Příklad:

(1) Pro představu, kdy může třeba nastat případ nezávislosti v předchozí větě, si vezmeme $X \sim \mathrm{Ro}(1, 2)$ a funkci $h(x) = \max\{x, 3\}$. Vidíme, že ani veličina X ani funkce h nejsou konstantní, ale jejich složení $Y = h(X) = \max\{X, 3\} = 3$ už konstanta je. No a veličiny X a 3 už samozřejmě nezávislé jsou.

(2) Ukažme si příklad dvou veličin tvaru X a $Y = h(X)$, které budou závislé a přitom bude platit $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$.

Stačí zvolit $X \sim \mathrm{Ro}(-1, 1)$ a $Y = X^2$. Podle věty výše X a Y budou závislé, protože Y není konstanta.

(Proč Y není (skoro všude) konstantní: protože X má spojité rozdělení, tak je $P(X = a) = 0$ pro každé $a \in \mathbb{R}$. Odsud ihned máme, že pro $b \in \mathbb{R}$ je $P(Y = b) = P(X^2 = b) = 0$. Tedy Y nemůže splňovat $P(Y = c) = 1$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$ a tudíž nemůže být konstanta.)

Současně s tím vidíme, že $E(X) = \frac{-1+1}{2} = 0$ a dále, že

$$E(X \cdot Y) = E(X \cdot X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} t^3 \cdot f_X(t)\ \mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \underbrace{t^3 \cdot \tfrac{1}{2}}_{\text{lichá funkce}}\ \mathrm{d}t = 0$$

A dále, střední hodnota $E(Y) = E(X^2)$ existuje, i když už nulová nebude.

Tím tedy dostaneme

$$\mathrm{cov}(X, Y) = \underbrace{E(XY)}_{=0} - \underbrace{E(X)}_{=0} \cdot E(Y) = 0\ .$$

Další poznámky ke kovarianci a korelaci: Náhodné veličiny (jako funkce na pravděpodobnostním prostoru Ω) tvoří přirozeně (reálný) vektorový prostor (kde ještě navíc dvě veličiny budeme pokládat za totožné, pokud se rovnají s pravděpodobností 1). Na vektorovém *pod*prostoru veličin s konečnou střední hodnotou a konečným rozptylem pak můžeme přirozeným způsobem zavést skalární součin jako

$$\langle X | Y \rangle := E(X \cdot Y)$$

Díky němu můžeme přirozeně zavést *normu* $\|X\|$ (neboli "délku" vektoru X) jako

$$\|X\| := \sqrt{\langle X | X \rangle} = \sqrt{E(X^2)}\ .$$

Mimo jiné si všimněme, že pro X je $\mathrm{var}(X) = \|X - E(X)\|^2$, takže platí

$$\|norm(X)\| = \left\| \frac{X - EX}{\sqrt{\mathrm{var}(X)}} \right\| = \frac{\|X - EX\|}{\sqrt{\mathrm{var}(X)}} = 1$$

neboli $norm(X)$ má délku skutečně znormovanou na hodnotu 1.

Skalární součin nám dále umožňuje měřit také úhel mezi dvěma vektory. Pro veličiny X a Y je užitečné znát, jestli jejich výchylky vůči středním hodnotám (tj. veličiny $X - EX$ a $Y - EY$) mají podobné chování (tj. jestli korelují). Zavádíme proto korelaci mezi veličinami X a Y jako kosinus úhlu α mezi vektory $X-EX$ a $Y-EY$, tedy

$$\mathrm{corr}(X,Y) := \frac{\langle X-EX \mid Y-EY\rangle}{\|X-EX\|\cdot\|Y-EY\|} = \cdots = \frac{E(XY)-E(X)\cdot E(Y)}{\sqrt{\mathrm{var}(X)\cdot\mathrm{var}(Y)}} \; .$$

(Veličiny $X-EX$ a $Y-EY$ mají nulovou střední hodnotu).
A kromě toho máme:

$$\mathrm{cov}(X,Y) := \langle X-EX \mid Y-EY\rangle = \cdots = E(XY)-E(X)\cdot E(Y) \; .$$

Praktický důsledek korelace:
Pokud máme dvě veličiny X a Y takové, že

$$X-EX\geq 0 \;\Leftrightarrow\; Y-EY\geq 0 \quad \Big(\text{což implikuje, že} \quad (X-EX)(Y-EY)\geq 0\Big)$$

pak je $\mathrm{corr}(X,Y)\geq 0$.

Obdobně platí: Jestliže

$$X-E(X)\geq 0 \;\Leftrightarrow\; Y-E(Y)\leq 0$$

pak je $\mathrm{corr}(X,Y)\leq 0$.

Ačkoliv zpětné implikace v obou případech neplatí, přesto nám korelace umožňuje nějakým způsobem zachytit jistou míru kauzální závislosti dvou veličin.

Poznámka: Uvědomme si, že existuje několik stupňů "nezávislosti" veličin:

$$X \text{ a } Y \text{ jsou nezávislé} \xRightarrow{\text{(pokud cov ex.)}} \underset{\text{(tj. } X-E(X) \text{ a } Y-E(Y) \text{ jsou kolmé)}}{\mathrm{cov}(X,Y)=0} \xRightarrow{\text{(pokud } X,Y \text{ nejsou konst.)}} X \text{ a } Y \text{ jsou lineár. nezáv.}$$

Konstantní veličina X spolu s jakoukoliv jinou veličinou Y vždy tvoří vzájemně nezávislé veličiny X a Y (tento případ je ale celkem nezajímavý).

Definice: Náhodný vektor (X,Y) má *diskrétní rozdělení* $\Leftrightarrow$ existuje $A\subseteq\mathbb{R}^2$, která je konečná nebo spočetná a taková, že $P((X,Y)\in A)=1$. (Tedy vektor má nejvýše spočetně mnoho "zajímavých" hodnot.)
V tomto případě pak pro *sdruženou distribuční funkci* máme

$$F_{(X,Y)}(a,b) = P(X\leq a, Y\leq b) = \sum_{\substack{u\leq a\\ t\leq b}} P(X=u, Y=t) \; .$$

Věta: Nechť náhodný vektor (X,Y) má *diskrétní* rozdělení. Pak:

X a Y jsou nezávislé $\Leftrightarrow P(X=i,Y=j)=P(X=i)\cdot P(Y=j)$ pro všechna $i,j\in\mathbb{R}$.

(Srovnejte to s obecně NEdiskrétním případem, kdy je nezávislost popsána jen nerovnostmi:

$$P(X\leq i, Y\leq j) = P(X\leq i)\cdot P(Y\leq j) \text{ pro všechna } i,j\in\mathbb{R} \text{ .)}$$

Příklad 8.4 *Sdružené pravděpodobnosti náhodných veličin X a Y jsou dány následující tabulkou:*

	$X=0$	$X=1$	$X=2$
$Y=0$	1/4	1/8	0
$Y=1$	1/4	1/4	1/8

(a) Jaká jsou marginální rozdělení náhodného vektoru (X, Y)?.

(b) Určete varianční a korelační matici.

(c) Jsou veličiny X a Y nezávislé? Zdůvodněte.

*(d) Pokud X **a** Y **jsou závislé**, popište (jednoznačně určené) rozdělení náhodného vektoru (X', Y') se stejnými marginálními rozděleními jako (X, Y), jehož složky **jsou nezávislé**.*

Řešení:
Na začátku bychom si měli pro pořádek ještě ověřit, že součet všech pravděpodobností v tabulce je $= 1$ (pokud by byl např. < 1, pak nemáme úplnou informaci o rozdělení a nemůžeme dál pokračovat).

(a) Marginální (česky: okrajová) rozdělení náhodného vektoru (X, Y) jsou rozdělení jeho jednotlivých složek, tedy veličin X a Y. Vektor (X, Y) má diskrétní rozdělení a obě veličiny X a Y budou proto mít také diskrétní rozdělení a pro jejich rozdělení platí:

$$P(X = i) = P(X = i,\ Y \in \mathbb{R}) = \sum_{j \in \mathbb{R}} P(X = i,\ Y = j)$$

$$P(Y = j) = P(X \in \mathbb{R},\ Y = j) = \sum_{i \in \mathbb{R}} P(X = i,\ Y = j)$$

Hodnoty pravděpodobností získáme tedy sečtením v řádcích (pro X) a sloupcích (pro Y) naší tabulky:

	$X = 0$	$X = 1$	$X = 2$	$P(Y = j)$
$Y = 0$	1/4	1/8	0	3/8
$Y = 1$	1/4	1/4	1/8	5/8
$P(X = i)$	1/2	3/8	1/8	

Tedy

$$P(X = i) = \begin{cases} 1/2, & i = 0 \\ 3/8, & i = 1 \\ 1/8, & i = 2 \\ 0, & \text{jinak} \end{cases} \qquad \text{a} \qquad P(Y = j) = \begin{cases} 3/8, & j = 0 \\ 5/8, & j = 1 \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

(b) Kovarianci vypočteme ze vztahu

$$\operatorname{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)\ .$$

Pro výpočet $E(XY)$ si připomeňme, že pro diskrétní vektor (X, Y) a měřitelnou (tj. téměř každou, např. spojitou) funkci $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ platí podobná věc jako jsme měli už u náhodné veličiny a sice:

$$E\big(h(X, Y)\big) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{R}^2} h(i, j) \cdot P(X = i,\ Y = j)\ .$$

Odsud tedy snadno spočítáme střední hodnotu $E(XY)$:

$$E\big(X \cdot Y\big) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{R}^2} i \cdot j \cdot P(X = i,\ Y = j) =$$
$$= 0 \cdot 0 \cdot \tfrac{1}{4} + 0 \cdot 1 \cdot \tfrac{1}{8} + 0 \cdot 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \cdot \tfrac{1}{4} + 1 \cdot 1 \cdot \tfrac{1}{4} + 1 \cdot 2 \cdot \tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{2}$$

Dále potřebujeme znát

$$E(X) = 0 \cdot \tfrac{1}{2} + 1 \cdot \tfrac{3}{8} + 2 \cdot \tfrac{1}{8} = \tfrac{5}{8}$$
$$E(Y) = 0 \cdot \tfrac{3}{8} + 1 \cdot \tfrac{5}{8} = \tfrac{5}{8}$$

Takže

$$\operatorname{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{5}{8} \cdot \tfrac{5}{8} = \tfrac{7}{64}.$$

Pro korelaci

$$\operatorname{corr}(X, Y) = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sqrt{\operatorname{var}(X)}\sqrt{\operatorname{var}(Y)}}$$

potřebujeme ještě znát rozptyly, takže si je dopočítáme:

$$E(X^2) = 0^2 \cdot \tfrac{1}{2} + 1^2 \cdot \tfrac{3}{8} + 2^2 \cdot \tfrac{1}{8} = \tfrac{7}{8},$$
$$E(Y^2) = 0^2 \cdot \tfrac{3}{8} + 1^2 \cdot \tfrac{5}{8} = \tfrac{5}{8},$$
$$\operatorname{var}(X) = E(X^2) - \Big(E(X)\Big)^2 = \tfrac{7}{8} - (\tfrac{5}{8})^2 = \tfrac{31}{64},$$
$$\operatorname{var}(Y) = E(Y^2) - \Big(E(Y)\Big)^2 = \tfrac{5}{8} - (\tfrac{5}{8})^2 = \tfrac{15}{64}.$$

Všimněme si ještě, že $Y \sim \operatorname{Alt}(\frac{5}{8})$, takže rozptyl jsme mohli spočítat jako $\operatorname{var}(Y) = \frac{5}{8} \cdot (1 - \frac{5}{8}) = \frac{15}{64}$. Korelace tedy je

$$\operatorname{corr}(X, Y) = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sqrt{\operatorname{var}(X)} \cdot \sqrt{\operatorname{var}(Y)}} = \frac{\frac{7}{64}}{\sqrt{\frac{31}{64}} \cdot \sqrt{\frac{15}{64}}} = \frac{7}{\sqrt{465}} \doteq 0.32462,$$

Varianční matice je tudíž

$$\operatorname{Var}(X, Y) = \begin{pmatrix} \operatorname{cov}(X, X) & \operatorname{cov}(X, Y) \\ \operatorname{cov}(Y, X) & \operatorname{cov}(Y, Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{var}(X) & \operatorname{cov}(X, Y) \\ \operatorname{cov}(X, Y) & \operatorname{var}(Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{31}{64} & \frac{7}{64} \\ \frac{7}{64} & \frac{15}{64} \end{pmatrix}$$

a korelační matice je

$$\operatorname{Corr}(X, Y) = \begin{pmatrix} \operatorname{corr}(X, X) & \operatorname{corr}(X, Y) \\ \operatorname{corr}(Y, X) & \operatorname{corr}(Y, Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \operatorname{corr}(X, Y) \\ \operatorname{corr}(X, Y) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{\sqrt{465}} \\ \frac{7}{\sqrt{465}} & 1 \end{pmatrix}.$$

Pro zajímavost si ještě můžeme zjistit úhel $\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$ mezi našimi náhodnými veličinami $X - EX$ a $Y - EY$:

$$\alpha = \arccos\big(\operatorname{corr}(X, Y)\big) \doteq \arccos\big(0.32462\big) \doteq 71.06^\circ\ .$$

(c) Protože nyní je např.

$$P(X=2, Y=0) = 0 \neq \tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{3}{8} = P(X=2) \cdot P(Y=0).$$

jsou X a Y **závislé**. (Důvodem pro závislost X a Y je také fakt, že $\mathrm{cov}(X,Y) \neq 0$. Zdůrazněme ale, že pokud je kovariance nulová, nemůžeme (pouze na základě její znalosti) o nezávislosti obecně nic říct!)

(d) Nechť (X', Y') je nyní náhodný vektor s **nezávislými** složkami, které mají stejná marginální rozdělení jako má vektor (X,Y) tedy

$$P(X'=i) = P(X=i) \quad \text{a} \quad P(Y'=j) = P(Y=j) \quad \text{pro všechna} \quad i,j \in \mathbb{R}\ .$$

Pro sdružené pravděpodobnosti vektoru (X', Y') pak tedy platí, že

$$P(X'=i,\ Y'=j) = P(X'=i) \cdot P(Y'=j) = P(X=i) \cdot P(Y=j)$$

a můžeme je tak popsat následující tabulkou:

	$Y'=0$	$Y'=1$	$Y'=2$	$P(X'=i)$
$X'=0$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{16}$	$\frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{64}$	$\frac{1}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{64}$	3/8
$X'=1$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{16}$	$\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{15}{64}$	$\frac{1}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{64}$	5/8
$P(Y'=j)$	1/2	3/8	1/8	