

# 1. cvičení z STP

19.-22. únor 2019

Uvažujme výběr z  $n$  různých předmětů, které vybíráme  $k$ -krát. Počet všech jednotlivých možností pro různé způsoby výběru uvádí následující tabulka:

Výběr	bez vracení	s vracením
uspořádaný	$n(n-1)\cdots(n-k+1)$	$n^k$
neuspořádaný	$\binom{n}{k}$	$\binom{n+k-1}{k}$

**Příklad 1.1** *Házíme dvěma kostkami. Stanovte pravděpodobnost jevu*

$A =$  "na kostkách padne součet menší než 5".

## Řešení:

Výsledky pokusu jsou uspořádané dvojice, kde první člen dvojice odpovídá hodu 1. kostkou a druhý člen odpovídá hodu 2. kostkou. Tedy množina všech možných výsledků je  $\Omega = \{(i, j) \mid i, j = 1, \dots, 6\}$  a vypsáno konkrétně je to:

(1,1) (1,2) (1,3) (1,4) (1,5) (1,6),  
(2,1) (2,2) (2,3) (2,4) (2,5) (2,6),  
(3,1) ..... (3,6),  
(4,1) ..... (4,6),  
(5,1) ..... (5,6),  
(6,1) (6,2) (6,3) (6,4) (6,5) (6,6),

tzn. počet všech možných výsledků je  $|\Omega| = 36$ . Jev  $A$  pak představuje podmnožinu  $A = \{(i, j) \in \Omega \mid i + j < 5\}$  a konkrétně je to

$$A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)\}$$

Počet výsledků příznivých jevu  $A$  je tak  $|A| = 6$ . Všechny možné výsledky považujeme za stejně pravděpodobné, proto je hledaná pravděpodobnost jevu  $A$  rovna  $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ .

**Příklad 1.2** *V balíčku máme 32 karet, z toho 4 esa. Dvakrát za sebou vytáhneme náhodně jednu kartu. Stanovte pravděpodobnost jevu*

$A =$  "alespoň jedna z vytažených karet je eso",

jestliže po prvním tahu kartu

(1) vrátíme,

(2) nevrátíme

zpět do balíčku.

### Řešení:

(1) Výsledky pokusu jsou opět uspořádané dvojice (množina  $\Omega_1$ ). První člen dvojice odpovídá kartě vytažené v prvním tahu a druhý člen kartě vytažené v druhém tahu. V prvním tahu můžeme kartu vytáhnout 32 způsoby. Protože vytaženou kartu vracíme zpět do urny, i v druhém tahu máme 32 možností. Počet všech možných případů je tedy  $|\Omega_1| = 32^2$ . Příznivým případům odpovídají tahy (libovolná karta - eso), (eso - libovolná karta), (eso - eso). Počet příznivých případů je  $|A_1| = 28 \cdot 4 + 4 \cdot 28 + 4 \cdot 4$ . Hledaná pravděpodobnost je rovna

$$P(A_1) = \frac{|A_1|}{|\Omega_1|} = \frac{28 \cdot 4 + 4 \cdot 28 + 4 \cdot 4}{32^2} = \frac{15}{64} \doteq 0.2344.$$

Jednodušeji se k výsledku můžeme dostat přes doplňkový jev

$$A_1^c = \Omega_1 \setminus A_1 = \text{“žádná z vytažených karet není eso”},$$

Pro pravděpodobnost pak platí, že

$$P(A_1^c) = \frac{|\Omega_1 \setminus A_1|}{|\Omega_1|} = \frac{|\Omega_1| - |A_1|}{|\Omega_1|} = 1 - P(A_1)$$

Počet prvků  $A_1^c$  je pak (analogicky jako u  $\Omega_1$ ) roven  $28^2$ , takže

$$P(A_1) = 1 - P(A_1^c) = 1 - \frac{28 \cdot 28}{32 \cdot 32} = 1 - \frac{7 \cdot 7}{8 \cdot 8} = \frac{15}{64}$$

(2) Tentokrát z uspořádaných dvojic karet musíme vyloučit ty, kde první i druhá karta jsou stejné (dostaneme tak množinu  $\Omega_2$ ). Počet možných případů je vzhledem k tomu, že po prvním tahu kartu nevrátíme,  $|\Omega_2| = 32 \cdot 31$ . Příznivým případům odpovídají opět tahy (libovolná karta - eso), (eso - libovolná karta), (eso - eso). Počet příznivých případů je nyní  $|A_2| = 28 \cdot 4 + 4 \cdot 28 + 4 \cdot 3$ . Hledaná pravděpodobnost je rovna

$$P(A_2) = \frac{|A_2|}{|\Omega_2|} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 28 + 4 \cdot 3}{32 \cdot 31} = \frac{59}{248} \doteq 0.2379.$$

Přes doplňkový jev je to opět jednodušší:

$$A_2^c = \text{“žádná z vytažených karet není eso”},$$

$$|A_2^c| = 28 \cdot 27$$

$$P(A_2) = 1 - P(A_2^c) = 1 - \frac{28 \cdot 27}{32 \cdot 31} = \frac{59}{248}$$

Kromě toho je vidět, že pravděpodobnosti se v případech vrácení i nevrácení příliš neliší. Je to proto, že pokud máme velké množství  $N$  (zde  $N = 32$ ), ze kterého taháme pouze  $k$ -krát (zde  $k = 2$ ), tj. "několikrát" v porovnání s tím jak velké množství máme, neboli  $k \ll N$ , tak pravděpodobnost, že bychom opakovaně vytáhli znovu tentýž předmět je zanedbatelná. Tudíž obě pravděpodobnosti se budou téměř shodovat.

**Příklad 1.3** Na party se sešlo 14 studentů, z toho 8 vysokoškoláků a 6 středoškoláků. Jaká je pravděpodobnost, že v náhodně vybrané čtveřici budou

- (1) všichni čtyři středoškoláci (jev  $A$ ),  
 (2) právě jeden vysokoškolák (jev  $B$ ),  
 (3) aspoň jeden vysokoškolák (jev  $C$ )?

**Řešení:**

Prostorem  $\Omega$  všech možných výsledků, jsou všechny možné *neuspořádané* čtveřice utvořené ze 14 studentů, tedy všechny 4-prvkové podmnožiny 14-ti prvkové množiny. Také se tomu říká *kombinace 4-té třídy ze 14 prvků*. Jejich počet je kombinační číslo  $\binom{14}{4} = \frac{14!}{4!(14-4)!}$ .

- (1) Počet všech čtveřic vytvořených pouze ze středoškoláků je  $\binom{6}{4}$ , tudíž hledaná pravděpodobnost je

$$P(A) = \frac{\binom{6}{4}}{\binom{14}{4}} \doteq 0.015.$$

- (2) Počet všech trojic vytvořených ze středoškoláků je  $\binom{6}{3}$ , počet všech "jednic" vytvořených z vysokoškoláků je  $\binom{8}{1} = 8$ . K vytvoření příznivých čtveřic je třeba všechny trojice zkombinovat se všemi "jednicemi", tudíž hledaná pravděpodobnost je

$$P(B) = \frac{\binom{8}{1} \cdot \binom{6}{3}}{\binom{14}{4}} \doteq 0.16.$$

- (3) Jedná se o doplňkový jev k jevu  $A$ , tj.  $C = A^c$ , tudíž

$$P(C) = 1 - P(A) \doteq 0.985.$$

**Poznámka:** V tomto příkladu jsme setkali s tzv. *hypergeometrickým* rozdělením. To se objevuje tehdy, když

- z množiny, která má  $N$  prvků (zde  $N = 14$ ),
- z nichž právě  $K$  má nějakou vlastnost  $\mathcal{V}$  (zde  $K = 8$  a  $\mathcal{V}$  = "být vysokoškolák"),
- chceme vybrat právě  $n$  prvků (zde  $n = 4$ )

a ptáme se, s jakou pravděpodobností bude právě  $k$  z nich mít vlastnost  $\mathcal{V}$ .

Tato pravděpodobnost je dána podílem příznivých možností ku všem. Příznivé jsou dány počtem způsobů jak vybrat  $k$  prvků (s  $\mathcal{V}$ ) z  $K$  prvků (s  $\mathcal{V}$ ) násobeno počtem způsobů jak vybrat zbytek, tj.  $n - k$  prvků (bez  $\mathcal{V}$ ) z  $N - K$  prvků (bez  $\mathcal{V}$ ). Celkem tedy

$$\frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

přičemž rozsah proměnné  $k$  je určen pomocí

$$\max\{0, n + K - N\} \leq k \leq \min\{n, K\}$$

tedy

$$0 = \max\{0, 4 + 8 - 14\} \leq k \leq \min\{4, 8\} = 4 .$$

Tuto podmínku dostaneme ihned z nerovností

$$k \leq K, \quad n - k \leq N - K,$$

$$k \leq n, \quad n - k \leq n .$$

**Příklad 1.4** Jaká je pravděpodobnost, že ve skupině  $n$  lidí mají alespoň dva narozeniny ve stejný den? (Neuvažujte přestupné roky a předpokládejte, že se během celého roku děti rodí rovnoměrně.)

**Řešení:**

První část z předpokladů znamená, že počet všech dnů v roce pro nás bude vždy 365. Druhá část předpokladů pak znamená, že všechny dny v roce považujeme za rovnocenné. Tedy pravděpodobnost, že se daný člověk narodí v daný den v roce bude pro všechny dny stejná. To, že pracujeme se skupinou  $n$  lidí si také můžeme ekvivalentně představit tak, že máme urnu s lístky s čísly od 1 do 365 (představujícími očíslované dny v roce) a my z ní  $n$ -krát opakovaně budeme losovat čísla s tím, že lístky vždy vrátíme zpět.

Výsledky pokusu jsou tudíž uspořádané  $n$ -tice s hodnotami od 1 do 365. Tedy  $\Omega = \{1, \dots, 365\}^n$  (tj. kartézský součin množiny  $\{1, \dots, 365\}$  a to celkem  $n$ -krát, podobně jako třeba zapisujeme  $\mathbb{R}^n$ ).

Nechť  $A$  je jev, že ve skupině  $n$  lidí mají alespoň dva narozeniny ve stejný den. Pak jev  $A^c$  znamená, že ve skupině  $n$  lidí má každý člověk narozeniny v jiný den. Jde tedy o variace bez opakování třídy  $n$  z 365 prvků.

$$|\Omega| = 365^n$$

$$|A^c| = 365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - n + 1)$$

a tedy

$$P(A^c) = \frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - n + 1)}{365^n},$$

a tudíž

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - n + 1)}{365^n}.$$

Pro zajímavost se ještě podíváme na přibližnou hodnotu této pravděpodobnosti. Pro jednoduchost označme  $H = 365$ . Pak máme

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - \frac{H \cdot (H - 1) \cdot \dots \cdot (H - (n - 1))}{H^n} = 1 - \left(1 - \frac{1}{H}\right) \dots \left(1 - \frac{n - 1}{H}\right) = \\ &= 1 - e^{\ln\left(1 - \frac{1}{H}\right) \dots \left(1 - \frac{n - 1}{H}\right)} = 1 - e^{\sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(1 - \frac{k}{H}\right)} \end{aligned}$$

Použijeme teď lineární aproximaci funkce

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(1 - kx)$$

v bodě  $x_0 = 0$ , kterou pak vyčíslíme pro  $x = \frac{1}{H}$ , která je blízká nule, a to jako  $f(x) \approx f(0) + f'(0) \cdot (x - 0)$ . Tedy

$$f'(x) = \left( \sum_{k=1}^{n-1} \ln(1 - kx) \right)' = - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{1 - kx}$$

$$f'(0) = - \sum_{k=1}^{n-1} k = - \frac{n(n-1)}{2}$$

a

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(1 - \frac{k}{H}\right) = f\left(\frac{1}{H}\right) \approx - \frac{n(n-1)}{2H}.$$

Odsud máme, že

$$P(A) \doteq 1 - e^{-\frac{n(n-1)}{2 \cdot 365}}$$

a ukázkou některých hodnot v tabulce:

$n$	23	24	25	26	27	50
$P(A)$	50%	53.05%	56.04%	58.95%	61.77%	96.51%