

## 2. cvičení z STP

25. únor - 1. březen 2019

**Připomenutí:** Geometrický pravděpodobnostní prostor je zobecněním klasického pravděpodobnostního prostoru. Množinou všech možných výsledků zde bude nějaká podmnožina  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , které jsme schopni přiřadit její  $n$ -rozměrný konečný objem a jevy budou její podmnožiny, kterým také umíme přiřadit nějaký objem. Protože vlastnost přiřazení objemu (tzv. měřitelnost) není vůbec samozřejmostí, je nutné začít uvažovat jen určité množiny (tj. jevy) a tedy i pojem  $\sigma$ -algebry, který takovéto množiny vymezí. Podrobnější specifikací jevů se nebudeme zabývat. Opřeme se jen o skutečnost, že to celé funguje, pokud pracujeme s otevřenými množinami (a jejich spočetnými průniky, sjednoceními a doplňky.) Objem množiny (jevu)  $A$  budeme značit  $\text{vol}(A)$ .

Opět (jako u klasické pravděpodobnosti) budeme považovat všechny výsledky za rovnocenné, takže pravděpodobnost jevu  $A$  nebude záviset na tvaru ani umístění množiny  $A$  uvnitř množiny  $\Omega$ , ale pouze na její velikosti, takže pak je  $P(A) = \frac{\text{vol}(A)}{\text{vol}(\Omega)}$ .

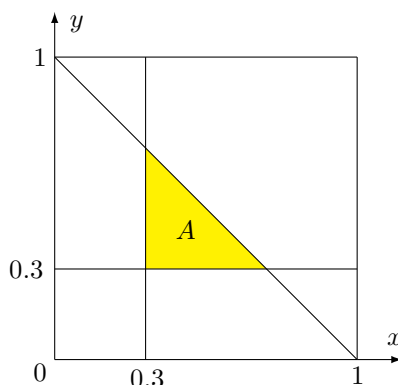
**Příklad 2.1** Mějme dvě zcela náhodná čísla  $x$  a  $y$  mezi 0 a 1. Jaká je pravděpodobnost, že jsou obě větší než 0.3 a zároveň jejich součet je menší než 1?

### Řešení:

Množina všech možných výsledků  $\Omega$  jsou tedy dvojice čísel  $(x, y)$  z  $\langle 0, 1 \rangle$ , tj.  $\Omega = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$ . Hledáme tedy pravděpodobnost jevu

$$A = \{(x, y) \in \Omega \mid x > 0.3 \wedge y > 0.3 \wedge x + y < 1\}.$$

Ta je dána poměrem plochy  $\text{vol}(A)$  množiny  $A$  a plochy  $\text{vol}(\Omega)$  množiny  $\Omega$ .



Takže

$$\text{vol}(A) = \frac{1}{2}(0.7 - 0.3) \cdot (0.7 - 0.3) = 0.08$$

a proto je

$$P(A) = \frac{\text{vol}(A)}{\text{vol}(\Omega)} = \frac{0.08}{1} = 0.08.$$

**Příklad 2.2** Na rovnoměrnou nekonečnou čtvercovou mřížku, kde vzdálenost průsečíků je  $a$ , hodíme minci o průměru  $b$ , kde  $b < a$ . Jaká je pravděpodobnost, že mince protne nějakou z linek této mřížky?

**Řešení:**

Všechny možné výsledky budou souřadnice  $(x, y)$  středu mince na ploše. Plocha, kterou máme k dispozici je nekonečná. Protože ale čtverce, na které je rozdělena, považujeme za rovnocenné, zvolíme si jeden z nich např.

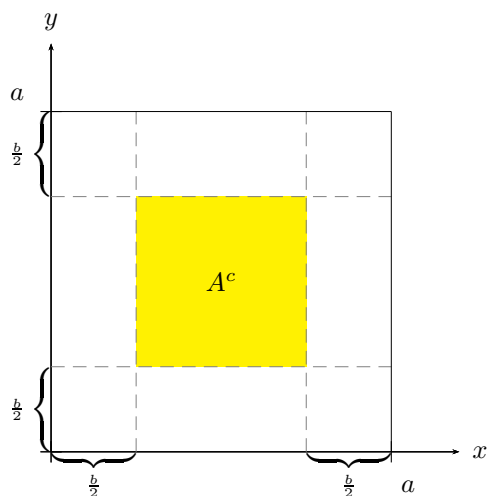
$$\Omega = \langle 0, a \rangle \times \langle 0, a \rangle$$

jako referenční, a všechny případy, kdy střed mince dopadne mimo tento čtverec, se ztotožní pomocí posunutí s případem, kdy střed mince je ve čtverci  $\Omega$ . Zajímá nás tedy pravděpodobnost jevu

$$A = \text{“mince protne hranu referenčního čtverce } \Omega \text{”} .$$

Jednodušší je popsat doplněk (viz obrázek)

$$A^c = \text{“mince NEprotne hranu referenčního čtverce } \Omega \text{”} = \left(\frac{b}{2}, a - \frac{b}{2}\right) \times \left(\frac{b}{2}, a - \frac{b}{2}\right)$$



Takže

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{(a-b)^2}{a^2} = \frac{b}{a} \cdot \left(2 - \frac{b}{a}\right) .$$

**Příklad 2.3** *Lodě A a B připlují do přístavu náhodně a nezávisle na sobě v následujících 24 hodinách. Loď A počká 2 hodiny a pak odplouvá, B počká 1 hodinu a pak odplouvá. Jaká je pravděpodobnost, že se v přístavu potkají?*

**Řešení:**

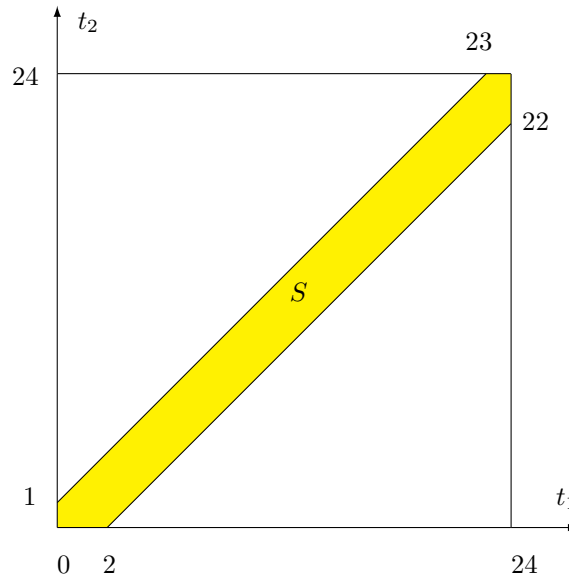
Označme S jev, že se dané lodě v přístavu potkají. Možné výsledky jsou časy  $(x, y)$ , kdy jednotlivé lodě připlují. Takže

$$\Omega = \langle 0, 24 \rangle \times \langle 0, 24 \rangle$$

Loď A má dobu pobytu v přístavu v intervalu  $\langle x, x+2 \rangle$  a podobně loď B má dobu pobytu v přístavu v intervalu  $\langle y, y+1 \rangle$ .

Odpovídající jev setkání je

$$S = \text{“lodě se setkají v přístavu”} = \{(x, y) \in \Omega \mid \text{intervaly } \langle x, x+2 \rangle \text{ a } \langle y, y+1 \rangle \text{ mají neprázdný průnik}\} = \\ = \{(x, y) \in \Omega \mid y \geq x - 1, y \leq x + 2\}$$



Jednodušší je zase spočítat pravděpodobnost doplňku  $S^c$

$$P(S) = 1 - P(S^c) = 1 - \frac{(22^2 + 23^2)/2}{24^2} \doteq 0.12.$$

**Jak přirozeně definovat nezávislost jevů:** Nejdříve si zavedeme podmíněnou pravděpodobnost  $P(A|B)$ , tj. pravděpodobnost, že nastane jev  $A$  za předpokladu, že výsledky se budou omezovat jen na jev  $B$  (také to můžeme chápat tak, že nastal jev  $B$  a my se *zpětně* ptáme, jaká byla za tohoto předpokladu pravděpodobnost jevu  $A$ ). Přirozeně to bude  $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ , pokud  $P(B) \neq 0$ .

To, že jev  $A$  nebude záviset na jevu  $B$ , si pak přirozeně určíme podmínkou  $P(A|B) = P(A)$  a podobně  $B$  nebude záviset na jevu  $A$  pokud  $P(B) = P(B|A)$ . Takže jevy  $A$  a  $B$  budou nezávislé, pokud platí podmínky  $P(A|B) = P(A)$  a  $P(B) = P(B|A)$  (a také bychom ještě mohli uvažovat i nezávislost na doplňcích  $P(A) = P(A|B^c)$  atd.).

Jak je ale vidět, všechny tyto podmínky odpovídají jediné rovnici  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ , samozřejmě za předpokladu, že  $P(A) \neq 0$  a  $P(B) \neq 0$ .

Proto se nezávislost jevů  $A$  a  $B$  definuje jako  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$  (ať už jsou  $P(A)$  nebo  $P(B)$  nulové nebo ne).

Podobným způsobem dojdeme k definici pro více jevů jako:

jevy  $A_1, \dots, A_n$  jsou nezávislé právě když pro každou indexovou podmnožinu  $\emptyset \neq K \subseteq \{1, \dots, n\}$  platí

$$P\left(\bigcap_{i \in K} A_i\right) = \prod_{i \in K} P(A_i).$$

Tj. pravděpodobnost libovolných průniků je součin pravděpodobností příslušných jevů.

**Příklad 2.4** Cyril bude hrát s Adamem a Bohdanem tenis. Bude hrát tři sety. Může si vybrat pořadí protihráčů Adam-Bohdan-Adam nebo Bohdan-Adam-Bohdan. Jestliže vyhraje dva sety po sobě, získá prémii. Jaké pořadí má Cyril zvolit, aby měl větší šanci získat prémii, jestliže Adam je lepší hráč než Bohdan?

**Řešení:**

V tomto případě budeme posuzovat pravděpodobnosti ve dvou různých pravděpodobnostních prostorech daných výběrem pořadí protihráčů. Jde tedy vlastně o dva různé modely, ve kterých spočítáme pravděpodobnosti. Postup bude v obou případech stejný, pouze hodnoty pravděpodobností jednotlivých jevů se budou lišit.

Budeme tedy uvažovat jevy:

$$V_i = \text{“výhra Cyrila v } i\text{-tém setu” pro } i = 1, 2, 3$$

které budou nezávislé a dále jev

$$Z = \text{“Cyril získá prémii”} .$$

Protože na prémii je potřeba vyhrát alespoň dva sety po sobě, tak dostaneme, že

$$Z = (V_1 \cap V_2 \cap V_3) \cup (V_1 \cap V_2 \cap V_3^c) \cup (V_1^c \cap V_2 \cap V_3)$$

kde v závorkách jsou evidentně navzájem disjunkttní jevy. Takže z tohoto a z nezávislosti dostaneme

$$\begin{aligned} P(Z) &= P(V_1 \cap V_2 \cap V_3) + P(V_1 \cap V_2 \cap V_3^c) + P(V_1^c \cap V_2 \cap V_3) = \\ &= P(V_1) \cdot P(V_2) \cdot P(V_3) + P(V_1) \cdot P(V_2) \cdot P(V_3^c) + P(V_1^c) \cdot P(V_2) \cdot P(V_3) \end{aligned}$$

Také to můžeme o něco jednodušeji dostat pomocí doplňku  $Z^c$  jako

$$Z^c = V_2^c \cup (V_1^c \cap V_2 \cap V_3^c)$$

což je opět sjednocení disjunkttních jevů, takže

$$P(Z^c) = P(V_2^c) + P(V_1^c \cap V_2 \cap V_3^c) = P(V_2^c) + P(V_1^c) \cdot P(V_2) \cdot P(V_3^c)$$

Pravděpodobnost výhry nad Adamem v daném setu označíme jako  $a (\neq 0)$  a nad Bohdanem v daném setu jako  $b (\neq 0)$ . Přitom máme, že  $a < b$ .

A teď v závislosti na zvoleném modelu dosadíme:

- pro Adam-Bohdan-Adam to bude  $P(V_1) = a, P(V_2) = b, P(V_3) = a$ :

$$\begin{aligned} P(Z) &= 1 - P(Z^c) = 1 - P(V_2^c) - P(V_1^c) \cdot P(V_2) \cdot P(V_3^c) = \\ &= 1 - (1 - b) - (1 - a)b(1 - a) = b(1 - (1 - a)^2) = ab(2 - a) \end{aligned}$$

- pro Bohdan-Adam-Bohdan to bude  $P(V_1) = b, P(V_2) = a, P(V_3) = b$ , což znamená, že jen prohodíme  $a$  a  $b$ :

$$P(Z) = ba(2 - b)$$

Protože  $a < b$ , tak lépe vychází první model, kdy horší hráč je uprostřed.