3. cvičení z STP

4. - 8. březen 2019

Příklad 3.1 *Automat vyrábí součástky ve tvaru obdélníka. Tolerance v šířce je překročena v* 8 %*, tolerance v délce je překročena v* 7 % *a v obou rozměrech ve* 3 % *vyrobených součástek.*

(a) Rozhodněte, zda jsou porušení rozměru v délce a šířce nezávislá či závislá.

(b) Vypočtěte pravděpodobnost toho, že náhodně vybraný výrobek má oba rozměry v toleranci.

Řešení:
Označme A porušení tolerance v šířce a B porušení tolerance v délce.

a) Potom je

$$P(A) = 0.08, \qquad P(B) = 0.07, \qquad P(A \cap B) = 0.03\,.$$

Náhodné jevy A a B budou nezávislé, právě když platí

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)\ .$$

To ale zjevně není pro náš případ pravda, protože $0.03 \neq 0.08 \cdot 0.07$. Porušení rozměrů jsou tedy závislé náhodné veličiny.

b) Dobrý výrobek je jev $A^c \cap B^c$, jehož pravděpodobnost je

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B^c) &= P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = 1 - 0.08 - 0.07 + 0.03 = 0.88\,. \end{aligned}$$

Dobrý výrobek získáme s pravděpodobností 88 %.

Příklad 3.2 *Nezávislé jevy A, B, C mají po řadě pravděpodobnosti* 0.2*,* 0.3*,* 0.4*. Určete pravděpodobnost jevu $X = (A \cup B) \cap C$.*

Řešení:
Použijeme, že pokud jevy $A_1, \ldots, A_n$ jsou nezávislé, pak také jevy

- $A_1 \cup A_2, A_3, \ldots, A_n$ jsou nezávislé
- $A_1 \cap A_2, A_3, \ldots, A_n$ jsou nezávislé
- $A_1^c, A_2, A_3, \ldots, A_n$ jsou nezávislé

Nezávislé jevy tedy můžeme libovolně sdružovat nebo pronikat (daný jev vždy sjednotíme nebo pronikneme vždy jen s jednou skupinou jevů), a můžeme je libovolně převracet na jejich doplňky. Výsledek jsou opět nezávislé jevy.

Protože A, B, C jsou nezávislé, jsou i jevy $A \cup B$ a C nezávislé. Tedy máme

$$P(X) = P((A \cup B) \cap C) = P(A \cup B) \cdot P(C)$$

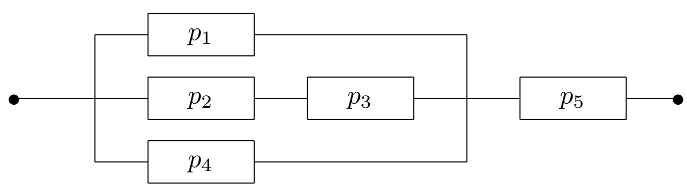
přičemž

$$
\begin{aligned}
P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \\
&= P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) \\
&= 0.2 + 0.3 - 0.2 \cdot 0.3 = 0.44 \ ,
\end{aligned}
$$

Celkem tak dostaneme

$$P(X) = P(A \cup B) \cdot P(C) = 0.44 \cdot 0.4 = 0.176 \ .$$

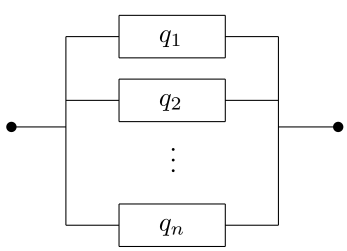
Příklad 3.3 *(operace s nezávislými jevy) Zařízení na obrázku je tvořeno zapojením bloků, které pracují nezávisle na sobě a pravděpodobností výskytu poruch jsou zadány. Vypočtěte pravděpodobnost poruchy funkce celého zařízení.*



Pravděpodobnosti vyčíslete pro $p_1 = 0.2$, $p_2 = p_3 = 0.4$, $p_4 = 0.3$ *a* $p_5 = 0.1$.

Řešení:
Úlohu si zjednodušíme tím, že budeme postupně nahrazovat více bloků jedním blokem, který bude mít stejnou pravděpodobnost poruchy.

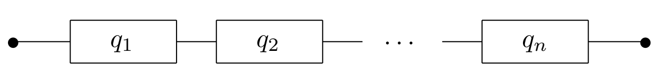
• Pro paralelní zapojení



a jevy $A_i =$“*i-ty blok (seshora) má poruchu*” je pravděpodobnost poruchy tohoto zapojení rovna

$$P(\text{“porucha paralelního zapojení”}) = P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdots P(A_n) = q_1 \cdots q_n \ .$$

• Pro sériové zapojení



a jevy $B_i =$"*i-ty blok (zleva) má poruchu*" je pravděpodobnost poruchy tohoto zapojení rovna

$$P(\text{"porucha sériového zapojení"}) = P(B_1 \cup \dots \cup B_n) = 1 - P\big((B_1 \cup \dots \cup B_n)^c\big) =$$

$$= 1 - P(B_1^c \cap \dots \cap B_n^c) = 1 - P(B_1^c) \cdots P(B_n^c) = 1 - (1 - q_1) \cdots (1 - q_n) \ .$$

Pro vyřešení původního zadání teď

(a) nejdříve nahradíme sériové zapojení dvou bloků s pravděpodobnostmi poruch $p_2 = 0.4$ a $p_3 = 0.4$ jediným blokem s pravděpodobností poruchy

$$p_{2,3} = 1 - (1 - p_2)(1 - p_3) = 1 - 0.6 \cdot 0.6 = 0.64 \ .$$

(b) dále nahradíme paralelní zapojení tří bloků s pravděpodobnostmi poruch $p_1 = 0.2$, $p_{2,3} = 0.64$ a $p_4 = 0.3$ jediným blokem s pravděpodobností poruchy

$$p_{1,2,3,4} = p_1 \cdot p_{2,3} \cdot p_4 = 0.2 \cdot 0.64 \cdot 0.3 = 0.0384 \ .$$

(c) a nakonec nahradíme sériové zapojení dvou bloků s pravděpodobnostmi poruch $p_{1,2,3,4} = 0.0384$ a $p_5 = 0.1$ jediným blokem, který odpovídá celému zařízení a má pravděpodobnost poruchy

$$p_{1,2,3,4,5} = 1 - (1 - p_{1,2,3,4})(1 - p_5) = 1 - 0.9616 \cdot 0.9 = 1 - 0,86544 = 0.13456 \ .$$

Příklad 3.4 *Náhodné jevy A a B jsou nezávislé a $P(A \cup B) = 0.545$, $P(A \cap B) = 0.105$. Určete pravděpodobnosti $P(A)$, $P(B)$ a $P(A \cap B^c)$.*

Řešení:
Jestliže využijeme nezávislosti náhodných jevů A a B, pak dostaneme

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B), \qquad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Označme si $P(A) = x$ a $P(B) = y$. Pro hledané pravděpodobnosti tak dostaneme soustavu rovnic

$$0.545 = x + y - 0.105, \qquad x \cdot y = 0.105 \Rightarrow y = \frac{0.105}{x} \ .$$

Po dosazení do první rovnice dostaneme kvadratickou rovnici pro neznámou x ve tvaru

$$x^2 - 0.65x + 0.105 = 0 \Rightarrow x_1 = 0.35, \quad x_2 = 0.3 \, .$$

Ze symetrie vztahů plyne, že je

$$P(A) = 0.35, \quad P(B) = 0.3 \qquad \text{nebo} \qquad P(A) = 0.3, \quad P(B) = 0.35 \, .$$

A dále pro první z možností je

$$P(A \cap B^c) = P(A) \cdot P(B^c) = 0.35 \cdot 0.7 = 0.245$$

a pro druhou volbu řešení je

$$P(A \cap B^c) = P(A) \cdot P(B^c) = 0.3 \cdot 0.65 = 0.195 \ .$$

Příklad 3.5 *Házíme dvěma kostkami. Označme jevy*

A = *"na 1. kostce padne sudé číslo",*

B = *"na 2. kostce padne liché číslo",*

C = *"na obou kostkách padne stejné číslo".*

Jsou jevy A,B,C nezávislé? Jsou po dvou nezávislé?

Řešení:
Výsledky pokusu jsou uspořádané dvojice. První člen dvojice odpovídá hodu 1. kostkou a druhý člen odpovídá hodu 2. kostkou.
Všechny možné výsledky jsou:

(1,1) (1,2) (1,3) (1,4) (1,5) (1,6),
(2,1) (2,2) (2,3) (2,4) (2,5) (2,6),
(3,1) .... (3,6),
(4,1) .... (4,6),
(5,1) .... (5,6),
(6,1) (6,2) (6,3) (6,4) (6,5) (6,6),

tzn. počet všech možných výsledků je 36.
Počet příznivých výsledků pro

- jev A je 18 (2., 4. a 6. řádek), tudíž $P(A) = \frac{1}{2}$.
- jev B je 18 (1., 3. a 5. sloupec), tudíž $P(B) = \frac{1}{2}$.
- jev C je 6 (diagonála), tudíž $P(C) = \frac{1}{6}$.
- jev $A \cap B$ je 9 (1., 3. a 5. sloupec ve 2., 4. a 6. řádku), tudíž $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$.
- jev $A \cap C$ jsou 3 (prvky (2,2), (4,4) a (6,6)), tudíž $P(A \cap C) = \frac{1}{12}$.
- jev $B \cap C$ jsou 3 (prvky (1,1), (3,3) a (5,5), tudíž $P(A \cap C) = \frac{1}{12}$.
- jev $A \cap B \cap C$ je 0, tudíž $P(A \cap B \cap C) = 0$ (je to nemožný jev).

Tudíž dostáváme

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B),\ P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C),\ P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C),$$

a jevy jsou tak po dvou nezávislé, ale současně máme, že

$$P(A \cap B \cap C) \neq P(A)P(B)P(C),$$

takže jevy A, B, C nejsou (totálně) nezávislé.