4. cvičení z STP

11. - 15. březen 2019

Příklad 4.1 *Na fakultě studuje* 50% *studentů informatiku,* 30% *matematiku a* 20% *fyziku. Na informatice je* 10% *žen, na matematice* 30% *a na fyzice* 20%*.*

(a) Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný studující je studentka?

(b) Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná studentka studuje matematiku?

Řešení:
Označme si jevy

$$A_1 = \text{“}\textit{náhodně vybraný student je informatik}\text{”}$$

$$A_2 = \text{“}\textit{náhodně vybraný student je matematik}\text{”}$$

$$A_3 = \text{“}\textit{náhodně vybraný student je fyzik}\text{”}$$

$$B = \text{“}\textit{náhodně vybraný student je žena}\text{”}$$

Jevy A_1, A_2, A_3 jsou navzájem disjunktní a jejich sjednocením je celý pravděpodobnostní prostor Ω (tedy tvoří tzv. úplný systém disjunktních jevů Ω). Dále známe

$$\begin{array}{ccc} P(A_1) = 0.5 & P(A_1) = 0.3 & P(A_1) = 0.2 \\ P(B|A_1) = 0.1 & P(B|A_1) = 0.3 & P(B|A_1) = 0.2 \end{array}$$

(a) Chceme znát $P(B)$. Podle věty o úplné pravděpodobnosti máme

$$P(B) = \sum_{j=1}^{3} P(B \cap A_j) = \sum_{j=1}^{3} P(B|A_j) \cdot P(A_j) =$$

$$= 0.1 \cdot 0.5 + 0.3 \cdot 0.3 + 0.2 \cdot 0.2 = 0.18\ .$$

(b) Chceme znát $P(A_2|B)$. Podle Bayesovy věty máme

$$P(A_2|B) = \frac{P(B|A_2) \cdot P(A_2)}{P(B)} = \frac{0.3 \cdot 0.3}{0.18} = 0.5\ .$$

Příklad 4.2 *Do obchodu dodávají čipy tři výrobci, po řadě* 50 %, 30 % *a* 20 % *zásoby obchodu. Pravděpodobnosti výroby funkčního čipu od jednotlivých výrobců jsou po řadě* $p_1 = 0.98$, $p_2 = 0.95$ *a* $p_3 = 0.99$.

(a) Určete pravděpodobnosti, že zakoupený náhodně vybraný čip je vadný.

(b) Určete pravděpodobnost, že čip je od druhého výrobce, za předpokladu, že je funkční.

Řešení:
Označme si jevy

$H_i =$ *"zakoupený čip byl od i-tého výrobce"* pro $i = 1, 2, 3$

$A =$ *"zakoupený čip byl funkční"*.

Ze zadání plyne, že

$$P(H_1) = 0.5 \qquad P(H_1) = 0.3 \qquad P(H_1) = 0.2$$
$$P(A|H_1) = 0.98 \quad P(A|H_1) = 0.95 \quad P(A|H_1) = 0.99\ .$$

Jevy H_i jsou navzájem se vylučující možnosti a pokrývají všechny možné případy.

(a) Počítáme pravděpodobnost jevu A^c. Podle vzorce pro úplnou pravděpodobnost je

$$P(A^c) = \sum_{i=1}^{3} P(A^c|H_i) \cdot P(H_i) = 0.02 \cdot 0.5 + 0.05 \cdot 0.3 + 0.01 \cdot 0.2 = 0.027\,.$$

Pravděpodobnost, že náhodně vybraný čip je vadný, je rovna 0.027.

(b) Požadovanou pravděpodobnost vypočteme pomocí Bayesova vzorce, kde využijeme skutečnosti, že $P(A) = 1 - P(A^c) = 0.973$. Potom je

$$P(H_2|A) = \frac{P(A|H_2) \cdot P(H_2)}{P(A)} = \frac{0.95 \cdot 0.3}{0.973} = 0.293\,.$$

Příklad 4.3 *Po skončení aktivní služby odchází do důchodu* 60 *námořních kapitánů. Z této skupiny jich* 5 *zažilo ztroskotání. Podle statistiky při ztroskotání zahyne třetina kapitánů. Odhadněte pravděpodobnost, že kapitán během své aktivní služby zažije ztroskotání. (Možnost opakovaného ztroskotání a úmrtí z jiné příčiny během aktivní služby zanedbáváme.)*

Řešení:
Uvažujme jevy:

$A =$ *"kapitán se dožije důchodu"*,
$B =$ *"kapitán zažije ztroskotání"* .

Ze zadání máme vztahy

$$P(B|A) = \tfrac{5}{60} = \tfrac{1}{12}\ , \qquad P(A^c|B) = \tfrac{1}{3} \quad \text{a} \quad A^c \subseteq B$$

kde poslední vztah odpovídá tomu, že během aktivní služby nemůže nastat úmrtí z jiné příčiny než kvůli ztroskotání. Z posledního vztahu plyne také $B^c \subseteq A$ a tudíž dostáváme tyto podmíněné pravděpodobnosti

$$P(B|A^c) = \frac{P(B \cap A^c)}{P(A^c)} = 1 \quad \text{a} \quad P(A|B^c) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} = 1\ .$$

Nás zajímá $P(B)$. Z Bayesovy věty máme:

$$P(B) = \frac{P(B|A)}{P(A|B)} \cdot P(A) = \frac{\frac{1}{12}}{1 - \frac{1}{3}} \cdot P(A) = \tfrac{1}{8} \cdot P(A)\ .$$

Pomocí věty o úplné pravděpodobnosti můžeme teď zase $P(A)$ vyjádřit pomocí $P(B)$:

$$P(A) = P(A|B)\cdot P(B) + P(A|B^c)\cdot P(B^c) = \Big(1-\tfrac{1}{3}\Big)\cdot P(B) + 1\cdot\Big(1-P(B)\Big) =$$
$$= 1 - \tfrac{1}{3}P(B)\ .$$

Celkem tedy

$$P(B) = \tfrac{1}{8}\Big(1-\tfrac{1}{3}P(B)\Big) \quad \text{a} \quad P(B) = \tfrac{3}{25} = 0.12\ .$$

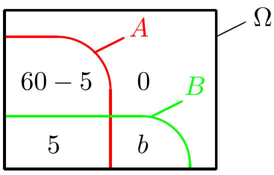
Použitý vzorec je obecně:

$$P(B) = \frac{P(B|A)}{P(A|B)}\cdot P(A) = \frac{P(B|A)}{P(A|B)}\cdot\Big[P(A|B)\cdot P(B) + P(A|B^c)\cdot(1-P(B))\Big]$$

neboli

$$\begin{aligned}
P(B) &= \frac{P(B|A)\cdot P(A|B^c)}{P(B|A)\cdot P(A|B^c) + (1-P(B|A))\cdot P(A|B)} = \\
&= \frac{P(B|A)\cdot P(A|B^c)}{P(B|A)\cdot P(A|B^c) + P(B^c|A)\cdot P(A|B)} = \\
&= \frac{\frac{1}{12}\cdot 1}{\frac{1}{12}\cdot 1 + \frac{11}{12}\cdot\frac{2}{3}} = \frac{3}{25}\ .
\end{aligned}$$

Můžeme také použít intuitivnější přístup:



kde čísla znamenají velikost dané množiny ve smyslu geometrické pravděpodobnosti (např. $vol(A\cap B) = 5$ apod.). Přitom víme ještě, že

$$\frac{1}{3} = P(A^c|B) = \frac{P(A^c\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{vol(A^c\cap B)}{vol(\Omega)}}{\frac{vol(B)}{vol(\Omega)}} = \frac{vol(A^c\cap B)}{vol(B)} = \frac{b}{5+b}$$

takže

$$vol(B\setminus A) = vol(B\cap A^c) = b = 2.5\ .$$

Proto máme

$$P(B) = \frac{vol(B)}{vol(\Omega)} = \frac{5+b}{60+b} = \frac{5+2.5}{60+2.5} = \frac{3}{25}\ .$$

Příklad 4.4 *U 10% řidičů, kteří způsobili dopravní nehodu, bylo prokázáno požití alkoholu. Rozsáhlý průzkum ukázal, že riziko nehody se požitím alkoholu zvyšuje 7×. Odhadněte, kolik procent řidičů požilo alkohol.*

Řešení:
Označme jevy

$A =$ *"požil alkohol"*,

$H =$ *"způsobil nehodu"*.

Pak máme
$$P\left(A|H\right) = 0.1 \ \text{ a } \ P\left(H|A\right) = 7 \cdot P\left(H|A^c\right) \ .$$

Zajímá nás $P\left(A\right)$. Z Bayesovy věty a z věty o úplné pravděpodobnosti tak postupně máme

$$P\left(A\right) = \frac{P\left(A|H\right)}{P\left(H|A\right)} \cdot P(H) = \frac{P\left(A|H\right)}{P\left(H|A\right)} \cdot \Big[P\left(H|A\right) \cdot P\left(A\right) + P\left(H|A^c\right) \cdot P\left(A^c\right)\Big] =$$
$$= P\left(A|H\right) \cdot \Big[P\left(A\right) + \frac{P\left(H|A^c\right)}{P\left(H|A\right)} \cdot \big(1 - P\left(A\right)\big)\Big] = 0.1 \cdot \big[P\left(A\right) + \tfrac{1}{7} \cdot \big(1 - P\left(A\right)\big)\big]$$

a tedy
$$10 \cdot P\left(A\right) = \tfrac{1}{7} + \tfrac{6}{7} \cdot P\left(A\right)$$

Výsledek je
$$P\left(A\right) = \frac{\frac{1}{7}}{10 - \frac{6}{7}} = \tfrac{1}{70-6} = \tfrac{1}{64} \ .$$

Příklad 4.5 *Požití alkoholu bylo prokázáno u 1% všech řidičů a u 10% řidičů, kteří způsobili dopravní nehodu. Kolikrát se požitím alkoholu zvyšuje riziko nehody?*

Řešení:
Tento příklad je modifikací předchozího příkladu. Opět si označme jevy

$A =$ *"požil alkohol"*,

$H =$ *"způsobil nehodu"*.

Pak máme $P\left(A\right) = 0.01$ a $P\left(A|H\right) = 0.1$. Hledáme hodnotu $\frac{P(H|A)}{P(H|A^c)}$. Tudíž podle Bayesovy věty máme

$$\frac{P\left(H|A\right)}{P\left(H|A^c\right)} = \frac{P(A|H) \cdot P(H)}{P(A)} \cdot \frac{P(A^c)}{P(A^c|H) \cdot P(H)} =$$
$$= \frac{P(A|H) \cdot (1 - P(A))}{P(A) \cdot (1 - P(A|H))} = \frac{0.1 \cdot 0.99}{0.01 \cdot 0.9} = 11 \ .$$

Příklad 4.6 *Uvažujme hod mincí s následujícími výsledky*

- $\omega_1 =$ *"padl rub" (s pravděpodobností* 0.49*)*
- $\omega_2 =$ *"padl líc" (s pravděpodobností* 0.49*)*
- $\omega_3 =$ *"nastala výjimečná situace" (hrana, zakutálení mince apod.)(s pravděpodobností* 0.02*).*

Sestrojte dvě různé náhodné veličiny a nakreslete jejich distribuční funkce.

Řešení:
Množina všech možných výsledků je tedy $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Každá náhodná veličina na tomto prostoru Ω má maximálně tři různé hodnoty, takže určitě bude *diskrétní*

(tj. má nejvýše spočetně mnoho hodnot $A = \{x_1, x_2, \dots\} \subseteq \mathbb{R}$ takových, že $\sum_{u \in A} P(X = u) = 1$.)

Pro distribuční funkci diskrétní veličiny X pak platí

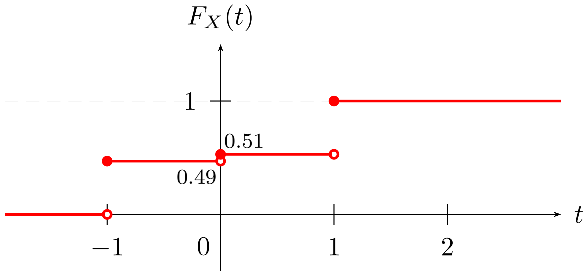
$$F_X(t) = P(X \leq t) = \sum_{u \leq t} P(X = u)\ .$$

Veličiny mohou být např.

- $X: \begin{array}{ccc} \omega_1 & \mapsto & 1 \\ \omega_2 & \mapsto & -1 \\ \omega_3 & \mapsto & 0 \end{array}$

  Distribuční funkce je skokovitá se skoky v bodech -1, 0 a 1 o velikostech 0.49, 0.02 a 0.49, tj.

$$F_X(t) = \sum_{u \leq t} P(X = u) = \begin{cases} & 0 \quad \text{pro} \quad t \in (-\infty, -1) \\ P(X=-1) = & 0.49 \quad \text{pro} \quad t \in \langle -1, 0) \\ P(X=-1) + P(X=0) = & 0.51 \quad \text{pro} \quad t \in \langle 0, 1) \\ P(X=-1) + P(X=0) + P(X=1) = & 1 \quad \text{pro} \quad t \in \langle 1, \infty) \end{cases}$$



- $Y: \begin{array}{ccc} \omega_1 & \mapsto & 1 \\ \omega_2 & \mapsto & 1 \\ \omega_3 & \mapsto & 3 \end{array}$

  Distribuční funkce je skokovitá se skoky v bodech 1 a 3 o velikostech 0.98 a 0.02 (protože obraz roven 1 mají dva elementární jevy ω_1 a ω_2, jejichž souhrnná pravděpodobnost je $0.49+0.49 = 0.98$), tj.

$$F_Y(t) = \sum_{u \leq t} P(Y = u) = \begin{cases} & 0 \quad \text{pro} \quad t \in (\infty, 1) \\ P(Y=1) = P(\{\omega_1, \omega_2\}) = & 0.98 \quad \text{pro} \quad t \in \langle 1, 3) \\ P(Y=1) + P(Y=3) = & 1 \quad \text{pro} \quad t \in \langle 3, \infty)\ . \end{cases}$$