10. cvičení z STP

27. dubna - 1. května 2020

Připomenutí: Mějme náhodný výběr $(X_1, \dots, X_n)$ závislý na parametru ϑ (tj. máme vektor z nezávislých *stejně rozdělených* náhodných veličin X_i s distribuční funkcí F_ϑ závislou na parametru ϑ). Můžeme uvažovat i závislost na více parametrech, ale většinou budeme pracovat jen s jedním.

V praxi máme hodnotu parametru danou (označme si ji ϑ_0), ale bohužel ji neznáme. Snažíme se ji proto určit (jako hodnotu $\widehat{\vartheta}$) z naměřených hodnot $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ a to co "nejlépe" (tím, že si stanovíme nějaké vhodné podmínky, které chceme splnit). Hodnotě $\widehat{\vartheta}$ pak říkáme *bodový odhad* (té skutečné hodnoty parametru ϑ_0).

Možných metod odhadu je více. Obvykle se používají

- metoda maximální věrohodnosti
  - \+ *výhody:* dává (v podstatě) vždy výsledek; je možné ji použít i pro veličiny, co nemají číselné hodnoty (což znamená, že nezáleží na hodnotách, ale na jejich pravděpodobnostech)
  - − *nevýhody:* není vytvořena pro veličiny se smíšeným rozdělením (tj. jiným než buď diskrétním nebo spojitým)
- metoda momentů
  - \+ *výhody:* dá se použít na jakýkoliv typ veličiny X (která má konečné hodnoty $E(X^k)$ pro prvních několik $k = 1, 2, 3, \dots$)
  - − *nevýhody:* obecně nemáme zaručeno, že dostaneme nějaký výsledek

Příklad 10.1 *Počet kazů X na tabulkách skla se řídí Poissonovým rozdělením. Bylo pozorováno*

i = *počet kazů na dané tabulce*	0	1	2	3	5
n_i = *pozorovaná četnost*	17	4	1	2	1

Metodou maximální věrohodnosti (příp. metodou momentů) určete parametr λ tohoto Poissonova rozdělení.

Řešení:

Celkový počet měření je $n = \sum_i n_i = 17 + 4 + 1 + 2 + 1 = 25$. Naměřené hodnoty $(x_1, \dots, x_n)$ se skládají z hodnot $i \in \{0, 1, 2, 3, 5\}$, kde každá z nich se vyskytuje se svojí četností n_i. Protože nebude záležet na pořadí, v jakém jsme hodnoty x_i naměřili, můžeme si pro jednoduchost představit, že je

$$(x_1, \dots, x_n) = \Big(\underbrace{0, \dots, 0}_{17-krát}, \underbrace{1, \dots, 1}_{4-krát}, \ 2, \ 3, \ 3, \ 5\Big) \ .$$

Pro náhodnou veličinu X s rozdělením $\mathrm{Poiss}(\lambda)$ je $P_\lambda(X = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}$.

Metoda maximální věrohodnosti:

Hledáme takové $\lambda > 0$, které maximalizuje funkci věrohodnosti $L(\lambda)$, která je definována jako

$$L(\lambda) = P_\lambda(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) \overset{(nezav.)}{=} \prod_{j=1}^{n} P_\lambda(X_j = x_j) = \prod_{j=1}^{n} \frac{\lambda^{x_j}}{x_j!}\,\mathrm{e}^{-\lambda} =$$

$$= \left(\frac{\lambda^0}{0!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}\right)^{17} \left(\frac{\lambda^1}{1!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}\right)^{4} \left(\frac{\lambda^2}{2!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}\right)^{1} \left(\frac{\lambda^3}{3!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}\right)^{2} \left(\frac{\lambda^5}{5!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}\right)^{1} =$$

$$= \frac{\lambda^{0\cdot17+1\cdot4+2\cdot1+3\cdot2+5\cdot1}}{konst.}\,\mathrm{e}^{-\lambda(17+4+1+2+1)} = \frac{\lambda^{17}}{konst.}\,\mathrm{e}^{-25\lambda}\,,$$

kde X_j jsou jednotlivé nezávislé veličiny (v pokusech) a x_j naměřené hodnoty.

Pro vyšetření maxima je vhodnější přejít k logaritmu této funkce, tj.

$$\ell(\lambda) = \ln L(\lambda) = 17\ln\lambda - 25\lambda - \ln(konst.)$$

Z její derivace

$$\ell'(\lambda) = \frac{17}{\lambda} - 25\,.$$

získáme řešení

$$\frac{17}{\widehat{\lambda}} - 25 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \widehat{\lambda} = \frac{17}{25} = 0.68\,.$$

a ze znamének derivace je snadno vidět, že v $\widehat{\lambda} = \frac{17}{25}$ je skutečně maximum.

Metoda momentů:

Chceme, aby platily rovnosti teoretických momentů $E(X^k)$, závislých na parametru λ, a výběrových momentů $m_k := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^k$, tedy $E(X^k) = m_k$ pro co nejvíce počátečních hodnot $k = 1, 2, \ldots$.

Počet rovnic volíme tak, abychom dostali co nejmenší (nenulový) počet řešení (ideálně jen jedno) pro parametr λ . Existenci řešení ale obecně zaručenou nemáme.

V našem případě budeme tedy požadovat rovnost $E(X) = m_1$ $(= \overline{\boldsymbol{x}})$. Přitom máme

- střední hodnotu $E(X) = \lambda$
- výběrový průměr $\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{\sum_{j=1}^n x_j}{n} = \frac{\sum_i i\cdot n_i}{\sum_i n_i} = \frac{0\cdot17+1\cdot4+2\cdot1+3\cdot2+5\cdot1}{17+4+1+2+1} = \frac{17}{25}$

Takže dostáváme opět odhad $\widehat{\lambda} = \frac{17}{25}$, což není příliš překvapivé, protože parametr λ má význam střední hodnoty X a ta se nejlépe odhaduje pomocí výběrového průměru $\overline{\boldsymbol{x}}$.

Příklad 10.2 *Náhodná veličina X nabývá hodnot s pravděpodobnostmi dle tabulky, kde c, q jsou reálné parametry rozdělení. Z četností hodnot v náhodném výběru, uvedených v tabulce, odhadněte parametry c a q.*

hodnota i	1	2	3
pravděpodobnost $P_{(c,q)}(X = i)$	$c - q$	c	$c + q$
četnost n_i	8	10	5

Řešení:

Protože součet pravděpodobností všech hodnot je 1, musí být

$$1 = (c - q) + c + (c + q) = 3c$$

tedy $c = \frac{1}{3}$. Současně musí být pravděpodobnosti nezáporné, tj. $0 \le c - q = \frac{1}{3} - q$ a $0 \le c + q = \frac{1}{3} + q$, takže $|q| \le \frac{1}{3}$. Zbývá tedy odhadnout parametr q.

Metoda maximální věrohodnosti:

Hledáme hodnotu q, která maximalizuje funkci věrohodnosti

$$L(q) = P_{(\frac{1}{3},q)}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \prod_{j=1}^{n} \underbrace{P_{(\frac{1}{3},q)}(X_j = x_j)}_{P_{(\frac{1}{3},q)}(X=x_j)} =$$

$$= \left(\frac{1}{3} - q\right)^{n_1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n_2} \cdot \left(\frac{1}{3} + q\right)^{n_3} = \left(\frac{1}{3} - q\right)^{8} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \cdot \left(\frac{1}{3} + q\right)^{5}$$

kde X_j jsou jednotlivé nezávislé veličiny (v pokusech) a x_j naměřené hodnoty. Funkce L je nezáporná a spojitá na uzavřené množině $\langle -\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \rangle$, takže zde nabývá maxima. To nemůže být v krajních bodech (tam je nulová) a proto je nabyto uvnitř dané množiny. To odpovídá hledání maxima funkce

$$\ell(q) = \ln\big(L(q)\big) = 8 \cdot \ln\left(\frac{1}{3} - q\right) + 5 \cdot \ln\left(\frac{1}{3} + q\right) + konst.$$

na intervalu $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Protože maximum existuje, musí pro něj platit

$$0 = \ell'(q) = \frac{-8}{\frac{1}{3} - q} + \frac{5}{\frac{1}{3} + q}$$

Odhad parametru q je

$$q = -\frac{1}{13} \doteq -0.077 \;.$$

Odhady pravděpodobností hodnot $1, 2, 3$ jsou tedy

$$p_X(1) = \frac{16}{39} \doteq 0.41 \qquad p_X(2) = \frac{1}{3} \doteq 0.333 \qquad p_X(3) = \frac{10}{39} \doteq 0.256$$

což vyhovuje zadání.

Metoda momentů:

Střední hodnota je

$$E(X) = \left(\frac{1}{3} - q\right) + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \left(\frac{1}{3} + q\right) = 2 + 2\,q$$

její odhad z realizace je

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_i i \cdot n_i = \frac{1}{8 + 10 + 5} \cdot (1 \cdot 8 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 5) = \frac{43}{23} \;.$$

Porovnáním dostaneme

$$2 + 2q = E(X) = \overline{x} = \frac{43}{23}$$

což odpovídá hodnotě

$$q = -\frac{3}{46} \doteq -0.065 \;.$$

Odhady pravděpodobností hodnot $1, 2, 3$ jsou tedy

$$p_X(1) = \frac{55}{138} \doteq 0.399 \qquad p_X(2) = \frac{1}{3} \doteq 0.333 \qquad p_X(3) = \frac{37}{138} \doteq 0.268$$

což opět vyhovuje zadání.

Jak je vidět, metoda max. věrohodnosti by vyšla stejně, ať by veličina X měla jakékoliv hodnoty (dokonce i nečíselné), zatímco metoda momentů velmi podstatně závisí právě na tom, jaké hodnoty veličina X má (např. kdybychom místo hodnot $\{1, 2, 3\}$ zvolili třeba $\{-3, 10, 4\}$, byl by výsledek úplně jiný a dokonce bychom ani žádný přijatelný odhad nemuseli takto získat.)

Příklad 10.3 *Počet neúspěšných zásahů terče předtím, než se střelec trefí, má geometrické rozdělení* Geom(p)*. Zaznamenali jsme, že terč byl zasažen*

20 *krát napoprvé*
10 *krát až napodruhé*
7 *krát až napotřetí*
3 *krát až napočtvrté.*

Metodou maximální věrohodnosti (příp. metodou momentů) odhadněte parametr p, představující pravděpodobnost úspěšného zásahu.

Řešení:

Veličina

$$X = \text{“počet neúspěšných zásahů, než se trefíme”}$$

má geometrické rozdělení Geom(p) pro $p \in (0,1)$ a

$$P_p(X = i) = (1-p)^i p, \quad i \in \mathbb{N}_0 \; .$$

Z tabulky

hodnota i veličiny X	0	1	2	3
pozorovaná četnost n_i	20	10	7	3

vidíme, že počet měření je $n = \sum_i n_i = 20 + 10 + 7 + 3 = 40$. Naměřené hodnoty $(x_1, \ldots, x_n)$ se skládají z hodnot $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, kde každá se vyskytuje se svojí četností n_i.

Metoda maximální věrohodnosti:

Hledáme hodnotu $p \in (0,1)$, která maximalizuje funkci věrohodnosti

$$L(p) = P_p(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \prod_{j=1}^{n} P_p(X_j = x_j) =$$

$$= \Big((1-p)^0 p\Big)^{20} \Big((1-p)^1 p\Big)^{10} \Big((1-p)^2 p\Big)^{7} \Big((1-p)^3 p\Big)^{3} =$$

$$= \; (1-p)^{0\cdot 20 + 1\cdot 10 + 2\cdot 7 + 3\cdot 3} \cdot p^{20+10+7+3} \; = \; (1-p)^{33} \cdot p^{40}$$

kde X_j jsou jednotlivé nezávislé veličiny (odpovídající jednotlivým pokusům) a x_j naměřené hodnoty.

Ekvivalentně budeme hledat maximum funkce

$$\ell(p) = \ln\big(L(p)\big) = 33 \cdot \ln(1-p) + 40 \cdot \ln p \; .$$

Z její derivace

$$\ell'(p) = -\frac{33}{1-p} + \frac{40}{p} = \frac{-73p + 40}{(1-p)p}$$

dostáváme řešení

$$\ell'(\widehat{p}) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \widehat{p} = \frac{40}{73} \doteq 0.54795$$

které vyhovuje zadání, tj. $\widehat{p} \in (0,1)$. Ze znamének derivace je snadno vidět, že v $\widehat{p} = \frac{40}{73}$ je skutečně maximum.

Metoda momentů:

Porovnáváme teoretické k-té momenty $E(X^k)$ s jejich odhady $m_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^k$ pro prvních několik $k = 1, 2, \dots$.

Střední hodnota geometrického rozdělení $X \sim \mathrm{Geom}(p)$ je

$$E(X) = \frac{1-p}{p}$$

a její odhad z realizace je

$$m_1 = \overline{\boldsymbol{x}} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} x_j}{n} = \frac{\sum\limits_i i \cdot n_i}{\sum\limits_i n_i} = \frac{0 \cdot 20 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 3}{20 + 10 + 7 + 3} = \frac{33}{40} \ .$$

Porovnáním dostaneme

$$\frac{1-\widehat{p}}{\widehat{p}} = E(X) = \overline{x} = \frac{33}{40}$$

což dává opět řešení

$$\widehat{p} = \frac{40}{73} \doteq 0.54795$$

jako v předchozí metodě.

Jak je vidět, v případě geometrického rozdělení dostáváme pro jeho parametr p stejné výsledky pro obě metody.

Poznámka k věrohodnostní funkci pro spojitá rozdělení: Pro metodu max. věrohodnosti se u diskrétního rozdělení využívá pravděpodobnosti, že daná hodnota x_0 bude *přesně* nabyta, tj. $P(X = x_0)$. Tyto pravděpodobnosti by ale byly v případě spojitého rozdělení vždy nulové. Musíme tedy použít nějakou jinou charakteristiku v daném bodě a zde se nabízí hustota f_X. Jak ale víme, hustota není určena svými hodnotami, ale jen svými integrály. My ovšem nebudeme ani tak chtít zkoumat hustotu v bodě x_0, nýbrž spíše chování výrazu $P\Big(X \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)\Big)$ pro $\varepsilon \to 0+$. Dá se ukázat, že pokud je hustota f_X spojitá v x_0, pak platí

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{2\varepsilon} \cdot P\Big(X \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)\Big) = f_X(x_0) \ .$$

Tedy v tomto případě je chování daného výrazu skutečně přibližně úměrné hodnotě $f_X(x_0)$.

Proto se ve věrohodnostní funkci nakonec opravdu hustota používá, ale za předpokladu, že je f_X *spojitá* buď všude nebo v oboru hodnot, který je otevřenou množinou (důvodem je to, že limitu děláme z obou stran). Např. pro exponenciální rozdělení (které modeluje dobu čekání) je obor hodnot $(0, +\infty)$ a tam už hustotu spojitou máme (přestože na celém $\mathbb{R}$ spojitá není).

Poznámka: V případě určitých druhů nespojitosti (nespojitost 1.druhu) lze postupovat podobně. Jestliže hustota f_X je po částech spojitá, pak platí

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{2\varepsilon} \cdot P\Big(X \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)\Big) = \frac{f_X(x_0+) + f_X(x_0-)}{2}$$

kde $f_X(x_0+)$ je limita zprava a $f_X(x_0-)$ limita zleva v bode x_0. V tomto případě je vhodné hustotu v bodech nespojitosti upravit tak, aby platilo $f_X(x_0) = \frac{f_X(x_0+)+f_X(x_0-)}{2}$. Pak bude mít opět stejnou vlastnost (viz výše) jako u spojité hustoty.

Příklad 10.4 *Doba do poruchy přístroje má exponenciální rozdělení. Bylo zjištěno, že se přístroj porouchal postupně za* 4 *dny,* 7 *dní,* 12 *dní,* 2.5 *dne a* 24.5 *dne. Metodou maximální věrohodnosti (příp. metodou momentů) určete parametr* λ *tohoto exponenciálního rozdělení.*

Řešení:
Máme tedy veličinu

$$X = \text{“}\textit{doba do poruchy přístroje}\text{”} \text{ [ve dnech]}$$

s exponenciálním rozdělením $Exp(\lambda)$ a hustotou $f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{pro } x \leq 0. \end{cases}$

Počet měření je $n = 5$ a jejich hodnoty jsou $x_1 = 4$ dny, $\ldots, x_5 = 24.5$ dne.

Metoda maximální věrohodnosti:
Obor hodnot X je $(0, +\infty)$, což je otevřený interval a hustota je zde spojitá. (Hodnotu 0 neuvažujeme, protože jako čekací dobu má smysl brát jen kladné hodnoty.)

Hledáme takové $\lambda > 0$, které maximalizuje věrohodnostní funkci

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} f_\lambda(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x_i} = \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda\cdot 4} \cdot \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda\cdot 7} \cdot \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda\cdot 12} \cdot \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda\cdot 2.5} \cdot \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda\cdot 24.5} =$$

$$= \lambda^5\, \mathrm{e}^{-\lambda\cdot(4+7+12+2.5+24.5)} = \lambda^5\, \mathrm{e}^{-\lambda\cdot 50}\ .$$

Logaritmicko-věrohodnostní funkce je

$$\ell(\lambda) = \ln L(\lambda) = 5 \ln \lambda - 50\lambda.$$

Z její derivace

$$\ell'(\lambda) = \frac{5}{\lambda} - 50.$$

získáme řešení

$$\frac{5}{\hat{\lambda}} - 50 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \widehat{\lambda} = \frac{1}{10}\ [\text{den}^{-1}] \qquad \Longrightarrow \qquad \widehat{\tau} = \frac{1}{\hat{\lambda}} = 10\ [\text{dnů}]$$

(ve kterém skutečně nastává maximum, jak je vidět ze znamének derivace.)

Metoda momentů:
Chceme, aby platily rovnosti $E(X^k) = m_k$ teoretických a výběrových momentů pro co nejvíce počátečních hodnot $k = 1, 2, \ldots$.
Máme

- střední hodnotu $E(X) = \frac{1}{\lambda}$
- výběrový průměr $\overline{\boldsymbol{x}} = m_1 = \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j}{n} = \frac{4+7+12+2.5+24.5}{5} = \frac{50}{5} = 10$

Z požadované rovnosti $\frac{1}{\lambda} = E(X) = \overline{\boldsymbol{x}} = 10$ dostáváme opět odhad $\widehat{\lambda} = \frac{1}{10}$. Tato shoda je opět způsobena tím, že parametr $\tau = \frac{1}{\lambda}$ má význam střední hodnoty X a ta se nejlépe odhaduje pomocí výběrového průměru $\overline{\boldsymbol{x}}$.

Příklad 10.5 *Pro náhodnou veličinu X, která má spojité rovnoměrné rozdělení v intervalu $\langle -h, h\rangle$, jsme naměřili hodnoty*

$$\boldsymbol{x} = (-4,\ -3,\ -2,\ -1.5,\ 0.5,\ 1,\ 2.5,\ 3)\ .$$

Metodou momentů určete odhad parametru h (a ověřte, zda odhad odpovídá zadání).

Řešení:
Rozsah naměřeného souboru hodnot je $n = 8$. Realizované výsledky x_i musí spadat do oboru hodnot, což je interval $\langle -h,\, h\rangle$. Tedy musí být $|x_i| \le h$ pro všechna i, neboli musí platit, že

$$h \ge \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} = 4\ .$$

Funkce

$$f_h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2h} & , \ |x| \le h, \\ 0 & , \ |x| > h. \end{cases}$$

je hustotou naší veličiny X.

Metoda momentů:

Porovnáváme teoretické k-té momenty $E(X^k)$ s jejich odhady $m_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^k$ pro prvních několik $k = 1, 2, \dots$.

Protože hustota f_X je sudá, bude $E(X^k) = 0$ pro k liché. Speciálně, střední hodnota je $E(X) = 0$ a tedy požadavek $0 = E(X) = \overline{\boldsymbol{x}}$ nám žádnou podmínku pro h nedává. Dokonce tuto rovnost ani není možno pro naše zadání splnit, protože:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = -\frac{3.5}{8} = -0.4375 \neq 0\ .$$

To nám ale nemusí vadit, protože jen těžko můžeme očekávat, že se aritmetickým průměrem při konečném počtu měření trefíme právě do hodnoty nula.

Proto musíme použít další momenty

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_h(x)\ dx = \int_{-h}^{h} x^2 \cdot \frac{1}{2h}\ dx = \left[\frac{x^3}{6h}\right]_{-h}^{h} = \frac{h^2}{3}\ .$$

Odhad druhého momentu je

$$m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \frac{47.75}{8} \doteq 5.97\,.$$

Odhad parametru získáme jako řešení rovnice

$$\frac{\widehat{h}^2}{3} = E(X^2) = m_2 \doteq 5.97 \quad\Longrightarrow\quad \widehat{h} \doteq \sqrt{3 \cdot 5.97} \doteq 4.23\,.$$

Protože všechny hodnoty ze souboru leží v intervalu $\langle -\widehat{h},\, \widehat{h}\rangle = \langle -4.23,\, 4.23\rangle$, můžeme nalezenou hodnotu $\widehat{h}$ tudíž považovat za hledaný odhad parametru rozdělení.

Poznámka: Jak by v předchozím příkladu dopadla metoda maximální věrohodnosti? Můžeme uvažovat tyto možnosti:

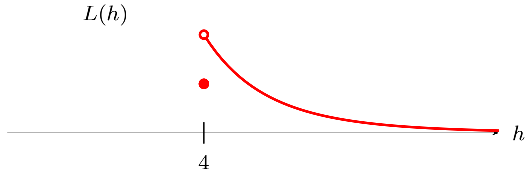
- Obor hodnot $\langle -h,\, h\rangle$ není otevřený interval a uvažovaná hustota není spojitá na celém $\mathbb{R}$. Zkusíme ji tedy v bodech nespojitosti upravit tak, aby všude platilo, že její hodnota v bodě x je průměrem limit zprava a zleva (viz poznámka výše). Pak tedy máme novou hustotu

$$\widetilde{f}_h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2h} & , \ |x| < h, \\ \frac{1}{4h} & , \ |x| = h, \\ 0 & , \ |x| > h. \end{cases}$$

  Aby výsledky byly v oboru hodnot, máme opět podmínku $h \ge \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} = 4$. Pro naše naměřené hodnoty a novou hustotu budeme chtít maximalizovat věrohodnostní funkci

$$L(h) = \prod_{i=1}^{n} \widetilde{f}_h(x_i) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2h}\right)^8, & h > 4 \\ \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2h}\right)^8, & h = 4 \end{cases}$$

pro $h \in \langle 4,\ +\infty)$. Graf je

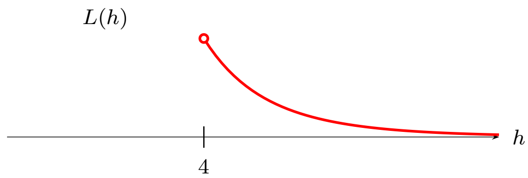


Tato funkce ale bohužel nenabývá svého suprema. Takže žádný odhad nemáme.

- Zkusíme změnit obor hodnot na $(-h, h)$, což pro rovnoměrné rozdělení není příliš velká změna. Tentokrát už tedy budeme mít hustotu spojitou v oboru hodnot, který je *otevřenou* množinou. Aby naměřené výsledky byly v oboru hodnot, dostaneme podmínku $|x_i| < h$ pro $i = 1, \ldots, n$, což vede na silnější omezení $h > \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} = 4$. Tentokrát tedy můžeme využít "klasickou"podobu věrohodnostní funkce

$$L(h) = \prod_{i=1}^{n} f_h(x_i) = \left(\frac{1}{2h}\right)^8$$

pro $h \in (4,\ +\infty)$ s grafem



Ani zde funkce L nenabývá svého suprema, takže opět žádný odhad nemáme.

- Z předchozích úvah vidíme, že odhad při tomto přístupu nedostaneme. Současně je ale zřejmé, že maxima by bylo dosaženo, kdybychom do funkce L dosazovali původní hustotu f_λ a omezení měli $h \geq 4$. K tomuto závěru se tedy někdy sahá, abychom nějaký odhad dostali.

Příklad 10.6 *Mějme hodnoty*

$$2, \quad 3.5, \quad 4, \quad 2.5, \quad 8$$

a předpokládejme, že pocházejí z rozdělení veličiny X s hustotou

$$f(x) = \begin{cases} \varphi^2 x e^{-\varphi x} & \text{pro } x > 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Metodou maximální věrohodnosti odhadněte hodnotu parametr φ.

Řešení:

Ověříme si nejdříve, že f je opravdu hustota. Zřejmě je to nezáporná funkce a aby byla vůbec integrabilní, musí být $\varphi > 0$. A dále máme

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = \int_{0}^{\infty} \varphi^2 x e^{-\varphi x}\ dx = \left\{ \begin{array}{c} t = \varphi x \\ dt = \varphi dx \end{array} \right\} = \int_{0}^{\infty} t e^{-t}\ dt =$$

$$= \Big[-te^{-t} \Big]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t}\, dt = 0 + \Big[-e^{-t} \Big]_0^\infty = 1$$

takže pro $\varphi > 0$ máme opravdu vždy hustotu.

Dále, počet měření je $n = 5$ a jejich hodnoty jsou $(x_1, \ldots, x_5) = (2,\ 3.5,\ 4,\ 2.5,\ 8)$.

Metoda maximální věrohodnosti:
Hledáme takové $\varphi > 0$, které maximalizuje věrohodnostní funkci

$$L(\varphi) = \prod_{i=1}^{5} \varphi^2 x_i e^{-\varphi x_i} = (\varphi^2)^5 e^{-\varphi\cdot(2+3.5+4+2.5+8)} \cdot konst. = \varphi^{10} e^{-20\varphi} \cdot konst.$$

Logaritmicko-věrohodnostní funkce je

$$\ell(\varphi) = \ln L(\varphi) = 10 \ln \varphi - 20\varphi.$$

Z její derivace

$$\ell'(\varphi) = \frac{10}{\varphi} - 20.$$

získáme řešení

$$\frac{10}{\widehat{\varphi}} - 20 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \widehat{\varphi} = \frac{1}{2}$$

(ve kterém skutečně nastává maximum, jak je vidět ze znamének derivace.)

- -

Pro zajímavost si to ještě zkusme **Metodou momentů:**

Chceme, aby platily rovnosti $E(X^k) = m_k$ teoretických a výběrových momentů pro co nejvíce počátečních hodnot $k = 1, 2, \ldots$.
Máme

- střední hodnotu

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \int_0^\infty \varphi^2 x^2 e^{-\varphi x}\, dx = \left\{ \begin{array}{c} t = \varphi x \\ dt = \varphi dx \end{array} \right\} = \frac{1}{\varphi} \int_0^\infty t^2 e^{-t}\, dt = \{\text{viz níže}\} = \frac{2}{\varphi}$$

$$\int_0^\infty t^2 e^{-t}\, dt = \Big[-t^2 e^{-t} \Big]_0^\infty + \underbrace{\int_0^\infty 2te^{-t}\, dt}_{\text{už jsme počítali}} = 0 + 2 = 2$$

- výběrový průměr $\overline{\boldsymbol{x}} = m_1 = \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j}{n} = \frac{2+3.5+4+2.5+8}{5} = \frac{20}{5} = 4$

Z požadované rovnosti $\frac{2}{\widehat{\varphi}} = E(X) = \overline{\boldsymbol{x}} = 4$ dostáváme opět odhad $\widehat{\varphi} = \frac{1}{2}$.

Poznámka: Hustota f vzniká jako konvoluce hustot pro exponenciální rozdělení $\mathrm{Exp}(\varphi)$ (se střední hodnotou $\frac{1}{\varphi}$), což znamená prostě to, že X má stejné rozdělení jako $X_1 + X_2$, kde X_1 a X_2 jsou nezávislé veličiny se stejným exponenciálním rozdělením $\mathrm{Exp}(\varphi)$. Odsud už je také jasné, proč nám musí vyjít, že $E(X) = E(X_1 + X_2) = \frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\varphi}$.