3. cvičení z STP

2. - 6. březen 2020

Připomenutí: Jevy $A_1, \dots, A_n$ jsou nezávislé $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ pro každou indexovou množinu $K \subseteq \{1, \dots, n\}$ je

$$P\Big(\bigcap_{i \in K} A_i\Big) = \prod_{i \in K} P(A_i)\ .$$

Netriviální podmínky vzniknou pro $|K| \geq 2$. Máme tak $2^n - n - 1$ podmínek.

Speciálně: jevy A, B a C jsou nezávislé právě když:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B), \qquad P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C), \qquad P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$$

a

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

přičemž žádná z těchto 4 podmínek NENÍ důsledkem zbylých třech.

Příklad 3.1 *Automat vyrábí součástky ve tvaru obdélníka. Tolerance v šířce je překročena v 8 %, tolerance v délce je překročena v 7 % a v obou rozměrech ve 3 % vyrobených součástek.*

(a) Rozhodněte, zda jsou porušení rozměru v délce a šířce nezávislá či závislá.

(b) Vypočtěte pravděpodobnost toho, že náhodně vybraný výrobek má oba rozměry v toleranci.

Řešení:
Označme A porušení tolerance v šířce a B porušení tolerance v délce.

a) Potom je

$$P(A) = 0.08, \qquad P(B) = 0.07, \qquad P(A \cap B) = 0.03\,.$$

Náhodné jevy A a B budou nezávislé, právě když platí

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)\ .$$

To ale zjevně není pro náš případ pravda, protože $0.03 \neq 0.08 \cdot 0.07$. Porušení rozměrů jsou tedy závislé náhodné veličiny.

b) Dobrý výrobek je jev $A^c \cap B^c$, jehož pravděpodobnost je

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B^c) &= P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = 1 - 0.08 - 0.07 + 0.03 = 0.88\,. \end{aligned}$$

Dobrý výrobek získáme s pravděpodobností 88 %.

Příklad 3.2 *Náhodně vybereme číslo od* 1 *do* 100*.*

(a) Jsou jevy

$A =$ *"vybrané číslo je dělitelné dvěma,"*

$B =$ *"vybrané číslo je dělitelné pěti,"*

nezávislé či závislé?

(b) Jaká je pravděpodobnost, že vybrané číslo nebude dělitelné ani dvěma ani pěti?

Jak to dopadne, když na začátku budeme uvažovat čísla od 1 *do* 101*?*

Řešení:
Budeme opět uvažovat $\Omega = \{1, 2, \ldots, 100\}$ s klasickou (tj. Laplaceovou) pravděpodobností.

(a) Pak je

$$|A| = 50, \quad |B| = 20, \quad |A \cap B| = 10$$

a tedy

$$P(A) = \frac{50}{100} = 0.5, \quad P(B) = \frac{20}{100} = 0.2, \quad P(A \cap B) = \frac{10}{100} = 0.1\ .$$

Takže $P(A \cap B) = \frac{1}{10} = P(A) \cdot P(B)$ a jevy A a B jsou tudíž nezávislé.

(b) Hledáme pravděpodobnost jevu $C = A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$.
Pak je

$$P(C) = P\big((A \cup B)^c\big) = 1 - P(A \cup B) =$$

$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = 1 - 0.5 - 0.2 + 0.1 = 0.4\ .$$

Nebo můžeme využít toho, že pokud A a B jsou nezávislé, pak i A^c a B^c jsou nezávislé, což snadno uvidíme při dokončení výpočtu:

$$P(A^c \cap B^c) = P(C) = \cdots = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B) =$$

$$= \big(1 - P(A)\big) \cdot \big(1 - P(B)\big) = P(A^c) \cdot P(B^c) = 0.5 \cdot 0.8 = 0.4\ .$$

- -

Jestliže nyní budeme uvažovat $\Omega' = \{1, 2, \ldots, 101\}$, tak se situace změní. Budeme mít

$$P(A) = \frac{50}{101}, \quad P(B) = \frac{20}{101}, \quad P(A \cap B) = \frac{10}{101}$$

a tedy $P(A \cap B) = \frac{10}{101} \neq \frac{50}{101} \cdot \frac{20}{101} = P(A) \cdot P(B)$ a jevy A a B budou tentokrát *závislé.*

A dále dostaneme

$$P(C) = \cdots = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = 1 - \frac{50}{101} - \frac{20}{101} + \frac{10}{101} = \frac{41}{101} \doteq 0.406\ .$$

Poznámka: Pro jev A si definujme tzv. charakteristickou funkci $\chi_A : \Omega \to \mathbb{R}$ jako

$$\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \in A^c\ . \end{cases}$$

Tato funkce je náhodná veličina (viz později). Pokud $0 < P(A) < 1$ (což je obvyklý případ), má χ_A alternativní rozdělení $\mathrm{Alt}(p)$, kde $p = P(A)$ (opět viz později).

Nyní můžeme vyjádřit pojem nezávislosti dvou jevů A a B takto:

Jevy A a B jsou nezávislé $\Leftrightarrow$ *veličiny χ_A a χ_B jsou nekorelované, tj.* $\mathrm{cov}(\chi_A, \chi_B) = 0$.

(Neboli veličiny $X_A = \chi_A - P(A)$ a $X_B = \chi_B - P(B)$ jsou navzájem kolmé při určitém standardním skalárním součinu veličin - viz později).

Tento skalární součin "$\langle \cdot \mid \cdot \rangle$" nám pak umožňuje měřit i míru závislosti jevů A a B, a to konkrétně pomocí úhlu $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$, který svírají právě veličiny X_A a X_B a to podle obvyklého vzorce z lineární algebry

$$\cos\varphi = \frac{\langle X_A | X_B \rangle}{\|X_A\| \cdot \|X_B\|} = \cdots = \frac{P(A \cap B) - P(A) \cdot P(B)}{\sqrt{P(A) \cdot P(A^c) \cdot P(B) \cdot P(B^c)}} \in \langle -1, 1 \rangle\ .$$

Přitom úhel φ může obecně nabývat všech uvedených hodnot. Speciální případy jsou tyto:

(a) $\varphi = 0°$ $\Leftrightarrow$ jevy A a B se rovnají (až na množinu nulové pravděpodobnosti),

(b) $\varphi = 90°$ $\Leftrightarrow$ jevy A a B jsou nezávislé,

(c) $\varphi = 180°$ $\Leftrightarrow$ jevy A a B jsou navzájem doplňkové (až na množinu nulové pravděpodobnosti).

V předchozím příkladu tedy v případě čísel od 1 do 101 pro jevy A a B máme úhel φ daný jako

$$\cos\varphi = \frac{P(A\cap B) - P(A)\cdot P(B)}{\sqrt{P(A)\cdot P(A^c)\cdot P(B)\cdot P(B^c)}} = \frac{\frac{10}{101} - \frac{50}{101}\cdot\frac{20}{101}}{\sqrt{\frac{50}{101}\cdot\frac{51}{101}\cdot\frac{20}{101}\cdot\frac{81}{101}}} = \frac{1}{9\sqrt{510}} \doteq 0.005$$

neboli $\varphi = \arccos(\frac{1}{9\sqrt{510}}) \doteq 89.72°$. Takže tyto jevy jsou “téměř” nezávislé.

Příklad 3.3 *Nezávislé jevy A, B, C mají po řadě pravděpodobnosti* 0.2, 0.3, 0.4. *Určete pravděpodobnost jevu $X = (A\cup B)\cap C$.*

Řešení:

Použijeme, že pokud jevy $A_1, \dots, A_n$ jsou nezávislé, pak také jevy

- $A_1 \cup A_2, A_3, \dots, A_n$ jsou nezávislé
- $A_1 \cap A_2, A_3, \dots, A_n$ jsou nezávislé
- $A_1^c, A_2, A_3, \dots, A_n$ jsou nezávislé

Nezávislé jevy tedy můžeme libovolně sdružovat nebo pronikat (daný jev vždy sjednotíme nebo pronikneme vždy jen s jednou skupinou jevů), a můžeme je libovolně převracet na jejich doplňky. Výsledek jsou opět nezávislé jevy.

Protože A, B, C jsou nezávislé, jsou i jevy $A\cup B$ a C nezávislé. Tedy máme

$$P(X) = P((A\cup B)\cap C) = P(A\cup B)\cdot P(C)$$

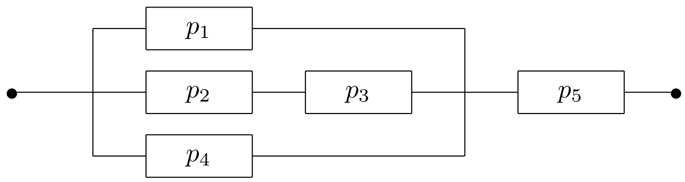
přičemž

$$\begin{aligned} P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) &= \\ = P(A) + P(B) - P(A)\cdot P(B)& \\ = 0.2 + 0.3 - 0.2\cdot 0.3 = 0.44 ,& \end{aligned}$$

Celkem tak dostaneme

$$P(X) = P(A\cup B)\cdot P(C) = 0.44\cdot 0.4 = 0.176 .$$

Příklad 3.4 *(operace s nezávislými jevy) Zařízení na obrázku je tvořeno zapojením bloků, které pracují nezávisle na sobě a pravděpodobností výskytu poruch jsou zadány. Vypočtěte pravděpodobnost poruchy funkce celého zařízení.*

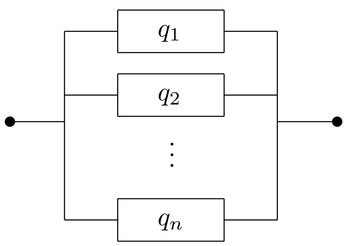


Pravděpodobnosti vyčíslete pro $p_1 = 0.2$, $p_2 = p_3 = 0.4$, $p_4 = 0.3$ a $p_5 = 0.1$.

Řešení:

Úlohu si zjednodušíme tím, že budeme postupně nahrazovat více bloků jedním blokem, který bude mít stejnou pravděpodobnost poruchy.

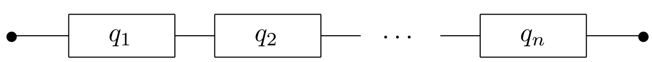
- Pro paralelní zapojení



a jevy $A_i =$"*i-tý blok (seshora) má poruchu*" je pravděpodobnost poruchy tohoto zapojení rovna

$$P(\text{"porucha paralelního zapojení"}) = P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdots P(A_n) = q_1 \cdots q_n \ .$$

- Pro sériové zapojení



a jevy $B_i =$"*i-tý blok (zleva) má poruchu*" je pravděpodobnost poruchy tohoto zapojení rovna

$$P(\text{"porucha sériového zapojení"}) = P(B_1 \cup \cdots \cup B_n) = 1 - P\big((B_1 \cup \cdots \cup B_n)^c\big) =$$

$$= 1 - P(B_1^c \cap \cdots \cap B_n^c) = 1 - P(B_1^c) \cdots P(B_n^c) = 1 - (1 - q_1) \cdots (1 - q_n) \ .$$

Pro vyřešení původního zadání teď

(a) nejdříve nahradíme sériové zapojení dvou bloků s pravděpodobnostmi poruch $p_2 = 0.4$ a $p_3 = 0.4$ jediným blokem s pravděpodobností poruchy

$$p_{2,3} = 1 - (1 - p_2)(1 - p_3) = 1 - 0.6 \cdot 0.6 = 0.64 \ .$$

(b) dále nahradíme paralelní zapojení tří bloků s pravděpodobnostmi poruch $p_1 = 0.2$, $p_{2,3} = 0.64$ a $p_4 = 0.3$ jediným blokem s pravděpodobností poruchy

$$p_{1,2,3,4} = p_1 \cdot p_{2,3} \cdot p_4 = 0.2 \cdot 0.64 \cdot 0.3 = 0.0384 \ .$$

(c) a nakonec nahradíme sériové zapojení dvou bloků s pravděpodobnostmi poruch $p_{1,2,3,4} = 0.0384$ a $p_5 = 0.1$ jediným blokem, který odpovídá celému zařízení a má pravděpodobnost poruchy

$$p_{1,2,3,4,5} = 1 - (1 - p_{1,2,3,4})(1 - p_5) = 1 - 0.9616 \cdot 0.9 = 1 - 0,86544 = 0.13456 \ .$$

Příklad 3.5 *Náhodné jevy A a B jsou nezávislé a $P(A \cup B) = 0.545$, $P(A \cap B) = 0.105$. Určete pravděpodobnosti $P(A)$, $P(B)$ a $P(A \cap B^c)$.*

Řešení:
Jestliže využijeme nezávislosti náhodných jevů A a B, pak dostaneme

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B), \qquad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Označme si $P(A) = x$ a $P(B) = y$. Pro hledané pravděpodobnosti tak dostaneme soustavu rovnic

$$0.545 = x + y - 0.105, \qquad x \cdot y = 0.105 \Rightarrow y = \frac{0.105}{x}\,.$$

Po dosazení do první rovnice dostaneme kvadratickou rovnici pro neznámou x ve tvaru

$$x^2 - 0.65x + 0.105 = 0 \Rightarrow x_1 = 0.35, \quad x_2 = 0.3\,.$$

Ze symetrie vztahů plyne, že je

$$P(A) = 0.35, \quad P(B) = 0.3 \qquad \text{nebo} \qquad P(A) = 0.3, \quad P(B) = 0.35\,.$$

A dále pro první z možností je

$$P(A \cap B^c) = P(A) \cdot P(B^c) = 0.35 \cdot 0.7 = 0.245$$

a pro druhou volbu řešení je

$$P(A \cap B^c) = P(A) \cdot P(B^c) = 0.3 \cdot 0.65 = 0.195\ .$$

Příklad 3.6 *Dva střelci střílí na terč po jedné ráně. Pravděpodobnost, že se první trefí je $p_1 = 0.7$. Pravděpodobnost, že se trefí druhý střelec je $p_2 = 0.8$. Jaká je pravděpodobnost, že pokud v terči byl právě jeden zásah, trefil se první střelec?*

Řešení:
Uvažujme jevy

$S_1 =$ "*první střelec se trefí*",

$S_2 =$ "*druhý střelec se trefí*".

Tyto jevy považujeme (z podstaty zadání) za nezávislé a dále máme $P(S_1) = 0.7$ a $P(S_2) = 0.8$.

Zde budeme oproti předchozím příkladům hledat tzv. aposteriorní (tj. následnou) a tudíž podmíněnou pravděpodobnost. Označme si jev

$C =$ "*právě jeden ze střelců se trefí*"

a hledáme $P(S_1|C)$. Máme $C = (S_1 \cap S_2^c) \cup (S_1^c \cap S_2)$. Pro výpočet si ještě určíme, že

$$S_1 \cap C = \text{“ \textit{první střelec se trefí a druhý ne}”} = S_1 \cap S_2^c\ .$$

Tedy

$$P(S_1|C) = \frac{P(S_1 \cap C)}{P(C)} = \frac{P(S_1 \cap S_2^c)}{P(S_1 \cap S_2^c) + P(S_1^c \cap S_2)} = \frac{0.7 \cdot 0.2}{0.7 \cdot 0.2 + 0.3 \cdot 0.8} = \frac{7}{19} \doteq 0.3684\ .$$

kde jsme použili, že jevy $S_1 \cap S_2^c$ a $S_1^c \cap S_2$ jsou neslučitelné (tj. disjunktní).

Příklad 3.7 *Pro hod dvěma symetrickými mincemi uvažujme jevy*

$A =$*"na první minci padl líc",*

$B =$*"na druhé minci padl rub",*

$C =$*"na mincích padly různé výsledky".*

Jak je to s nezávislostí jevů A, B, C*?*

Řešení:
Prostor všech možných výsledků jsou uspořádané dvojice hodnot na jednotlivých mincích

$$\Omega : \begin{array}{cc} (\text{líc}, \text{líc}) & (\text{líc}, \text{rub}) \\ (\text{rub}, \text{líc}) & (\text{rub}, \text{rub}) \end{array}$$

a každý výsledek bude stejně pravděpodobný. Pak máme $|A| = |B| = |C| = 2$ a tedy

$$P(A) = P(B) = P(C) = \tfrac{1}{2}$$

a dále

$$A \cap B = A \cap C = B \cap C = A \cap B \cap C = \{\ (\text{líc}, \text{rub})\ \}\ .$$

Tedy

$$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = P(A \cap B \cap C) = \tfrac{1}{4}\ .$$

a proto máme

$$P(A \cap B) = \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = P(A) \cdot P(B)$$

a podobně je to pro ostatní případy, zatímco

$$P(A \cap B \cap C) = \tfrac{1}{4} \neq \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C).$$

Jevy jsou tak po dvou nezávislé, ale ne celkově nezávislé.