

9. cvičení z STP

20. - 24. duben 2020

Připomeňme si, co říká **Centrální limitní věta (CLV)**:

Nechť X_i , pro $i = 1, 2, \dots$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin, které mají stejná rozdělení se střední hodnotou μ a (konečným) rozptylem σ^2 . Pak pro veličiny

$$Z_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

platí, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\text{norm}(Z_n) \leq t) = \Phi(t) \quad \text{pro každé } t \in \mathbb{R}.$$

Neboli: pro velká n má veličina $\text{norm}(Z_n)$ přibližně normální rozdělení $N(0, 1)$.

Centrální limitní větu můžeme formulovat (namísto pro Z_n) také pro tzv. výběrový průměr, tj. veličiny

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{n} \cdot Z_n.$$

protože pro ně platí $\text{norm}(\bar{X}_n) = \text{norm}(Z_n)$.

Pro lepší představu o tom, jakou roli pro veličinu s normálním rozdělením $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ hraje směrodatná odchylka σ se používá tzv.

pravidlo tří-sigma (https://cs.wikipedia.org/wiki/Pravidlo_t%C5%99%C3%AD_sigma)

které je ovšem čistě jen technickou pomůckou:

Jestliže si budeme počítat pravděpodobnosti

$$P(|X - \mu| \leq k \cdot \sigma) = P\left(\left| \underbrace{\frac{X - \mu}{\sigma}}_{\sim N(0,1)} \right| \leq k\right) = \Phi(k) - \Phi(-k) = 2 \cdot \Phi(k) - 1 \quad \text{pro } k = 1, 2, 3, \dots$$

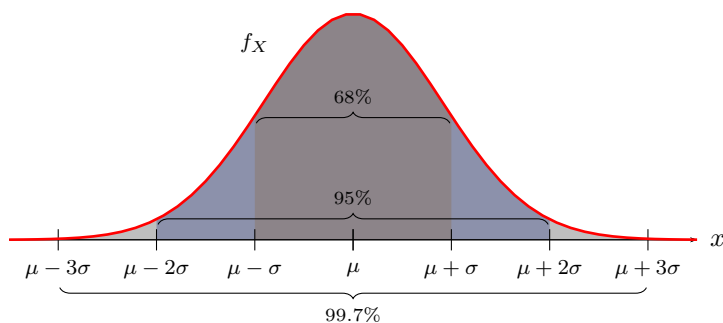
dostaneme postupně

$$P(|X - \mu| \leq \sigma) = 2 \cdot \Phi(1) - 1 \doteq 2 \cdot 0.8413 - 1 = 0.6826 \doteq 68\%$$

$$P(|X - \mu| \leq 2 \cdot \sigma) = 2 \cdot \Phi(2) - 1 \doteq 2 \cdot 0.9772 - 1 = 0.9544 \doteq 95\%$$

$$P(|X - \mu| \leq 3 \cdot \sigma) = 2 \cdot \Phi(3) - 1 \doteq 2 \cdot 0.99865 - 1 = 0.9973 \doteq 99.7\%$$

Pro vyšší hodnoty, tj. $k \geq 4$ už jsou pravděpodobnosti v podstatě rovny 1, takže se v praxi příliš nepoužívají (záleží samozřejmě na zvolené přesnosti).



V dalším příkladu se podíváme, jak můžeme lepší představu o pravděpodobnostech získat.

Příklad 9.1 *Pravděpodobnost toho, že se za dobu T porouchá přístroj je $p = 0.2$. S jakou pravděpodobností se za dobu T ze 100 (nezávisle pracujících) přístrojů porouchá*

- (a) alespoň 20,
- (b) méně než 28,
- (c) 14 až 26 přístrojů?

Řešení:

Pro $i = 1, \dots, n$ (kde $n = 100$) si zavedeme veličiny

$$X_i = \begin{cases} 1 & , i\text{-tý přístroj se porouchá,} \\ 0 & , i\text{-tý přístroj bude v pořádku.} \end{cases}$$

Veličiny X_i budou nezávislé s alternativním rozdělením $\text{Alt}(p) = \text{Alt}(0.2)$, protože $P(X_i = 1) = 0.2$. Počet porouchaných přístrojů je tedy veličina

$$Z = \sum_{i=1}^{100} X_i$$

která má tudíž binomické rozdělení $\text{Bi}(n, p) = \text{Bi}(100, 0.2)$. To sice umíme přesně popsat, ale vyčíslování součtu mnoha velmi malých členů by vedlo ke značným numerickým chybám (a bez softwaru by ani nebylo možné). Proto použijeme CLV, která velmi dobře aproximuje hledané pravděpodobnosti.

Pro $Z = \sum_{i=1}^n X_i$ tedy máme

$$\begin{aligned} E(Z) &= n \cdot E(X_1) = n \cdot p = 100 \cdot 0.2 = 20 \\ \text{var}(Z) &= n \cdot \text{var}(X_1) = n \cdot p \cdot (1 - p) = 100 \cdot 0.2 \cdot 0.8 = 16 \\ \Rightarrow \sqrt{\text{var}(Z)} &= \sqrt{16} = 4 \end{aligned}$$

Podle CLV můžeme předpokládat, že veličina $\text{norm}(Z) = \frac{Z - E(Z)}{\sqrt{\text{var}(Z)}} = \frac{Z - 20}{\sqrt{16}}$ má přibližně normované normální rozdělení $N(0, 1)$.

To také můžeme chápat tak, že veličina Z má *přibližně* normální rozdělení

$$N(E(Z), \text{var}(Z)) = N(20, 4^2)$$

tedy že

$$F_Z(t) \doteq \Phi\left(\frac{t - 20}{\sqrt{16}}\right) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R} .$$

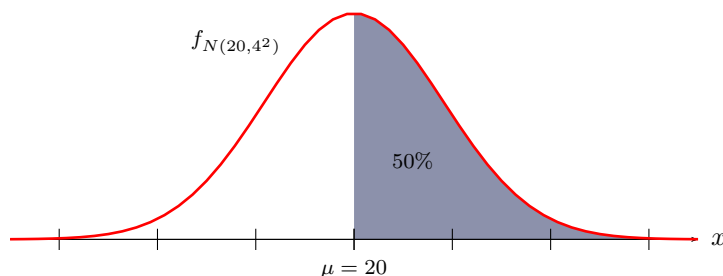
Pak tedy máme:

(a)

$$\begin{aligned} P(Z \geq 20) &= P\left(\frac{Z - 20}{\sqrt{16}} \geq \frac{20 - 20}{\sqrt{16}}\right) = P(\text{norm}(Z) \geq 0) = \\ &= 1 - P(\text{norm}(Z) < 0) \stackrel{\text{(CLV)}}{\doteq} 1 - \Phi(0) = 1 - 0.5 = \mathbf{0.5} . \end{aligned}$$

(Pro srovnání: skutečná hodnota pro binomické rozdělení je **0.5398**.)

Když budeme uvažovat (spojité) rozdělení $N(20, 4^2)$, které ALE POUZE aproximuje *původní diskrétní* binomické rozdělení veličiny Z , můžeme si představit hledanou pravděpodobnost (z HLEDISKA VÝPOČTU) takto:



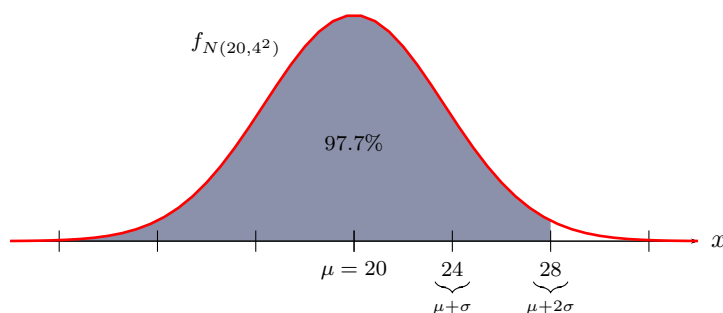
(b)

$$P(Z < 28) = P\left(\frac{Z - 20}{\sqrt{16}} < \frac{28 - 20}{\sqrt{16}}\right) = P(\text{norm}(Z) < 2) \stackrel{(CLV)}{=} \\ \stackrel{(CLV)}{=} \Phi(2) \doteq \mathbf{0.977} .$$

(Pro srovnání: skutečná hodnota pro binomické rozdělení je **0.9658**.)

Když opět budeme uvažovat (spojité) rozdělení $N(20, 4^2)$, které POUZE aproximuje *původní diskrétní* binomické rozdělení veličiny Z a vezmeme do úvahy pravidlo tří sigma, můžeme uvažovat (z HLEDISKA VÝPOČTU) takto:

Protože $28 = \mu + 2\sigma$, tak hodnota $P(Z < 28) \doteq P(N(20, 4^2) < 28)$ nám musí vyjít větší než 95% (viz náčrt).



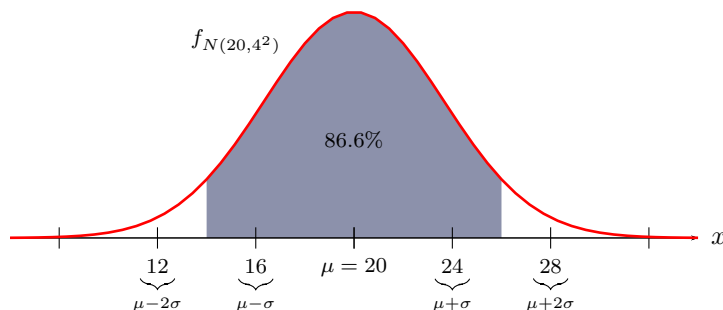
(c)

$$P(14 \leq Z \leq 26) = P\left(\frac{14 - 20}{\sqrt{16}} \leq \frac{Z - 20}{\sqrt{16}} \leq \frac{26 - 20}{\sqrt{16}}\right) = P(-1.5 \leq \text{norm}(Z) \leq 1.5) = \\ = P(\text{norm}(Z) \leq 1.5) - P(\text{norm}(Z) < -1.5) \stackrel{(CLV)}{=} \Phi(1.5) - \Phi(-1.5) = \\ = 2 \cdot \Phi(1.5) - 1 \doteq 2 \cdot 0.933 - 1 = \mathbf{0.866} .$$

(Pro srovnání: skutečná hodnota pro binomické rozdělení je **0.8973**.)

Když opět budeme uvažovat (spojité) rozdělení $N(20, 4^2)$, které POUZE aproximuje *původní diskrétní* binomické rozdělení veličiny Z a vezmeme do úvahy pravidlo tří sigma, můžeme uvažovat (z HLEDISKA VÝPOČTU) takto:

Protože $\mu - 2\sigma = 12 < 14 < 16 = \mu - \sigma$ a $\mu + \sigma = 24 < 16 < 28 = \mu + 2\sigma$, tak hodnota $P(14 \leq Z \leq 26) \doteq P(14 \leq N(20, 4^2) \leq 26)$ nám musí vyjít mezi 68% a 95% (viz náčrt).



Příklad 9.2 V lese se narodí průměrně 4 zajáci denně. Předpokládejme, že počet narozených zajíců se řídí Poissonovým rozdělením. Jaká je pravděpodobnost, že v následujících 7 týdnech se v lese narodí alespoň 175 zajíců?

Řešení:

Pro veličinu

$$Z = \text{“počet narozených zajíců za 49 dnů”}$$

nás zajímá $P(Z \geq 175)$. U této veličiny sice snadno zjistíme její rozdělení (bude to $Z \sim \text{Poiss}(4 \cdot 49)$), ale k přesnějšímu vyčíslení by bylo při tomto přístupu potřeba sečíst kolem 175 velmi malých čísel, což by bylo jednak náročné a také by vznikalo hodně chyb.

K řešení proto použijeme centrální limitní větu a tudíž budeme chtít veličinu Z “rozsekat” na co nejvíce stejně rozdělených nezávislých veličin. Označme si tedy pro $i = 1, 2, \dots, n$, kde $n = 7 \cdot 7 = 49$, veličiny

$$X_i = \text{“počet narozených zajíců v } i\text{-tý den”}.$$

Velichiny pokládáme za nezávislé s rozdělením $X_i \sim \text{Poiss}(4)$, tedy $E(X_i) = 4 = \text{var}(X_i)$. Protože platí $Z = \sum_{i=1}^n X_i$, dostaneme

$$E(Z) = n \cdot E(X_1) = 49 \cdot 4 = 196$$

$$\text{var}(Z) = n \cdot \text{var}(X_1) = 49 \cdot 4 = 196 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\text{var}(Z)} = \sqrt{196} = 14$$

což v případě rozptylu platí díky nezávislosti veličin.

Podle CLV bude mít veličina $\text{norm}(Z) = \frac{Z - E(Z)}{\sqrt{\text{var}(Z)}} = \frac{Z - 196}{14}$ přibližně rozdělení $N(0, 1)$. Můžeme proto psát

$$\begin{aligned} P(Z \geq 175) &= P\left(\frac{Z - 196}{14} \geq \frac{175 - 196}{14}\right) = P(\text{norm}(Z) \geq -1.5) = \\ &= 1 - P(\text{norm}(Z) < -1.5) \stackrel{(CLV)}{\doteq} 1 - \Phi(-1.5) = 1 - (1 - \Phi(1.5)) = \\ &= \Phi(1.5) \doteq \mathbf{0.9332}. \end{aligned}$$

(Pro srovnání: skutečná hodnota pro Poissonovo rozdělení je **0.9398**.)

Příklad 9.3 Tramvaj má intervaly mezi příjezdy 10 minut. Jaká je pravděpodobnost, že během 24 pracovních dnů stráví člověk při cestách do práce a zpět čekáním na tramvaj nejvýše 3 hodiny?

Řešení:

Pro veličinu

$$Z = \text{“celková doba čekání během 24 dnů při cestách tam a zpět” [v hodinách]}$$

nás zajímá $P(Z \leq 3)$.

K řešení opět použijeme centrální limitní větu. Označme si tedy pro $i = 1, 2, \dots, n$, kde $n = 24 \cdot 2 = 48$, veličiny

$$X_i = \text{“doba strávená čekáním při } i\text{-tém příchodu na zastávku” [v hodinách]}$$

které pokládáme za nezávislé. Tramvaj jezdí přesně po 10 minutách, zatímco naše příchody na zastávku budeme pokládat za náhodné s rovnoměrným rozdělením v rámci 10 minutového intervalu. Proto i doba čekání X_i bude mít rovnoměrné rozdělení (v jednotkách hodin) tvaru $\text{Ro}(a, b) = \text{Ro}(0, \frac{1}{6})$.

Protože opět platí $Z = \sum_{i=1}^n X_i$, dostaneme

$$E(X_i) = \frac{a+b}{2} = \frac{0 + \frac{1}{6}}{2} = \frac{1}{12} \quad \Rightarrow \quad E(Z) = n \cdot E(X_1) = 48 \cdot \frac{1}{12} = 4$$

$$\text{var}(X_i) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(\frac{1}{6} - 0)^2}{12} = \frac{1}{12 \cdot 36} \quad \Rightarrow \quad \text{var}(Z) = n \cdot \text{var}(X_1) = 48 \cdot \frac{1}{12 \cdot 36} = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{\text{var}(Z)} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}.$$

Podle CLV bude mít veličina $\text{norm}(Z) = \frac{Z - E(Z)}{\sqrt{\text{var}(Z)}} = 3(Z - 4)$ přibližně rozdělení $N(0, 1)$. Můžeme proto psát

$$P(Z \leq 3) = P\left(\underbrace{3 \cdot (Z - 4)}_{\text{norm}(Z)} \leq 3 \cdot (3 - 4)\right) = P(\text{norm}(Z) \leq -3) \stackrel{\text{(CLV)}}{=} \doteq$$

$$\stackrel{\text{(CLV)}}{=} \Phi(-3) = 1 - \Phi(3) \doteq 1 - 0.9987 = \mathbf{0.0013}.$$

Příklad 9.4 Zaokrouhlovací chyba na celé jednotky má rovnoměrné rozložení na intervalu $(-0.5, 0.5)$. Uvažujme součet 100 (nezávislých) zaokrouhlovacích chyb,

(a) Spočítejte pravděpodobnost, že tento součet bude v absolutní hodnotě menší než 4.

(b) Určete $\varepsilon > 0$ tak, aby pravděpodobnost toho, že součet bude v absolutní hodnotě menší než ε , byla 0.9.

Řešení:

Budeme postupovat podobně jako v příkladu 9.3. K řešení opět použijeme centrální limitní větu. Označme si tedy pro $i = 1, 2, \dots, n$, kde $n = 100$, veličiny

$$X_i = \text{“hodnota } i\text{-té zaokrouhlovací chyby”}$$

které budou nezávislé a mají rovnoměrné rozdělení $\text{Ro}(a, b) = \text{Ro}(-0.5, 0.5)$.

Zajímá nás veličina $Z = \sum_{i=1}^n X_i$. Pro ni máme

$$E(X_i) = \frac{a+b}{2} = \frac{-0.5+0.5}{2} = 0 \Rightarrow E(Z) = n \cdot E(X_1) = 100 \cdot 0 = 0$$

$$\text{var}(X_i) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(0.5 - (-0.5))^2}{12} = \frac{1}{12} \Rightarrow \text{var}(Z) = n \cdot \text{var}(X_1) = 100 \cdot \frac{1}{12} = \frac{25}{3}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\text{var}(Z)} = \sqrt{\frac{25}{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}}.$$

Podle CLV bude mít veličina $\text{norm}(Z) = \frac{Z-E(Z)}{\sqrt{\text{var}(Z)}} = \frac{\sqrt{3}}{5}Z$ přibližně rozdělení $N(0, 1)$.

(a)

$$P(|Z| \leq 4) = P\left(\left| \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{5}Z}_{\text{norm}(Z)} \right| \leq \frac{\sqrt{3}}{5} \cdot 4\right) = P\left(|\text{norm}(Z)| \leq \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{5} \cdot 4}_{\doteq 1.386}\right) \stackrel{(CLV)}{\doteq}$$

$$\stackrel{(CLV)}{\doteq} \Phi(1.386) - \Phi(-1.386) = 2 \cdot \Phi(1.386) - 1 \doteq 2 \cdot 0.917 - 1 = \mathbf{0.834}.$$

(b) Hledáme $\varepsilon > 0$ tak, aby $P(|Z| < \varepsilon) = 0.9$. Máme tedy podobně jako výše

$$0.9 = P(|Z| < \varepsilon) = P\left(\left| \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{5}Z}_{\text{norm}(Z)} \right| < \frac{\sqrt{3}}{5} \cdot \varepsilon\right) = P\left(|\text{norm}(Z)| < \frac{\sqrt{3}}{5} \cdot \varepsilon\right) \stackrel{(CLV)}{\doteq}$$

$$\stackrel{(CLV)}{\doteq} \Phi\left(\frac{\sqrt{3}}{5} \cdot \varepsilon\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{3}}{5} \cdot \varepsilon\right) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{\sqrt{3}}{5} \cdot \varepsilon\right) - 1$$

Máme tudíž

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{3}}{5} \cdot \varepsilon\right) \doteq \frac{1+0.9}{2} = 0.95$$

$$\varepsilon \doteq \frac{5}{\sqrt{3}} \cdot \Phi^{-1}(0.95) \doteq \frac{5}{\sqrt{3}} \cdot 1.645 \doteq \mathbf{4.75}.$$

Pro nezávislé veličiny $U_i \sim \text{Ro}(0, 1)$ má veličina $Y = \sum_{i=1}^n U_i$ tzv. Irwin-Hallovu rozdělení $\text{Ir-Ha}(n)$.

V našem případě máme $X_i + 0.5 \sim \text{Ro}(0, 1)$, takže $Z + \frac{n}{2} = \sum_{i=1}^n (X_i + 0.5) \sim \text{Ir-Ha}(n)$.

Příklad 9.5 Letecká společnost prodává letenky a chce co nejvíce utržit. Letadlo má 216 míst, ale ví se, že zhruba 5% lidí se k odletu nedostaví. Jaká je pravděpodobnost, že pokud společnost prodá 220 letenek, nepřesáhne počet cestujících kapacitu letadla?

Řešení:

Pro veličinu

$Z = \text{“počet cestujících (z těch, co si koupili letenku), kteří se dostaví k odletu”}$

nás zajímá $P(Z \leq 216)$.

K řešení použijeme centrální limitní větu. Označme si tedy pro $i = 1, 2, \dots, n$, kde $n = 220$, veličiny

$$X_i = \begin{cases} 1 & , i\text{-tý cestující se dostaví k odletu,} \\ 0 & , i\text{-tý cestující se nedostaví k odletu.} \end{cases}$$

Pokládáme je za nezávislé s alternativním rozdělením $X_i \sim \text{Alt}(p) = \text{Alt}(0.95)$. Protože platí $Z = \sum_{i=1}^n X_i$ dostaneme

$$\begin{aligned} E(Z) &= n \cdot E(X_1) = n \cdot p = 220 \cdot 0.95 = 209 \\ \text{var}(Z) &= n \cdot \text{var}(X_1) = n \cdot p \cdot (1 - p) = 209 \cdot 0.05 = 10.45 \\ \Rightarrow \sqrt{\text{var}(Z)} &= \sqrt{10.45} \doteq 3.233 \end{aligned}$$

(v případě rozptylu platí vztah díky nezávislosti veličin.)

Podle CLV bude mít veličina $\text{norm}(Z) = \frac{Z - E(Z)}{\sqrt{\text{var}(Z)}} = \frac{Z - 209}{\sqrt{10.45}}$ přibližně rozdělení $N(0, 1)$. Můžeme proto psát

$$\begin{aligned} P(Z \leq 216) &= P\left(\frac{Z - 209}{\sqrt{10.45}} \leq \frac{216 - 209}{\sqrt{10.45}}\right) = P\left(\text{norm}(Z) \leq \frac{7}{\sqrt{10.45}}\right) \stackrel{(CLV)}{=} \\ &\stackrel{(CLV)}{=} \Phi\left(\frac{7}{\sqrt{10.45}}\right) \doteq \Phi(2.165) \doteq \mathbf{0.985} . \end{aligned}$$

Doplnění: Rozdělení veličiny je zřejmě $Z \sim \text{Bi}(n, p) = \text{Bi}(220, 0.95)$ a její hodnoty jsou $Z \in \{0, 1, \dots, 220\}$. Výpočet můžeme teď, vzhledem k malému počtu sčítanců, udělat i přímo:

$$\begin{aligned} P(Z \leq 216) &= 1 - P(Z > 216) = 1 - \sum_{i=217}^{220} \binom{220}{i} 0.95^i \cdot 0.05^{220-i} = \\ &= 1 - 0.95^{217} \left(1750540 \cdot 0.05^3 + 24090 \cdot 0.95 \cdot 0.05^2 + 220 \cdot 0.95^2 \cdot 0.05 + 1 \cdot 0.95^3 \cdot 1 \right) \doteq \\ &\doteq 1 - 0.95^{217} \cdot 286.82 \doteq 1 - 0.0042 = \mathbf{0.9958} . \end{aligned}$$

Příklad 9.6 Chceme zjistit výstupní napětí zdroje (který dává konstantní napětí). Používáme voltmetr, o kterém víme, že má nulovou systematickou chybu (tj. střední hodnota jeho chyby je nulová) a směrodatná odchylka chyby jeho měření je 0.3 V.

Kolik měření musíme minimálně provést, aby se průměr naměřených hodnot lišil od skutečného napětí zdroje nejvýše o 0.1 V s pravděpodobností alespoň 0.95?

Řešení:

Tentokrát budeme pracovat s výběrovým průměrem a navíc máme zjišťovat počet měření. Pravděpodobnost máme naopak předepsanou. V zadání se musíme trochu zorientovat. Označme si výstupní

napětí zdroje jako μ_0 . Dále si označme veličiny

$$X_i = \text{“hodnota napětí, co udává voltmetr při } i\text{-tém měření” [V]}$$

(v jednotkách Volt). Ty budeme pokládat za nezávislé. Dále veličiny $\Delta_i := X_i - \mu_0$ představují chyby při jednotlivých měřeních a my víme, že $E(\Delta_i) = 0$ a známe také jejich směrodatnou odchylku $\sigma = 0.3$ V. Odsud tedy máme

$$E(X_i) = E(\Delta_i + \mu_0) = 0 + \mu_0 = \mu_0 \quad \text{a} \quad \text{var}(X_i) = \text{var}(\Delta_i + \mu_0) = \text{var}(\Delta_i) = \sigma^2 = (0.3)^2$$

Pro veličinu výběrového průměru při n měřeních

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

nás nyní zajímá pro jaké nejmenší n bude splněno, že

$$P\left(|\bar{X}_n - \mu_0| \leq 0.1\right) \geq 0.95$$

Podle CLV pro dostatečně velké n (což budeme předpokládat) má veličina $norm(\bar{X}_n) = \frac{\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)}{\sqrt{\text{var}(\bar{X}_n)}}$ přibližně rozdělení $N(0, 1)$.

Máme

$$E(\bar{X}_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \mu_0$$

$$\text{var}(\bar{X}_n) = \text{var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{var}(X_i) = \frac{\text{var}(X_1)}{n} = \frac{\sigma^2}{n} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\text{var}(\bar{X}_n)} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0.3}{\sqrt{n}}$$

Je tedy $norm(\bar{X}_n) = \frac{\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)}{\sqrt{\text{var}(\bar{X}_n)}} = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\frac{0.3}{\sqrt{n}}}$ a my můžeme dělat úpravy:

$$0.95 \leq P(|\bar{X}_n - \mu_0| \leq 0.1) = P\left(\left|\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\frac{0.3}{\sqrt{n}}}\right| \leq \frac{0.1}{\frac{0.3}{\sqrt{n}}}\right) = P\left(|norm(\bar{X}_n)| \leq \frac{\sqrt{n}}{3}\right) \stackrel{(CLV)}{=} 1$$

$$\stackrel{(CLV)}{=} \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{3}\right) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right) - 1$$

Máme tudíž

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right) \geq \frac{1 + 0.95}{2} = 0.975$$

$$n \geq \left(3 \cdot \Phi^{-1}(0.975)\right)^2 \doteq (3 \cdot 1.96)^2 \doteq \mathbf{34.57}$$

Je tedy potřeba udělat alespoň $n = 35$ měření.

Pokud o rozdělení veličin X_i nebudeme mít další informace, nemůžeme ani dále zjišťovat vhodnost aproximace pomocí CLV. Protože ale veličina X_i popisuje chyby měření, můžeme docela dobře předpokládat, že bude mít normální rozdělení. V tom případě má i veličina Z (jako součet nezávislých X_i) také normální rozdělení a všechny aproximace pomocí CLV pak v tomto případě platí přesně (a vlastně CLV jako takovou zde ani nepotřebujeme). Výsledek $n = 35$ pak je v tomto smyslu přesný.