# 3. cvičení z STP

4. března 2021

**Poznámka:** Mějme $n$ nezávislých opakování daného pokusu, jehož úspěšnost je $0 < p < 1$. Jev

$$B_k = \text{“}\textit{nastane právě } k \textit{ úspěchů v } n \textit{ pokusech”}$$

pro $k = 0, 1, \dots, n$ má pravděpodobnost

$$P(B_k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k} \ .$$

Důvod, proč tu máme kombinační číslo, je v tom, že daných $k$ úspěchů je rozmístěno mezi $n$ pokusů právě $\binom{n}{k}$ způsoby.

**Odvození:** Vezmeme si jevy

$$A_i = \text{“}\textit{úspěch v } i\textit{-tém pokusu”}$$

Ty jsou nezávislé a mají pravděpodobnost $P(A_i) = p$. Pak jev $B_k$ vyjádříme jako sjednocení disjunktních jevů (ty v hranaté závorce)

$$B_k = \bigcup_{\substack{K \subseteq \{1,\dots,n\} \\ |K|=k}} \left[ \left( \bigcap_{i \in K} A_i \right) \cap \left( \bigcap_{j \in \{1,\dots,n\} \setminus K} A_j^c \right) \right]$$

odkud máme ihned

$$P(B_k) = \sum_{\substack{K \subseteq \{1,\dots,n\} \\ |K|=k}} \left[ \underbrace{\left( \prod_{i \in K} P(A_i) \right)}_{p^k} \cdot \underbrace{\left( \prod_{j \in \{1,\dots,n\} \setminus K} P(A_j^c) \right)}_{(1-p)^{n-k}} \right] =$$

$$= \sum_{\substack{K \subseteq \{1,\dots,n\} \\ |K|=k}} p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k} \ .$$

**Příklad:** *Pravděpodobnost výhry* 1.*hráče nad* 2.*hráčem je* 0.7. *Jaká je pravděpodobnost, že během deseti po sobě jdoucích zápasů*

*(1) alespoň jednou vyhrál* 2.*hráč (jev H),*

*(2) maximálně dvakrát vyhrál* 2.*hráč (jev I)?*

**Řešení:**
Jevy

$$B_k = \text{“ }1.\textit{hráč vyhrál právě } k \textit{ z } 10 \textit{ zápasů”}$$

pro $k = 0, 1, \dots, 10$ jsou evidentně navzájem disjunktní (tj. mají prázdné průniky neboli žádné dva nemůžou nastat současně) a mají pravděpodobnost

$$P(B_k) = \binom{10}{k} 0.7^k \cdot 0.3^{10-k} \ .$$

(a) Zde bude vhodnější přejít k doplňku a pak je

$$H^c = \text{“ } 1.\textit{hráč vyhrál všech } 10 \textit{ zápasů”} = B_{10}$$

$$P(H) = 1 - P(H^c) = 1 - P(B_{10}) = 1 - 0.7^{10} \doteq \mathbf{0.9718}.$$

(b) Jev $I$ znamená, že

- buď vše vyhrál 1.hráč
- nebo devět her vyhrál 1.hráč a jednu 2.hráč (na pořadí hry nezáleží)
- nebo osm her vyhrál 1.hráč a dvě 2.hráč (na pořadí rovněž nezáleží).

Tedy je

$$I = B_0 \cup B_1 \cup B_2$$

a z jejich disjunktnosti máme

$$P(I) = P(B_0) + P(B_1) + P(B_2) = 0.7^{10} + \binom{10}{1} 0.3 \cdot 0.7^9 + \binom{10}{2} 0.3^2 \cdot 0.7^8 \doteq \mathbf{0.3828}.$$

**Připomenutí:** Jevy $A_1, \dots, A_n$ jsou nezávislé $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ pro každou indexovou množinu $K \subseteq \{1, \dots, n\}$ je

$$P\Big(\bigcap_{i \in K} A_i\Big) = \prod_{i \in K} P(A_i)\ .$$

Netriviální podmínky vzniknou pro $|K| \geq 2$. Máme tak $2^n - n - 1$ podmínek.

Speciálně: jevy $A$, $B$ a $C$ jsou nezávislé právě když:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B), \quad P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C), \quad P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$$

a

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

přičemž žádná z těchto 4 podmínek NENÍ důsledkem zbylých třech.

**Příklad 3.1** *Pro hod dvěma symetrickými mincemi uvažujme jevy*

$A =$*”na první minci padl líc”,*

$B =$*”na druhé minci padl rub”,*

$C =$*”na mincích padly různé výsledky”.*

*Jak je to s nezávislostí jevů* $A, B, C$*?*

**Řešení:**
Prostor všech možných výsledků jsou uspořádané dvojice hodnot na jednotlivých mincích

$$\Omega : \quad \begin{array}{cc} (\text{líc}, \text{líc}) & (\text{líc}, \text{rub}) \\ (\text{rub}, \text{líc}) & (\text{rub}, \text{rub}) \end{array}$$

a každý výsledek bude stejně pravděpodobný. Pak máme $|A| = |B| = |C| = 2$ a tedy

$$P(A) = P(B) = P(C) = \tfrac{1}{2}$$

a dále

$$A \cap B = A \cap C = B \cap C = A \cap B \cap C = \{ \text{ (líc, rub) } \} .$$

Tedy

$$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = P(A \cap B \cap C) = \tfrac{1}{4} .$$

a proto máme

$$P(A \cap B) = \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = P(A) \cdot P(B)$$

a podobně je to pro ostatní případy, zatímco

$$P(A \cap B \cap C) = \tfrac{1}{4} \neq \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C).$$

Jevy jsou tak po dvou nezávislé, ale ne celkově nezávislé.

**Poznámka:** Nepleťte si disjunktní jevy s nezávislými:

- $A$ a $B$ jsou **disjunktní** $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.
- $A$ a $B$ jsou **nezávislé** $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

**Příklad 3.2** *Nezávislé jevy $A, B, C$ mají po řadě pravděpodobnosti* 0.2, 0.3, 0.4. *Určete pravděpodobnost jevu $X = (A \cup B) \cap C$.*

**Řešení:**

Použijeme, že pokud jevy $A_1, \ldots, A_n$ jsou nezávislé, pak také jevy

- $A_1 \cup A_2, A_3, \ldots, A_n$ jsou nezávislé
- $A_1 \cap A_2, A_3, \ldots, A_n$ jsou nezávislé
- $A_1^c, A_2, A_3, \ldots, A_n$ jsou nezávislé

Nezávislé jevy tedy můžeme libovolně sdružovat nebo pronikat (daný jev vždy sjednotíme nebo pronikneme vždy jen s jednou skupinou jevů), a můžeme je libovolně převracet na jejich doplňky. Výsledek jsou opět nezávislé jevy.

Protože $A, B, C$ jsou nezávislé, jsou i jevy $A \cup B$ a $C$ nezávislé. Tedy máme

$$P(X) = P((A \cup B) \cap C) = P(A \cup B) \cdot P(C)$$

přičemž

$$\begin{aligned} P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) &= \\ = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) \\ = 0.2 + 0.3 - 0.2 \cdot 0.3 = 0.44 \ , \end{aligned}$$

Celkem tak dostaneme

$$P(X) = P(A \cup B) \cdot P(C) = 0.44 \cdot 0.4 = 0.176 \ .$$

**Příklad 3.3** *Náhodné jevy $A$ a $B$ jsou nezávislé a $P(A \cup B) = 0.545$, $P(A \cap B) = 0.105$. Určete pravděpodobnosti $P(A)$, $P(B)$ a $P(A \cap B^c)$.*

**Řešení:**
Jestliže využijeme nezávislosti náhodných jevů $A$ a $B$, pak dostaneme

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B), \qquad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Označme si $P(A) = x$ a $P(B) = y$. Pro hledané pravděpodobnosti tak dostaneme soustavu rovnic

$$0.545 = x + y - 0.105, \qquad x \cdot y = 0.105 \Rightarrow y = \frac{0.105}{x} \ .$$

Po dosazení do první rovnice dostaneme kvadratickou rovnici pro neznámou $x$ ve tvaru

$$x^2 - 0.65x + 0.105 = 0 \Rightarrow x_1 = 0.35, \quad x_2 = 0.3 \,.$$

Ze symetrie vztahů plyne, že je

$$P(A) = 0.35, \quad P(B) = 0.3 \qquad \text{nebo} \qquad P(A) = 0.3, \quad P(B) = 0.35 \,.$$

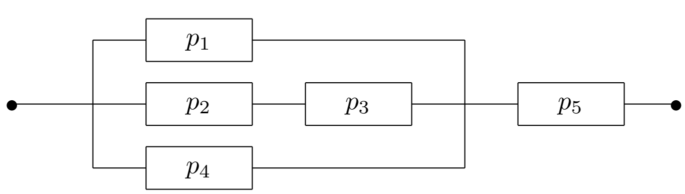
A dále pro první z možností je

$$P(A \cap B^c) = P(A) \cdot P(B^c) = 0.35 \cdot 0.7 = 0.245$$

a pro druhou volbu řešení je

$$P(A \cap B^c) = P(A) \cdot P(B^c) = 0.3 \cdot 0.65 = 0.195 \ .$$

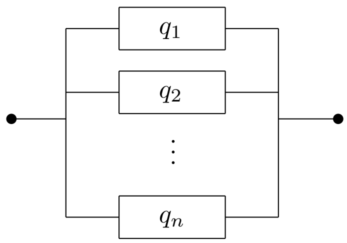
**Příklad 3.4** *(operace s nezávislými jevy) Zařízení na obrázku je tvořeno zapojením bloků, které pracují nezávisle na sobě a pravděpodobností výskytu poruch jsou zadány. Vypočtěte pravděpodobnost poruchy funkce celého zařízení.*




*Pravděpodobnosti vyčíslete pro $p_1 = 0.2$, $p_2 = p_3 = 0.4$, $p_4 = 0.3$ a $p_5 = 0.1$.*

**Řešení:**
Úlohu si zjednodušíme tím, že budeme postupně nahrazovat více bloků jedním blokem, který bude mít stejnou pravděpodobnost poruchy.

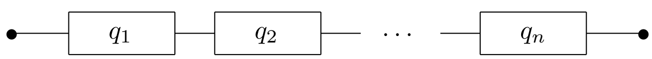
- Pro paralelní zapojení




a jevy $A_i =$“*i-tý blok (seshora) má poruchu*” je pravděpodobnost poruchy tohoto zapojení rovna

$$P(\text{“porucha paralelního zapojení”}) = P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdots P(A_n) = q_1 \cdots q_n \ .$$

- Pro sériové zapojení




a jevy $B_i =$“*i-tý blok (zleva) má poruchu*” je pravděpodobnost poruchy tohoto zapojení rovna

$$P(\text{“porucha sériového zapojení”}) = P(B_1 \cup \cdots \cup B_n) = 1 - P\big((B_1 \cup \cdots \cup B_n)^c\big) =$$

$$= 1 - P(B_1^c \cap \cdots \cap B_n^c) = 1 - P(B_1^c) \cdots P(B_n^c) = 1 - (1 - q_1) \cdots (1 - q_n) \ .$$

Pro vyřešení původního zadání teď

(a) nejdříve nahradíme sériové zapojení dvou bloků s pravděpodobnostmi poruch $p_2 = 0.4$ a $p_3 = 0.4$ jediným blokem s pravděpodobností poruchy

$$p_{2,3} = 1 - (1 - p_2)(1 - p_3) = 1 - 0.6 \cdot 0.6 = 0.64 \ .$$

(b) dále nahradíme paralelní zapojení tří bloků s pravděpodobnostmi poruch $p_1 = 0.2$, $p_{2,3} = 0.64$ a $p_4 = 0.3$ jediným blokem s pravděpodobností poruchy

$$p_{1,2,3,4} = p_1 \cdot p_{2,3} \cdot p_4 = 0.2 \cdot 0.64 \cdot 0.3 = 0.0384 \ .$$

(c) a nakonec nahradíme sériové zapojení dvou bloků s pravděpodobnostmi poruch $p_{1,2,3,4} = 0.0384$ a $p_5 = 0.1$ jediným blokem, který odpovídá celému zařízení a má pravděpodobnost poruchy

$$p_{1,2,3,4,5} = 1 - (1 - p_{1,2,3,4})(1 - p_5) = 1 - 0.9616 \cdot 0.9 = 1 - 0,86544 = 0.13456 \ .$$

**Důležitá poznámka:** Pro jev $A \subseteq \Omega$, kde $P(A) \neq 0$, má funkce

$$\widetilde{P}(\cdot) := P(\ \cdot\ |A)$$

všechny vlastnosti pravděpodobnosti (pro množinu výsledků $\Omega$ a $\sigma$-algebru $\mathcal{A}$). Tedy podmíněná pravděpodobnost se chová v prvním argumentu jako obyčejná pravděpodobnost. Pozor, pro druhý argument už podobné chování neplatí!

V následujících větách používáme tento základní vztah pro jevy $A$ a $B$:

$$P(B \cap A) = P(B|A) \cdot P(A)$$

pokud je podmíněná pravděpodobnost $P(B|A)$ definovaná, tj. pokud je $P(A) \neq 0$.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

**Věta o úplné pravděpodobnosti:** Nechť $A_1, \ldots, A_n$ je úplný disjunktní systém jevů na prostoru všech výsledků $\Omega$ (tedy jejich sjednocením je celé $\Omega$ a jevy jsou pro dvou disjunktní).

Nechť $P(A_i) \neq 0$ pro všechna $i$. Pak pro každý jev $B \subseteq \Omega$ platí

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(B|A_k) \cdot P(A_k)\ .$$

**Bayesova věta:** Pro jevy $A$ a $B$ platí

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

pokud $P(A) \neq 0$ a $P(B) \neq 0$.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

A ve spojení s větou o úplné pravděpodobnosti máme

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(B|A_k) \cdot P(A_k)}\ .$$

(Všimněte si, že výraz v čitateli je jedním ze sčítanců ve jmenovateli.)

**Příklad 3.5** *Na fakultě je 50% studujících na informatice, 30% na matematice a 20% na fyzice. Z těch, co studují na informatice je 10% žen, na matematice 30% a na fyzice 20%.*

*(a) Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný studující je žena?*

*(b) Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný studující je muž na fyzice?*

*(c) Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná studentka studuje matematiku?*

**Řešení:**
Označme si jevy

$A_1$ = *"náhodně vybraný studující je informatik"*

$A_2$ = *"náhodně vybraný studující je matematik"*

$A_3$ = *"náhodně vybraný studující je fyzik"*

$B$ = *"náhodně vybraný studující je žena"*

Jevy $A_1, A_2, A_3$ jsou navzájem disjunktní a jejich sjednocením je celý pravděpodobnostní prostor $\Omega$ (tvořený všemi studujícími). Tedy máme úplný systém disjunktních jevů na $\Omega$. Dále známe

$$P(A_1) = 0.5 \qquad P(A_2) = 0.3 \qquad P(A_3) = 0.2$$
$$P(B|A_1) = 0.1 \quad P(B|A_2) = 0.3 \quad P(B|A_3) = 0.2$$

(a) Chceme znát $P(B)$. Podle věty o úplné pravděpodobnosti máme

$$P(B) = \sum_{j=1}^{3} P(B \cap A_j) = \sum_{j=1}^{3} P(B|A_j) \cdot P(A_j) =$$
$$= 0.1 \cdot 0.5 + 0.3 \cdot 0.3 + 0.2 \cdot 0.2 = \mathbf{0.18}\ .$$

(b) Chceme znát $P(B^c \cap A_3)$. Podle definice podmíněné pravděpodobnosti máme

$$P(B^c \cap A_3) = P(B^c|A_3) \cdot P(A_3) = (1 - 0.2) \cdot 0.2 = \mathbf{0.16}\ .$$

(c) Chceme znát $P(A_2|B)$. Podle Bayesovy věty máme

$$P(A_2|B) = \frac{P(B|A_2) \cdot P(A_2)}{P(B)} = \frac{0.3 \cdot 0.3}{0.18} = \mathbf{0.5}\ .$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Příklad můžeme řešit i bez explicitního použití výše uvedených vět a to pomocí velikosti množin. Tato velikost bude vyjadřovat "počty"studentů v dané množině ovšem s tím, že tento počet může být i desetinné číslo (používáme tak vlastně geometrický pravděpodobnostní model). Tato desetinná čísla pochopitelně nesmíme zaokrouhlovat!

Prostoru $\Omega$ přiřadíme nějakou velikost např. $vol(\Omega) = 100$ (obvykle je dobré si volit takovou velikost, kterou můžeme snadno dělit hodnotami ve jmenovatelích zlomků v zadaných pravděpodobnostech).

Teď si postupně můžeme začít vyplňovat tabulku níže:

- *počet studujících* $= vol(\Omega) = 100$
- *počet studujících na informatice* $= vol(A_1) = P(A_1) \cdot vol(\Omega) = 0.5 \cdot 100 = 50$ a podobně pro matematiku a fyziku
- *počet žen na informatice* $= vol(B \cap A_1) = P(B|A_1) \cdot vol(A_1) = 0.1 \cdot 50 = 5$ a podobně pro matematiku a fyziku
- *počet mužů na informatice* $= vol(B^c \cap A_1) = vol(A_1) - vol(B \cap A_1) = 50 - 5 = 45$ a podobně pro matematiku a fyziku

| | infor. ($A_1$) | matem. ($A_2$) | fyz. ($A_3$) | |
|---|---|---|---|---|
| muži ($B^c$) | 45 | 21 | 16 | 82 |
| ženy ($B$) | 5 | 9 | 4 | 18 |
| | 50 | 30 | 20 | 100 |

Odsud pak ihned máme např. že

$$\textit{počet žen} = vol(B) = \sum_{i=1}^{3} vol(B \cap A_i) = 5 + 9 + 4 = 18$$

a tudíž

$$P(B) = \frac{\textit{počet žen}}{\textit{počet studujících}} = \frac{vol(B)}{vol(\Omega)} = \frac{18}{100} = \mathbf{0.18}$$

$$P(B^c \cap A_3) = \frac{\textit{počet mužů na fyzice}}{\textit{počet studujících}} = \frac{vol(B^c \cap A_3)}{vol(\Omega)} = \frac{16}{100} = \mathbf{0.16}$$

a

$$P(A_2|B) = \frac{\textit{počet žen na matematice}}{\textit{počet žen}} = \frac{vol(B \cap A_2)}{vol(B)} = \frac{9}{18} = \mathbf{0.5}\ .$$

**Příklad 3.6** *Na fakultě je* 50% *studujících na informatice,* 30% *na matematice a* 20% *na fyzice. Z těch, co studují na informatice je* 10% *žen a (podobně) na matematice* 30% *je žen. Mezi studujícími je celkově* 80% *mužů.*

*(a) Jaké procento z mužů studuje na matematice?*

*(b) Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný studující je žena na informatice?*

*(c) Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný studující fyziky je muž?*

**Řešení:**
Opět si označme (jako u příkladu **3.5**) jevy

$A_1 =$*"náhodně vybraný student je informatik"*

$A_2 =$*"náhodně vybraný student je matematik"*

$A_3 =$*"náhodně vybraný student je fyzik"*

$B =$*"náhodně vybraný student je žena"*

Opět máme úplný systém disjunktních $A_1, A_2, A_3$ jevů na $\Omega =$*"všichni studující"*. Tentokrát známe tyto pravděpodobnosti

$$P(A_1) = 0.5 \qquad P(A_2) = 0.3 \quad P(A_3) = 0.2$$
$$P(B|A_1) = 0.1 \quad P(B|A_2) = 0.3$$
$$P(B^c) = 0.8$$

(a) Chceme znát $P(A_2|B^c)$. Podle Bayesovy věty máme

$$P(A_2|B^c) = \frac{P(B^c|A_2) \cdot P(A_2)}{P(B^c)} = \frac{(1-0.3) \cdot 0.3}{0.8} = \frac{21}{80} = \mathbf{0.2625}\ .$$

(b) Chceme znát $P(B \cap A_1)$. Podle definice podmíněné pravděpodobnosti máme

$$P(B \cap A_1) = P(B|A_1) \cdot P(A_1) = 0.1 \cdot 0.5 = \mathbf{0.05}\ .$$

(c) Chceme znát $P(B^c|A_3)$. Protože neznáme $P(A_3|B^c)$, využijeme vztah

$$P(B^c|A_3) = \frac{P(B^c \cap A_3)}{P(A_3)}\ .$$

Z věty o úplné pravděpodobnosti máme

$$P(B^c \cap A_3) = P(B^c) - \sum_{j=1}^{2} P(B^c \cap A_j) = P(B^c) - \sum_{j=1}^{2} P(B^c|A_j) \cdot P(A_j) =$$

$$= 0.8 - \Big((1-0.1)\cdot 0.5 + (1-0.3)\cdot 0.3\Big) = 0.8 - 0.66 = 0.14$$

takže

$$P(B^c|A_3) = \frac{P(B^c \cap A_3)}{P(A_3)} = \frac{0.14}{0.2} = \mathbf{0.7}\ .$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Příklad opět můžeme řešit i bez explicitního použití výše uvedených vět (viz příklad **3.5**). Prostoru $\Omega$ přiřadíme opět velikost např. $vol(\Omega) = 100$.

Teď postupně můžeme začít vyplňovat tabulku níže:

- $\textit{počet studujících} = vol(\Omega) = 100$
- $\textit{počet studujících na informatice} = vol(A_1) = P(A_1)\cdot vol(\Omega) = 0.5\cdot 100 = 50$ a podobně pro matematiku
- $\textit{počet žen na informatice} = vol(B\cap A_1) = P(B|A_1)\cdot vol(A_1) = 0.1\cdot 50 = 5$ a podobně pro matematiku
- $\textit{počet mužů na informatice} = vol(B^c\cap A_1) = vol(A_1) - vol(B\cap A_1) = 50 - 5 = 45$ a podobně pro matematiku
- $\textit{počet mužů} = vol(B^c) = P(B^c)\cdot vol(\Omega) = 0.8\cdot 100 = 80$ a podobně pro ženy
- $\textit{počet mužů na fyzice} = vol(B^c\cap A_3) = vol(B^c) - vol(B^c\cap A_1) - vol(B^c\cap A_2) = 80 - 45 - 21 = 14$ a podobně pro ženy na fyzice

| | infor. ($A_1$) | matem. ($A_2$) | fyz. ($A_3$) | |
|---|---|---|---|---|
| muži ($B^c$) | 45 | 21 | 14 | 80 |
| ženy ($B$) | $0.1\cdot 50 = 5$ | $0.3\cdot 30 = 9$ | 6 | 20 |
| | 50 | 30 | 20 | 100 |

Odsud pak ihned máme že

$$P(A_2|B^c) = \frac{\textit{počet mužů na matematice}}{\textit{počet mužů}} = \frac{vol(B^c\cap A_2)}{vol(B^c)} = \frac{21}{80} = \mathbf{0.2625}$$

$$P(B\cap A_1) = \frac{\textit{počet žen na informatice}}{\textit{počet studujících}} = \frac{vol(B\cap A_1)}{vol(\Omega)} = \frac{5}{100} = \mathbf{0.05}$$

a

$$P(B^c|A_3) = \frac{\textit{počet mužů na fyzice}}{\textit{počet studujících na fyzice}} = \frac{vol(B^c\cap A_3)}{vol(A_3)} = \frac{14}{14+6} = \mathbf{0.7}\ .$$