

8. cvičení z STP

8. dubna 2021

Připomenutí: Jestliže máme dvě náhodné veličiny $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, pak zobrazení

$$(X, Y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$$

nazýváme **náhodný (dvousložkový) vektor**.

Tedy náhodnému výsledku ω (tj. elementárnímu jevu) přiřadíme dvojici hodnot $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Např. vybranému člověku z množiny lidí Ω přiřadíme jeho tělesnou výšku a hmotnost.

(Obdobně vznikne náhodný vektor s více složkami. My se teď zaměříme hlavně na dvousložkový případ.)

Náhodný vektor (X, Y) umí přenést a vytvořit rozdělení pravděpodobnosti na \mathbb{R}^2 - a to tak, že každá "rozumná" množina $A \subseteq \mathbb{R}^2$ (např. otevřená množina nebo interval atd.) bude mít prostě pravděpodobnost

$$P_{(X,Y)}(A) := P\left(\underbrace{(X, Y)^{-1}(A)}_{\{\omega \in \Omega \mid (X(\omega), Y(\omega)) \in A\}}\right).$$

Rozdělení této pravděpodobnosti $P_{(X,Y)}$ na \mathbb{R}^2 můžeme opět úplně popsat, pokud známe pravděpodobnosti jen některých speciálních intervalů a ty nám definují tzv. **sduženou distribuční funkci** $F_{(X,Y)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ jako

$$F_{(X,Y)}(a, b) := P(X \leq a, Y \leq b)$$

Je dobré si uvědomit, že náhodný vektor (X, Y) můžeme snadno sestavit z libovolných dvou náhodných veličin X a Y . Zatímco ale k počítání s veličinou X nám stačí znát jen její distribuční funkci F_X , k práci s vektorem nám NESTAČÍ znalost distribučních funkcí jeho složek! Potřebujeme totiž znát, jaký je vztah mezi veličinami X a Y , a ten je schovaný právě ve sdužené distribuční funkci.

Opět si připomeňme, že pojem nezávislosti pro jevy umožňuje přirozeně definovat nezávislost veličin :

Definice: Veličiny X a Y jsou **nezávislé** $\Leftrightarrow P(X \in I, Y \in J) = P(X \in I) \cdot P(Y \in J)$ pro libovolné intervaly $I, J \subseteq \mathbb{R}$.

Věta: X a Y jsou nezávislé $\Leftrightarrow F_{(X,Y)}(a, b) = F_X(a) \cdot F_Y(b)$ pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$.

Příklad 8.1 Průměrný počet zákazníků během dne v první prodejně je 20, ve druhé prodejně 25. Předpokládáme, že oba počty se řídí Poissonovým rozdělením. Odvoďte rozdělení počtu zákazníků v obou prodejnách dohromady.

Řešení:

Označme si veličiny

$X =$ "počet zákazníků během dne v 1. prodejně"

$Y =$ "počet zákazníků během dne v 2. prodejně"

$Z =$ "počet zákazníků během dne v obou prodejnách dohromady"

kde X a Y budeme přirozeně pokládat za nezávislé. Máme

$$X \sim \text{Poiss}(\lambda), \text{ kde } \lambda = E(X) = 20$$

$$Y \sim \text{Poiss}(\mu), \text{ kde } \mu = E(Y) = 25$$

a

$$P(X = i) = \frac{\lambda^i}{i!} \cdot e^{-\lambda} \quad \text{a} \quad P(Y = j) = \frac{\mu^j}{j!} \cdot e^{-\mu}$$

Jelikož $Z = X + Y$ a případ $X + Y = k$ se rozloží na disjunktní možnosti $(X, Y) = (i, k - i)$ pro $i = 0, 1, \dots, k$, dostáváme

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= P(X + Y = k) = \\ &= \sum_{i=0}^k P(X = i, Y = k - i) \stackrel{\text{(nezávislost)}}{=} \sum_{i=0}^k P(X = i) \cdot P(Y = k - i) = \\ &= \sum_{i=0}^k \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!} e^{-\mu} = e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{i=0}^k \frac{1}{k!} \cdot \underbrace{\frac{k!}{i!(k-i)!}}_{\binom{k}{i}} \cdot \lambda^i \cdot \mu^{k-i} = \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \lambda^i \cdot \mu^{k-i} \stackrel{\text{(binom. věta)}}{=} \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} (\lambda + \mu)^k \end{aligned}$$

tj. $Z \sim \text{Poiss}(\lambda + \mu)$ neboli $Z \sim \text{Poiss}(45)$.

Poznámka: Představme si, že jednotlivým prodejnám přiřadíme (čistě účelově) nějaké velikosti a a b (např. velikost plochy prodejny v m^2) tak, aby průměrný počet zákazníků na jednotku plochy byl v obou prodejnách stejný, tj. $\frac{\lambda}{a} = \frac{\mu}{b}$. Veličiny X a Y pak můžeme chápat jako počty událostí v intervalech délky a a b , přičemž v obou intervalech je "hustota událostí" stejná. Při tomto přístupu bude veličina Z představovat počet událostí v intervalu délky $a + b$, takže Poissonovo rozdělení se pak dá skutečně očekávat.

Připomenutí: Kovariance pro X a Y je definována jako

$$\text{cov}(X, Y) := E\left((X - EX) \cdot (Y - EY)\right) = \dots = E(XY) - E(X) \cdot E(Y) .$$

Speciálně je $\text{cov}(X, X) = \text{var}(X)$.

Kovariance $\text{cov}(\cdot, \cdot)$ má tyto vlastnosti (X, Y, Z jsou veličiny, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ jsou konstanty):

- je lineární v každé složce zvlášť (tj. je bilineární), tedy:

$$\text{cov}(aX + bY, Z) = a \cdot \text{cov}(X, Z) + b \cdot \text{cov}(Y, Z)$$

$$\text{cov}(Z, aX + bY) = a \cdot \text{cov}(Z, X) + b \cdot \text{cov}(Z, Y)$$

- symetrická, tj. $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$
- pozitivně semi-definitní, tj. $\text{cov}(X, X) \geq 0$, kde navíc platí, že:
 $\text{cov}(X, X) = 0 \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}$, že $P(X = \alpha) = 1$ (neboli: X odpovídá konstantní veličině)
- $\text{cov}(X + c, Y + d) = \text{cov}(X, Y)$.

Platí : X a Y jsou nezávislé veličiny $\implies \text{cov}(X, Y) = 0$.

(POZOR: Opačná implikace obecně neplatí!!)

Příklad 8.2 Necht' $X \sim \text{Ro}(0, 2)$ a $Y = X^2 + 1$.

(a) Sestrojte distribuční funkci náhodné veličiny Y .

(b) Spočítejte $\text{cov}(X, Y)$.

(c) Rozhodněte, zda jsou X a Y nezávislé a proč.

Řešení:

(a) Distribuční funkce F_Y se dá získat pomocí distribuční funkce F_X . Před výpočtem si ještě uvědomme, že $X \geq 0$ (protože její obor hodnot je $\langle 0, 2 \rangle$). Speciálně tedy $|X| = X$. Pro distribuční funkci náhodné veličiny Y máme

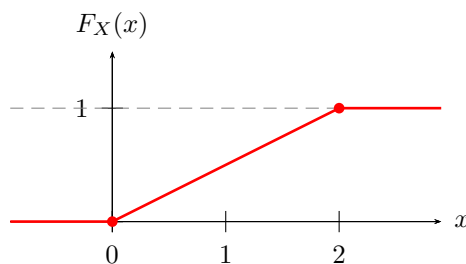
$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(X^2 + 1 \leq y) = \\ &= P(X^2 \leq y - 1) = \begin{cases} P(\emptyset) = 0 & , y - 1 < 0 \\ P(|X| \leq \sqrt{y-1}) = F_X(\sqrt{y-1}) & , y - 1 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Ted' už si stačí jen vyjádřit F_X a dosadit.

Pro veličinu $X \sim \text{Ro}(0, 2)$ je její hustota $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$ a distribuční funkce je pak

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x/2, & 0 \leq x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

s grafem



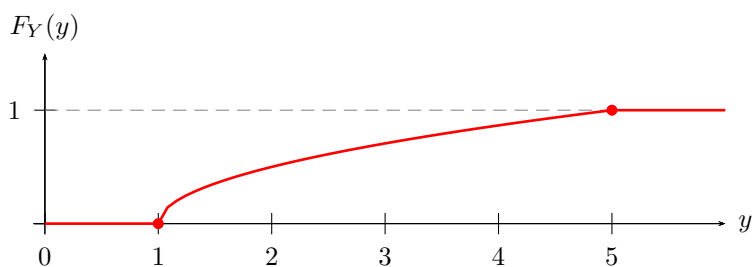
Do F_X (správně!) dosadíme $x = \sqrt{y-1}$ (pro $y - 1 \geq 0$) a přepíšeme podmínky pro y :

$$0 \leq \sqrt{y-1} \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq y-1 \leq 4 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq 5$$

(zbylé podmínky jsou podobné) a dostaneme tak

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 1 \\ \frac{\sqrt{y-1}}{2}, & 1 \leq y \leq 5 \\ 1, & y > 5 \end{cases}$$

s grafem



(b) Kovarianci vypočteme ze vztahu

$$\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(X, X^2 + 1) = \text{cov}(X, X^2) = E(X \cdot X^2) - E(X) \cdot E(X^2)$$

Stačí si tedy pro $n \geq 1$ zjistit

$$E(X^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \cdot f_X(x) dx = \int_0^2 \frac{x^n}{2} dx = \left[\frac{x^{n+1}}{2(n+1)} \right]_0^2 = \frac{2^n}{n+1}$$

a dosazením dostaneme

$$\text{cov}(X, Y) = 2 - 1 \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}.$$

(c) Protože $\text{cov}(X, Y) \neq 0$, jsou veličiny X a Y závislé. Toto zjištění ovšem můžeme udělat i bez výpočtu kovariance:

Veličiny X a Y jsou funkčně propojené, takže stačí najít podmínky, které naráz nemůžou splnit, ale jednotlivě, s nenulovými pravděpodobnostmi, ano. Z předchozích úprav už víme, že pro $1 < y < 5$ platí

$$Y \leq y \Leftrightarrow X^2 + 1 \leq y \Leftrightarrow X \leq \sqrt{y-1}$$

a pravděpodobnosti těchto jevů jsou (z tvaru F_X a F_Y) ostře mezi 0 a 1. Takže např. z volby $y = 2$ dostaneme, že

$$Y \leq 2 \Leftrightarrow X \leq 1$$

takže

$$P(\underbrace{Y \leq 2, X > 1}_{\emptyset}) = 0 \neq \underbrace{P(Y \leq 2)}_{F_Y(2)=0.5} \cdot \underbrace{P(X > 1)}_{1-F_X(1)=0.5}$$

z čehož plyne, že veličiny X a Y jsou závislé.

Poznámka: Jak se dá očekávat, pokud jedna veličina závisí svými hodnotami na druhé, nejspíš nezávislé nebudou. Výjimkou je jen jeden případ a celá situaci se dá popsat takto:

Věta: Nechť X a $h(X)$ jsou obě náhodné veličiny, kde $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je borelovská funkce (např. spojitá). Pak X a $h(X)$ jsou nezávislé veličiny právě jen pokud

- $h(X)$ je konstantní veličina (přesněji: ex. $c \in \mathbb{R}$, že $P(h(X) = c) = 1$).

Příklad:

- (1) Pro představu, kdy může třeba nastat případ nezávislosti v předchozí větě, si vezmeme $X \sim \text{Ro}(1, 2)$ a funkci $h(x) = \max\{x, 3\}$. Vidíme, že ani veličina X ani funkce h nejsou konstantní, ale jejich složení $Y = h(X) = \max\{X, 3\} = 3$ už konstanta je. No a veličiny X a $Y = 3$ už samozřejmě nezávislé jsou.

- (2) Ukažme si příklad dvou veličin tvaru X a $Y = h(X)$, které budou závislé a přitom bude platit $\text{cov}(X, Y) = 0$.

Stačí zvolit $X \sim \text{Ro}(-1, 1)$ a $Y = X^2$. Podle věty výše X a Y budou závislé, protože Y není konstanta.

(Proč Y není (skoro všude) konstantní: protože X má spojité rozdělení, tak je $P(X = a) = 0$ pro každé $a \in \mathbb{R}$. Odsud ihned máme, že pro $b \in \mathbb{R}$ je $P(Y = b) = P(X^2 = b) = 0$. Tedy Y nemůže splňovat $P(Y = c) = 1$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$ a tudíž nemůže být konstanta.)

Současně s tím vidíme, že $E(X) = \frac{-1+1}{2} = 0$ a dále, že

$$E(X \cdot Y) = E(X \cdot X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} t^3 \cdot f_X(t) dt = \int_{-1}^1 \underbrace{t^3 \cdot \frac{1}{2}}_{\text{lichá funkce}} dt = 0$$

A dále, střední hodnota $E(Y) = E(X^2)$ existuje, i když už nulová nebude.

Tím tedy dostaneme

$$\text{cov}(X, Y) = \underbrace{E(XY)}_{=0} - \underbrace{E(X)}_{=0} \cdot E(Y) = 0.$$

Definice: Náhodný vektor (X, Y) má *diskrétní rozdělení* \Leftrightarrow existuje $A \subseteq \mathbb{R}^2$, která je konečná nebo spočetná a taková, že $P((X, Y) \in A) = 1$. (Tedy vektor má nejvýše spočetně mnoho “zajímavých” hodnot.)

V tomto případě pak pro *sduženou distribuční funkci* máme

$$F_{(X,Y)}(a, b) = P(X \leq a, Y \leq b) = \sum_{\substack{u \leq a \\ t \leq b}} P(X = u, Y = t).$$

Věta: Nechť náhodný vektor (X, Y) má *diskrétní* rozdělení. Pak:

X a Y jsou nezávislé $\Leftrightarrow P(X = i, Y = j) = P(X = i) \cdot P(Y = j)$ pro všechna $i, j \in \mathbb{R}$.

(Srovnejte to s obecně NEdiskrétním případem, kdy je nezávislost popsána jen nerovnostmi:

$$P(X \leq i, Y \leq j) = P(X \leq i) \cdot P(Y \leq j) \text{ pro všechna } i, j \in \mathbb{R}.)$$

Příklad 8.3 *Diskrétní náhodný vektor (X, Y) má sdužené pravděpodobnosti dány tabulkou:*

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$
$X = -1$	1/8	0	1/8
$X = 0$	0	1/4	1/4
$X = 1$	1/8	1/8	0

- Určete pravděpodobnost $P(X + Y > 1)$.
- Určete rozdělení veličiny $Z = X^2 \cdot Y$.
- Určete marginální rozdělení vektoru (X, Y) .
- Jsou veličiny X a Y nezávislé? Pokud X a Y jsou závislé, popište (jednoznačně určené) rozdělení náhodného vektoru (X', Y') se stejnými marginálními rozděleními jako (X, Y) , jehož složky jsou nezávislé.

Řešení:

Na začátku bychom si měli pro pořádek ještě ověřit, že součet všech pravděpodobností v tabulce je = 1 (pokud by byl např. < 1, pak nemáme úplnou informaci o rozdělení a nemůžeme dál pokračovat).

(a) U veličin X a Y předpokládáme obory hodnot určené tabulkou. Pak máme

$$X + Y > 1 \Leftrightarrow (X, Y) \in \{(0, 2), (1, 1), (1, 2)\}$$

a tedy

$$P(X + Y > 1) = P((X, Y) \in \{(0, 2), (1, 1), (1, 2)\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + 0 = \frac{3}{8}.$$

(b) Hodnoty z veličiny $Z = X^2 \cdot Y$ si pro přehlednost zapíšeme také do tabulky

$z(x, y) = x^2 \cdot y$	$y = 0$	$y = 1$	$y = 2$
$x = -1$	0	1	2
$x = 0$	0	0	0
$x = 1$	0	1	2

a pravděpodobnosti hodnot veličiny Z vzniknou nasčítáním pravděpodobností pro jednotlivé případy

$$P(Z = z) = P(X^2 \cdot Y = z) = \sum_{\substack{x^2 \cdot y = z \\ x, y \in \mathbb{R}}} P(X = x, Y = y) = \begin{cases} \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} & , z = 0 \\ 0 + \frac{1}{8} = \frac{1}{8} & , z = 1 \\ \frac{1}{8} + 0 = \frac{1}{8} & , z = 2 \\ 0 & , \text{jinak.} \end{cases}$$

(c) Marginální (česky: okrajová) rozdělení náhodného vektoru (X, Y) jsou rozdělení jeho jednotlivých složek, tedy veličin X a Y . Vektor (X, Y) má diskrétní rozdělení a obě veličiny X a Y budou proto mít také diskrétní rozdělení a pro jejich rozdělení platí:

$$P(X = i) = P(X = i, Y \in \mathbb{R}) = \sum_{j \in \mathbb{R}} P(X = i, Y = j)$$

$$P(Y = j) = P(X \in \mathbb{R}, Y = j) = \sum_{i \in \mathbb{R}} P(X = i, Y = j)$$

Hodnoty pravděpodobností získáme tedy sečtením v řádcích (pro X) a sloupcích (pro Y) naší tabulky:

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$	$P(X = i)$
$X = -1$	1/8	0	1/8	1/4
$X = 0$	0	1/4	1/4	1/2
$X = 1$	1/8	1/8	0	1/4
$P(Y = j)$	1/4	3/8	3/8	

Protože nyní je např.

$$P(X = -1, Y = 1) = 0 \neq \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8} = P(X = -1) \cdot P(Y = 1)$$

jsou X a Y **závislé**. (Nejjednodušší k tomu účelu je najít si v tabulce právě nulovou hodnotu.)

(d) Necht' (X', Y') je nyní náhodný vektor s **nezávislými** složkami, které mají stejná marginální rozdělení jako má vektor (X, Y) tedy

$$P(X' = i) = P(X = i) \quad \text{a} \quad P(Y' = j) = P(Y = j) \quad \text{pro všechna } i, j \in \mathbb{R}.$$

Pro sdružené pravděpodobnosti vektoru (X', Y') pak tedy platí, že

$$P(X' = i, Y' = j) = P(X' = i) \cdot P(Y' = j) = P(X = i) \cdot P(Y = j)$$

a můžeme je tak popsat následující tabulkou:

	$Y' = 0$	$Y' = 1$	$Y' = 2$	$P(X' = i)$
$X' = -1$	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$	$\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{32}$	$\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{32}$	1/4
$X' = 0$	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$	$\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{16}$	$\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{16}$	1/2
$X' = 1$	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$	$\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{32}$	$\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{32}$	1/2
$P(Y' = j)$	1/4	3/8	3/8	

Poznámky ke kovarianci a korelaci: Náhodné veličiny (jako funkce na pravděpodobnostním prostoru Ω) tvoří přirozeně (reálný) vektorový prostor (kde ještě navíc dvě veličiny budeme pokládat za totožné, pokud se rovnají s pravděpodobností 1). Na vektorovém *pod*prostoru veličin s konečnou střední hodnotou a konečným rozptylem pak můžeme přirozeným způsobem zavést skalární součin jako

$$\langle X | Y \rangle := E(X \cdot Y)$$

Díky němu můžeme přirozeně zavést *normu* $\|X\|$ (neboli "délku" vektoru X) jako

$$\|X\| := \sqrt{\langle X | X \rangle} = \sqrt{E(X^2)}.$$

Mimo jiné si všimněme, že pro X je $\text{var}(X) = \|X - E(X)\|^2$, takže platí

$$\|norm(X)\| = \left\| \frac{X - EX}{\sqrt{\text{var}(X)}} \right\| = \frac{\|X - EX\|}{\sqrt{\text{var}(X)}} = 1$$

neboli $norm(X)$ má délku skutečně znormovanou na hodnotu 1.

Skalární součin nám dále umožňuje měřit také úhel mezi dvěma vektory. Pro veličiny X a Y je užitečné znát, jestli jejich výchyly vůči středním hodnotám (tj. veličiny $X - EX$ a $Y - EY$) mají podobné chování (tj. jestli korelují). Zavádíme proto korelaci mezi veličinami X a Y jako kosinus úhlu α mezi vektory $X - EX$ a $Y - EY$, tedy

$$\text{corr}(X, Y) := \frac{\langle X - EX | Y - EY \rangle}{\|X - EX\| \cdot \|Y - EY\|} = \dots = \frac{E(XY) - E(X) \cdot E(Y)}{\sqrt{\text{var}(X) \cdot \text{var}(Y)}}.$$

(Veličiny $X - EX$ a $Y - EY$ mají nulovou střední hodnotu).

A kromě toho máme:

$$\text{cov}(X, Y) := \langle X - EX | Y - EY \rangle = \dots = E(XY) - E(X) \cdot E(Y).$$

Praktický důsledek korelace:

Pokud máme dvě veličiny X a Y takové, že

$$X - EX \geq 0 \Leftrightarrow Y - EY \geq 0 \quad \left(\text{což implikuje, že } (X - EX)(Y - EY) \geq 0 \right)$$

pak je $\text{corr}(X, Y) \geq 0$.

Obdobně platí: Jestliže

$$X - E(X) \geq 0 \Leftrightarrow Y - E(Y) \leq 0$$

pak je $\text{corr}(X, Y) \leq 0$.

Ačkoliv zpětné implikace v obou případech neplatí, přesto nám korelace umožňuje nějakým způsobem zachytit jistou míru kauzální závislosti dvou veličin.

Poznámka: Uvědomme si, že existuje několik stupňů “nezávislosti” veličin:

X a Y jsou nezávislé $\xrightarrow{\text{(pokud cov ex.)}}$ $\text{cov}(X, Y) = 0$ $\xrightarrow{\text{(pokud } X, Y \text{ nejsou konst.)}}$ X a Y jsou lineár. nezáv.
(tj. $X - E(X)$ a $Y - E(Y)$ jsou kolmé)

Konstantní veličina X spolu s jakoukoliv jinou veličinou Y vždy tvoří vzájemně nezávislé veličiny X a Y (tento případ je ale celkem nezájímavý).

Příklad 8.4 *Sdružené pravděpodobnosti náhodných veličin X a Y jsou dány následující tabulkou:*

	$X = 0$	$X = 1$	$X = 2$
$Y = 0$	1/4	1/8	0
$Y = 1$	1/4	1/4	1/8

- (a) Jaká jsou jejich marginální rozdělení?
- (b) Určete střední hodnotu $E(X \cdot Y)$. Určete varianční a korelační matici.
- (c) Jsou veličiny X a Y nezávislé? Zdůvodněte.

Řešení:

- (a) Marginální (diskrétní) rozdělení (tj. rozdělení jednotlivých složek vektoru) získáme pro jednotlivé hodnoty sečtením pravděpodobností v řádcích (pro Y) a sloupcích (pro X) naší tabulky:

	$X = 0$	$X = 1$	$X = 2$	$P(Y = j)$
$Y = 0$	1/4	1/8	0	3/8
$Y = 1$	1/4	1/4	1/8	5/8
$P(X = i)$	1/2	3/8	1/8	

Tedy

$$P(X = i) = \begin{cases} 1/2, & i = 0 \\ 3/8, & i = 1 \\ 1/8, & i = 2 \\ 0, & \text{jinak} \end{cases} \quad \text{a} \quad P(Y = j) = \begin{cases} 3/8, & j = 0 \\ 5/8, & j = 1 \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

- (b) Pro diskrétní vektor (X, Y) a borelovskou (tj. téměř každou, např. spojitou) funkci $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ platí podobná věc jako jsme měli už u náhodné veličiny a sice:

$$E(h(X, Y)) = \sum_{(i, j) \in \mathbb{R}^2} h(i, j) \cdot P(X = i, Y = j).$$

Odsud tedy snadno spočítáme střední hodnotu $E(XY)$:

$$\begin{aligned} E(X \cdot Y) &= \sum_{(i, j) \in \mathbb{R}^2} i \cdot j \cdot P(X = i, Y = j) = \\ &= 0 \cdot 0 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot 1 \cdot \frac{1}{8} + 0 \cdot 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Kovarianci pak vypočteme ze vztahu

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$$

K tomu potřebujeme znát také

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{8} \\ E(Y) &= 0 \cdot \frac{3}{8} + 1 \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

Takže

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y) = \frac{1}{2} - \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{7}{64}.$$

Pro korelaci

$$\text{corr}(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var}(X)} \sqrt{\text{var}(Y)}}$$

potřebujeme ještě znát rozptyly, takže si je dopočítáme:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 0^2 \cdot \frac{1}{2} + 1^2 \cdot \frac{3}{8} + 2^2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{7}{8}, \\ E(Y^2) &= 0^2 \cdot \frac{3}{8} + 1^2 \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{8}, \\ \text{var}(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{7}{8} - \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{31}{64}, \\ \text{var}(Y) &= E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{5}{8} - \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{15}{64}. \end{aligned}$$

Všimněme si ještě, že $Y \sim \text{Alt}(\frac{5}{8})$, takže rozptyl jsme mohli spočítat jako $\text{var}(Y) = \frac{5}{8} \cdot (1 - \frac{5}{8}) = \frac{15}{64}$. Korelace tedy je

$$\text{corr}(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var}(X)} \cdot \sqrt{\text{var}(Y)}} = \frac{\frac{7}{64}}{\sqrt{\frac{31}{64}} \cdot \sqrt{\frac{15}{64}}} = \frac{7}{\sqrt{465}} \doteq 0.32462,$$

Varianční matice je tudíž

$$\text{Var}(X, Y) = \begin{pmatrix} \text{cov}(X, X) & \text{cov}(X, Y) \\ \text{cov}(Y, X) & \text{cov}(Y, Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{var}(X) & \text{cov}(X, Y) \\ \text{cov}(X, Y) & \text{var}(Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{31}{64} & \frac{7}{64} \\ \frac{7}{64} & \frac{15}{64} \end{pmatrix}$$

a korelační matice je

$$\text{Corr}(X, Y) = \begin{pmatrix} \text{corr}(X, X) & \text{corr}(X, Y) \\ \text{corr}(Y, X) & \text{corr}(Y, Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \text{corr}(X, Y) \\ \text{corr}(X, Y) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{\sqrt{465}} \\ \frac{7}{\sqrt{465}} & 1 \end{pmatrix}.$$

Pro zajímavost si ještě můžeme zjistit úhel $\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$ mezi našimi náhodnými veličinami $X - EX$ a $Y - EY$:

$$\alpha = \arccos(\text{corr}(X, Y)) \doteq \arccos(0.32462) \doteq 71.06^\circ.$$

(c) Jestliže náhodný vektor (X, Y) má diskrétní rozdělení, pak:

veličiny X a Y jsou nezávislé $\Leftrightarrow P(X = i, Y = j) = P(X = i) \cdot P(Y = j)$ pro všechna $i, j \in \mathbb{R}$

Naše náhodné veličiny tudíž NEJSOU nezávislé, protože např.

$$P(X = 2, Y = 0) = 0 \neq \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{8} = P(X = 2) \cdot P(Y = 0).$$

Jiným důvodem je také fakt, že $\text{cov}(X, Y) \neq 0$. Zdůrazněme ale, že pokud je kovariance nulová, nemůžeme (pouze na základě její znalosti) o nezávislosti obecně nic říct!

Definice: Náhodný vektor (X, Y) má spojitě rozdělení se *sduženou hustotou pravděpodobnosti* $f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \langle 0, +\infty \rangle \Leftrightarrow f_{X,Y}$ je integrabilní funkce a pro každou "rozumnou" množinu $A \subseteq \mathbb{R}^2$ (tj. takovou, která se dá získat z intervalu v \mathbb{R}^2 pomocí sjednocování, průniku a doplňku) platí, že

$$P((X, Y) \in A) = \iint_A f_{X,Y}(x, y) \, dx dy.$$

To nastává právě když

$$F_{X,Y}(a, b) = \int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^b f_{X,Y}(x, y) \, dx dy$$

pro každé $a, b \in \mathbb{R}$.

Sdužená hustota $f_{X,Y}$ opět (jako u veličin) NENÍ zdaleka určena jednoznačně, co se týče její funkční hodnoty, ale pouze hodnotami integrálů z této funkce (např. její změnou v konečně mnoha bodech nebo na nějaké hladké křivce se nezmění příslušné integrály, takže i změněná funkce bude také hustotou). Přesněji, dvě nezáporné funkce $f_{X,Y}$ a $g_{X,Y}$ (s integrálem rovným jedné) jsou hustotami pro tutéž sduženou distribuční funkci $F_{X,Y}$ právě když se rovnají *skoro všude* a zapisuje se to jako

$$f_{X,Y} = g_{X,Y} \quad (\text{s.v.}).$$

(tj. mohou se lišit jen na takové množině $A \subseteq \mathbb{R}^2$, že $\iint_A 1 \, dx dy = 0$, tj. pokud A má nulový plošný obsah).

Příklad 8.5 *Sdužená hustota náhodných veličin X a Y je*

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x-\frac{y}{2}}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

- Jaká jsou jejich marginální rozdělení?
- Jsou veličiny X a Y nezávislé? Zdůvodněte.
- Jak vypadá jejich korelační matice?
- Určete pravděpodobnost $P(X > Y)$.

Řešení:

(a) Marginální hustoty (tj. hustoty jednotlivých veličin X a Y) jsou

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy = \begin{cases} \int_0^{\infty} \frac{1}{2} e^{-x-\frac{y}{2}} dy = e^{-x} \cdot [-e^{-\frac{y}{2}}]_0^{\infty} = e^{-x} & \text{pro } x > 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} 0 dy = 0 & \text{pro } x \leq 0. \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx = \begin{cases} \int_0^{\infty} \frac{1}{2} e^{-x-\frac{y}{2}} dx = \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}} \cdot [-e^{-x}]_0^{\infty} = \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}} & \text{pro } y > 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} 0 dx = 0 & \text{pro } y \leq 0. \end{cases}$$

Vidíme tedy, že obě rozdělení jsou exponenciální, konkrétně $X \sim \text{Exp}(1)$ a $Y \sim \text{Exp}(\frac{1}{2})$.

(b) Složky X a Y jsou nezávislé právě tehdy, když

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \quad \text{pro skoro všechna } (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

což znamená, že množina bodů, kde uvedená rovnost neplatí má nulový plošný obsah.

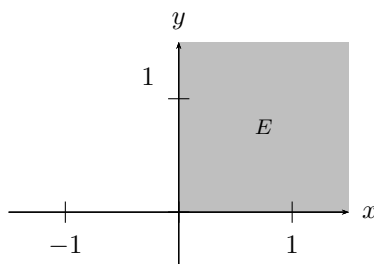
(Podmínce “skoro všude” se nelze vyhnout z toho důvodu, že hustoty nejsou jednoznačně definovány svými hodnotami, ale svými integrály.)

Jak je hned vidět, v našem případě je rovnost splněna dokonce všude, takže X a Y JSOU nezávislé.

(c) Z nezávislosti X, Y plyne okamžitě $\text{cov}(X, Y) = 0$, tedy také $\text{corr}(X, Y) = 0$ a korelační matice je tak

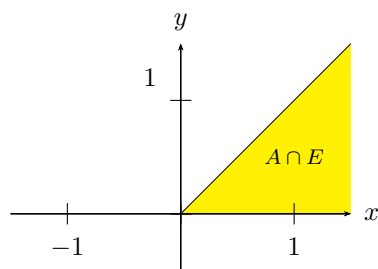
$$\text{Corr}(X, Y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) Sdružená hustota $f_{(X,Y)}$ je nenulová na množině $E := (0, +\infty)^2$ (vyznačena šedě):



Jev “ $X > Y$ ” je popsán jako $(X, Y) \in \underbrace{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\}}_A$. Pravděpodobnost tohoto jevu tak dostaneme zintegrováním hustoty přes množinu A , neboli

$$P(X > Y) = P((X, Y) \in A) = \iint_A f_{X,Y}(x,y) dx dy = \iint_{A \cap E} f_{X,Y}(x,y) dx dy =$$



$$\begin{aligned}
 &= \{A \cap E : 0 < y < x\} = \int_0^{\infty} \int_0^x \frac{1}{2} e^{-x-\frac{y}{2}} dy dx = \int_0^{\infty} e^{-x} \left[-e^{-\frac{y}{2}} \right]_{y=0}^{y=x} dx = \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-x} (1 - e^{-\frac{x}{2}}) dx = \int_0^{\infty} e^{-x} - e^{-\frac{3}{2}x} dx = \left[-e^{-x} + \frac{2}{3} e^{-\frac{3}{2}x} \right]_{x=0}^{x=\infty} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$