

## 12. cvičení z STP

2. - 6. května 2022

Mějme náhodnou veličinu  $X$  se spojitou distribuční funkcí  $F_X$ , která je ostře rostoucí na otevřeném intervalu  $I \subseteq \mathbb{R}$  takovém, že  $F_X(I) = (0, 1)$  (tj.  $F_X$  je bijekcí intervalu  $I$  a intervalu  $(0, 1)$ ).

Pro pravděpodobnost  $\alpha \in (0, 1)$  budeme potřebovat najít  $t \in \mathbb{R}$ , že  $P(X \leq t) = \alpha$ , tj.  $F_X(t) = \alpha$ .

*Kvantilová funkce veličiny  $X$*  je v tomto případě inverzní funkce  $q_X := (F_X)^{-1} : (0, 1) \rightarrow I$ . Pro všechna  $\alpha \in (0, 1)$  a  $t \in I$  pak platí:

$$P(X \leq t) = \alpha \Leftrightarrow q_X(\alpha) = t$$

Odsud pak ihned plyne, např. že

- $P(X \leq q_X(\alpha)) = \alpha$
- $P(q_X(\alpha) \leq X) = 1 - \alpha$  a  $P(q_X(1 - \alpha) \leq X) = \alpha$
- $P(q_X(\frac{\alpha}{2}) \leq X \leq q_X(1 - \frac{\alpha}{2})) = 1 - \alpha$  a přitom je  $P(X < q_X(\frac{\alpha}{2})) = \frac{\alpha}{2} = P(q_X(1 - \frac{\alpha}{2}) < X)$

Pokud navíc  $I = \mathbb{R}$  a  $X$  má hustotu, která je jako funkce sudá, pak platí:

- \*  $F_X(t) + F_X(-t) = 1$  pro každé  $t \in \mathbb{R}$ ,
- \*  $q_X(\alpha) = -q_X(1 - \alpha)$  pro každé  $\alpha \in (0, 1)$ .

Pro hodnotu  $q_X(\alpha)$  budeme ve speciálních případech používat toto značení:

- $u_\alpha$  pro  $X \sim N(0, 1)$ ,
- $t_{\alpha; k}$  pro  $X$  s  $t$ -rozdělením s  $k$  stupni volnosti,
- $\chi_{\alpha; k}^2$  pro  $X$  s  $\chi^2$ -rozdělením s  $k$  stupni volnosti.

**Poznámka:** Na následujícím příkladu si ukážeme, v čem spočívá hledání intervalu spolehlivosti pro nějaký parametr. Odvodíme si oboustranný symetrický interval o spolehlivosti  $1 - \alpha$  pro střední hodnotu  $\mu$  normálního rozdělení  $N(\mu, \sigma^2)$  při *neznámém* rozptylu  $\sigma^2$  (při známém rozptylu by výsledek vypadal jinak a jednodušeji):

Mějme realizaci náhodného výběru  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  o rozsahu  $n$  (pro nezávislé náhodné veličiny  $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ ). Hledáme teď nějaké funkce  $h_1, h_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (nezávislé na volbě  $\mu$  i  $\sigma$ ) takové, že

$$P(h_1(X_1, \dots, X_n) \leq \mu \leq h_2(X_1, \dots, X_n)) = 1 - \alpha$$

(to je ta oboustrannost a  $1 - \alpha$  spolehlivost) a současně chceme, aby pro zbylé případy ještě platilo, že

$$P(\mu < h_1(X_1, \dots, X_n)) = \frac{\alpha}{2} = P(h_2(X_1, \dots, X_n) < \mu)$$

(to je ta symetričnost - tj. symetričnost nikoliv ve "vzdálenosti", ale v pravděpodobnosti).

Při dané realizaci  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  pak jako hledaný **interval spolehlivosti  $1 - \alpha$  pro  $\mu$**  chápeme (číselný interval tvaru:

$$\langle h_1(x_1, \dots, x_n), h_2(x_1, \dots, x_n) \rangle (\subseteq \mathbb{R})$$

Je ještě dobré poznamenat, že

- pro parametr  $\mu$  žádné rozdělení pravděpodobnosti nemáme!
- daný interval spolehlivosti pro  $\mu$  vzniká čistě na základě naměřených hodnot  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  a také se společně s nimi MĚNÍ! Jeho smysl je ten, že skutečná hodnota  $\mu = E(X)$  (která se NEMĚNÍ!) bude obsažena v těchto (obecně proměnných intervalech) s pravděpodobností  $1 - \alpha$ .

Ovšem problémem zůstává, že při neznalosti skutečné hodnoty  $\mu$  nejsme schopni zjistit, které konkrétní naměřené intervaly  $\mu$  obsahují a které naopak ne. Víme jen, že těch druhých je jen 5%. V tom je rozdíl oproti např. střelení do terče, kdy před pokusem víme, že se trefíme s pravděpodobností  $q$  a po uskutečněném pokusu umíme zjistit, který z výsledků nastal, takže si tuto pravděpodobnost můžeme i ověřit.

- Pro konkrétní pokus se pak na vyčíslený interval můžeme dívat i takto: Dejme tomu, že pro parametr  $\mu$  a  $1 - \alpha = 95\%$  nám vyjde (při daných měřeních) interval jako  $\langle 59.93, 62.07 \rangle$ . Pak 95% vyjadřuje poměr, se kterým se budeme ochotni vsadit, že skutečná hodnota  $\mu$  (kterou může mít třeba někdo někde přesně zjištěnou), bude obsažena v intervalu  $\langle 59.93, 62.07 \rangle$ .

A teď pro náš konkrétní případ: Vezmeme si vhodnou veličinu, jejíž rozdělení známe. V našem případě veličinu

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S_X} \sqrt{n},$$

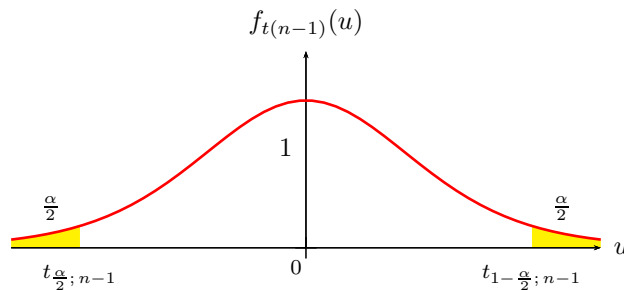
kde

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

a

$$(S_X)^2 = \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right) = \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot (\bar{X})^2 \right).$$

Velčina  $T$  má tzv.  $t$ -rozdělení, tj. Studentovo rozdělení, s  $n - 1$  stupni volnosti. Hustota  $f_{t(n-1)}$  veličiny  $T$  je:



Pak pro kvantily platí, že

$$P\left( \underbrace{t_{\frac{\alpha}{2}; n-1}}_{-t_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1}} \leq T \leq t_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1} \right) = 1 - \alpha$$

a

$$P\left( T < -t_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1} \right) = \frac{\alpha}{2} = P\left( t_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1} < T \right).$$

Výrazy uvnitř pravděpodobnosti si teď jen přepíšeme a budeme mít hledané funkce  $h_1$  a  $h_2$ :

$$-t_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{S_X} \sqrt{n} \leq t_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1}$$

$$\underbrace{\bar{X} - \frac{S_X}{\sqrt{n}} \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1}}_{h_1(X_1, \dots, X_n)} \leq \mu \leq \underbrace{\bar{X} + \frac{S_X}{\sqrt{n}} \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1}}_{h_2(X_1, \dots, X_n)}$$

Po dosazení konkrétní realizace  $\mathbf{x}$  vektoru  $\mathbf{X}$  pak dostaneme výše uvedený interval spolehlivosti pro  $\mu$  ve tvaru

$$\langle \mu_L, \mu_U \rangle = \left\langle \bar{x} - \frac{s_{\mathbf{x}}}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1}, \quad \bar{x} + \frac{s_{\mathbf{x}}}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1} \right\rangle$$

Pro názornost uveďme funkce  $h_1$  a  $h_2$  více rozepsané:

$$h_1(z_1, \dots, z_n) := \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n z_i \right) - \frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n z_i^2 - n \cdot \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i \right)^2 \right)$$

$$h_2(z_1, \dots, z_n) := \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n z_i \right) + \frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n z_i^2 - n \cdot \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i \right)^2 \right)$$

**Příklad 12.1** (oboustranný intervalový odhad pro střední hodnotu)

*Opakovaná měření stejné koncentrace látky (tj. náhodné veličiny  $X$ ) vedla k následujícím výsledkům:*

$$\mathbf{x} = (0.2, 0.23, 0.21, 0.16, 0.18, 0.19, 0.14, 0.18, 0.21).$$

*Najděte oboustranný symetrický 90% interval spolehlivosti pro střední hodnotu  $\mu$ .*

### Řešení:

Pro veličinu  $X$  budeme předpokládat normální rozdělení  $N(\mu, \sigma^2)$  (to jednak přibližně platí a především pouze za tohoto předpokladu můžeme používat známé vzorce). Dále budeme předpokládat, že měření byla nezávislá.

Intervalový odhad střední hodnoty  $\mu$  (pro spolehlivost  $0.9 = 1 - \alpha$ ) je:

$$\langle \mu_L, \mu_U \rangle = \left\langle \bar{x} - \frac{s_{\mathbf{x}}}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1}, \quad \bar{x} + \frac{s_{\mathbf{x}}}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1} \right\rangle.$$

Pro jeho vyčíslení potřebujeme znát realizaci výběrového průměru  $\bar{x}$  a výběrového rozptylu  $s_{\mathbf{x}}^2$  z realizace  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  rozsahu  $n = 9$ :

- realizace výběrového průměru:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{0.2 + 0.23 + \dots + 0.21}{9} = \frac{1.7}{9} \doteq \mathbf{0.189}$$

- realizace výběrového rozptylu

$$\begin{aligned} s_{\mathbf{x}}^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \frac{n}{n-1} \bar{x}^2 = \\ &= \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \frac{1}{n(n-1)} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = \\ &= \underbrace{\frac{0.2^2 + 0.23^2 + \dots + 0.21^2}{8}}_{= \frac{2.9448}{8} = 0.3681} - \frac{1.7^2}{9 \cdot 8} \doteq \mathbf{7.6 \cdot 10^{-4}}, \end{aligned}$$

- realizace směrodatné odchylky

$$s_x = \sqrt{s_x^2} \doteq 2.76 \cdot 10^{-2}$$

Intervalový odhad střední hodnoty  $\mu$  (pro spolehlivost  $0.9 = 1 - \alpha$ ) nyní je:

$$\begin{aligned} \langle \mu_L, \mu_U \rangle &= \left\langle \bar{x} - \frac{s_x}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1}, \bar{x} + \frac{s_x}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1} \right\rangle \doteq \\ &\doteq \left\langle 0.189 - \frac{2.76 \cdot 10^{-2}}{3} \underbrace{t_{0.95; 8}}_{1.86}, 0.189 + \frac{2.76 \cdot 10^{-2}}{3} t_{0.95; 8} \right\rangle \doteq \\ &\doteq \langle \mathbf{0.172}, \mathbf{0.206} \rangle . \end{aligned}$$

**Příklad 12.2** (jednostranné intervalové odhady pro střední hodnotu)

V terénu jsme naměřili tyto výšky rostlin daného druhu (v centimetrech)

$$(75, 85, 58, 72, 70, 75) .$$

Předpokládejme, že výška rostliny  $X$  má normálního rozdělení  $N(\mu, \sigma^2)$ . Stanovte horní a dolní 95% interval spolehlivosti pro střední hodnotu  $\mu$ .

**Řešení:**

K určení intervalového odhadu opět použijeme statistiku

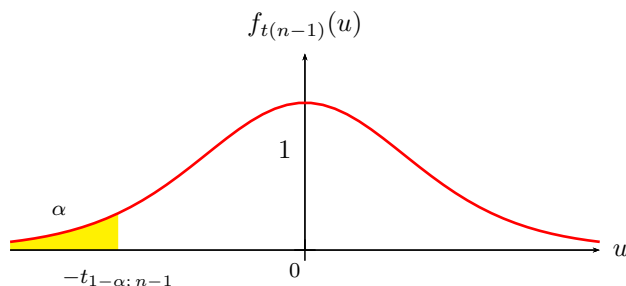
$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S_X} \sqrt{n}$$

která má Studentovo rozdělení  $t(n-1)$ , kde  $n = 6$  je rozsah souboru. Poznamenejme, že zatímco centrální limitní větu používáme pro velká  $n$ , protože obvykle pro  $X$  máme nějaké “obecné” rozdělení, tak v případě, kdy  $X$  má právě normální rozdělení, známe rozdělení veličiny  $T$  také přesně a to pro jakákoliv  $n$  (tj. i malá).

- **Horní** interval spolehlivosti pro  $\mu$  (tj.  $\mu$  bude omezené *seshoro*) dostaneme ze vztahu

$$P\left( \underbrace{t_{\alpha; n-1}}_{-t_{1-\alpha; n-1}} \leq T \right) = 1 - \alpha$$

který vyjadřuje **dolní**  $1 - \alpha = 95\%$  intervalový odhad pro veličinu  $T$  (viz obrázek):



Případ

$$-t_{1-\alpha; n-1} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{S_X} \sqrt{n} .$$

tedy nastává s pravděpodobností  $1 - \alpha = 95\%$ . Po úpravě dostaneme pro horní interval spolehlivosti parametru  $\mu$  tvar:

$$\mu \leq \bar{X} + \frac{S_X}{\sqrt{n}} t_{0.95;5}.$$

Pro jeho vyčíslení potřebujeme znát realizaci výběrového průměru  $\bar{x}$  a výběrového rozptylu  $s_x^2$

$$\bar{x} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 x_i = \frac{435}{6} = 72.5$$

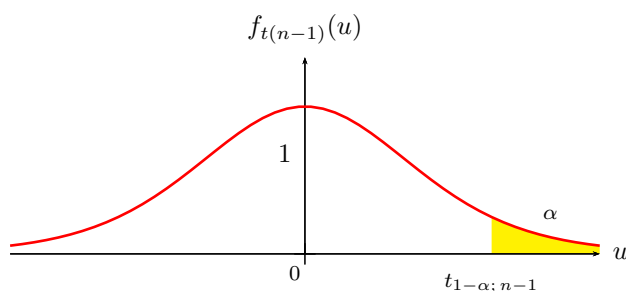
$$s_x^2 = \frac{1}{5} \left( \sum_{i=1}^6 x_i^2 - 6 \cdot (\bar{x})^2 \right) = \frac{385.5}{5} \doteq 77.1, \quad s_x \doteq 8.781.$$

Z tabulek kvantilů Studentova rozdělení dostaneme  $t_{0.95;5} \doteq 2.02$ , a hledaný interval je tedy

$$\begin{aligned} (-\infty, \mu_H) &= \left( -\infty, \bar{x} + \frac{s_x}{\sqrt{n}} \cdot t_{0.95;5} \right) = \left( -\infty, 72.5 + \frac{8.781}{\sqrt{6}} \cdot 2.02 \right) = \\ &= (-\infty, 79.74). \end{aligned}$$

• Podobně dostaneme **dolní** interval spolehlivosti pro  $\mu$  (tj.  $\mu$  bude omezené **zezdola**) ze vztahu pro **horní**  $1 - \alpha = 95\%$  intervalový odhad veličiny  $T$  (viz obrázek)

$$P(T \leq t_{1-\alpha; n-1}) = 1 - \alpha$$



tedy

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S_X} \sqrt{n} \leq t_{1-\alpha; n-1}.$$

a po úpravě

$$\bar{X} - \frac{S_X}{\sqrt{n}} t_{0.95;5} \leq \mu$$

a dosazení máme

$$\begin{aligned} \langle \mu_D, \infty \rangle &= \left\langle \bar{x} - \frac{s_x}{\sqrt{n}} \cdot t_{0.95;5}, \infty \right\rangle = \left\langle 72.5 - \frac{8.781}{\sqrt{6}} \cdot 2.02, \infty \right\rangle = \\ &= \langle 65.26, \infty \rangle. \end{aligned}$$

K testování hypotéz viz "Poznámky". Pozor, kritéria pro zamítnutí nulové hypotézy a jejich ekvivalentní tvary používají často opakované negace různých podmínek (což někdy činí problémy s tím se v dané situaci

zorientovat).

Podstatné je také to, že statistiky (tj. speciálně volené náhodné veličiny), které používáme při testech daného parametru, jsou sestaveny tak, aby jejich rozdělení na tomto (pokud možno) parametru nezáviselo. (Je to určitý typ “normování”).

**Příklad 12.3** (test střední hodnoty normálního rozdělení při **neznámém** rozptylu)

Výrobce tvrdí, že spotřeba jím vyráběného automobilu je  $\mu_0 = 8$  l/100 km. Průměrná spotřeba u  $n = 49$  uživatelů ale byla  $\bar{x} = 8.4$  l/100 km. Naměřen byl dále výběrový rozptyl  $s_x^2 = 2.56$  (l/100 km)<sup>2</sup>.

(a) Testujte na hladině 5%, zda měl výrobce pravdu (tj. zda spotřeba je rovna 8 l/100 km).

(b) Testujte na hladině 5%, zda je spotřeba **nejvýše** rovna 8 l/100 km.

Jak dopadne testování těchto hypotéz na hladině 1%?

**Řešení:**

U veličiny

$$X = \text{“spotřeba automobilu”}$$

budeme předpokládat normální rozdělení  $N(\mu, \sigma^2)$ . Jednotlivá měření  $X_i$ , pro  $i = 1, \dots, 49$ , jsou nezávislá. Oba parametry jsou neznámé a my chceme testovat střední hodnotu  $\mu$ .

(a) Podle zadání máme na hladině  $\alpha = 5\%$  (příp. 1%) otestovat hypotézu o střední hodnotě

$$\mathbf{H}_0 : \mu = \mu_0 (= 8)$$

proti alternativní hypotéze:

$$\mathbf{H}_1 : \mu \neq \mu_0 (= 8) .$$

**Pomocí testovací statistiky:**

Protože hodnotu rozptylu neznáme, provedeme  $t$ -test s testovací veličinou (tzv. *statistikou*):

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S_X} \sqrt{n}$$

kde

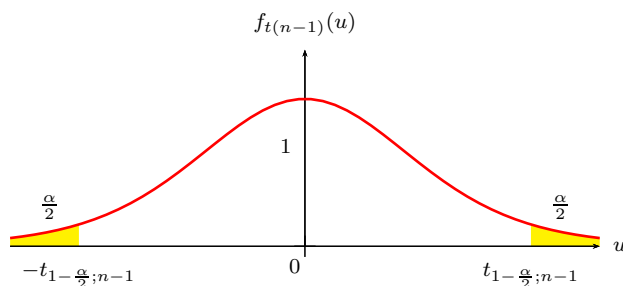
- veličina  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  je *výběrový průměr* a
- veličina  $S_X^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$  je *výběrový rozptyl*.

Kritérium pro **ZAMÍTNUTÍ  $\mathbf{H}_0$**  (na hladině  $\alpha$ ) je tvaru

$$\text{zamítáme } \mathbf{H}_0 \text{ (na hladině } \alpha) \Leftrightarrow |t| > t_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1} .$$

kde  $t$  je hodnota  $T$  na základě naměřených dat.

**Proč má zamítací kritérium uvedený tvar:** Za předpokladu platnosti nulové hypotézy, tj. pokud  $E(X) = \mu_0$ , bude mít statistika  $T$  tzv. **Studentovo  $t$ -rozdělení s  $n - 1$  stupni volnosti a hustotou  $f_{t(n-1)}$**  (která má podobný, ale ne stejný, průběh jako u  $N(0, 1)$ ):



Očekávané hodnoty takovéto statistiky  $T$  by se měly pohybovat blízko nuly. Pokud se příliš odchýlí, bude to důvod k zamítnutí nulové hypotézy. Nebudeme přitom preferovat vychýlení na žádnou ze stran - tj. chybu 1. druhu s pravděpodobností  $\alpha$  rozdělíme na poloviny  $\frac{\alpha}{2}$  na obě strany. Pak máme

$$\begin{aligned} P_{(H_0 \text{ platí})}(\text{nastává chyba 1. druhu}) &= P_{(H_0 \text{ platí})}(\text{zamítáme } \mathbf{H}_0) = \\ &= P_{(H_0 \text{ platí})}(|T| > t_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1}) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha \end{aligned}$$

Teď už tedy dosadíme konkrétní naměřené hodnoty (které pro jednotlivé veličiny značíme pro odlišení malými písmeny, tj.  $\bar{x}$ ,  $s_x^2$  a  $t$ ). Realizace testovací statistiky je

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s_x} \sqrt{n} = \frac{8.4 - 8}{\sqrt{2.56}} \sqrt{49} = \frac{0.4}{1.6} \cdot 7 = 1.75 .$$

Protože pro  $\alpha = 0.05$  je

$$|t| = 1.75 \not\geq 2.011 \doteq t_{0.975; 48} = t_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1} ,$$

nulovou hypotézu **NEZAMÍTÁME** na hladině 5%.

Protože při snížení hladiny se zmenšuje i kritický obor  $W$  (je to vidět i na obrázku, kde žlutá plocha bude menší), tak na hladině 1% hypotézu  $\mathbf{H}_0$  také **NEZAMÍTÁME**.

(Pro úplnost si ale stejně ještě vyjádříme příslušnou podmínku:  $|t| = 1.75 \not\geq 2.682 \doteq t_{0.995; 48}$  .)

Obecněji tedy:

**snížíme hladinu chyby 1. druhu (tj. chceme si být více jistí)  $\Rightarrow$  musíme tolerovat více "prohřešků"  $\Rightarrow$  častěji nezamítáme**

### Pomocí intervalu spolehlivosti:

Kritérium pro zamítnutí  $\mathbf{H}_0$  na hladině  $\alpha$

$$|t| > t_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1}$$

se dá ekvivalentně přepsat (při vyjádření  $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s_x} \sqrt{n}$ ) jako

$$\mu_0 \notin \left\langle \bar{x} - \frac{s_x}{\sqrt{n}} \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1} \quad , \quad \bar{x} + \frac{s_x}{\sqrt{n}} \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1} \right\rangle =: \langle \mu_L, \mu_U \rangle$$

což je hledaný interval spolehlivosti.

Při vyčíslení pro  $\alpha = 5\%$ , tj.  $t_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1} = t_{0.975; 48} \doteq 2.011$ , tedy dostaneme

$$\langle \mu_L, \mu_U \rangle = \left\langle 8.4 - \frac{1.6}{\sqrt{49}} \cdot 2.011 \quad , \quad 8.4 + \frac{1.6}{\sqrt{49}} \cdot 2.011 \right\rangle = \langle 7.94, 8.86 \rangle$$

Protože máme  $\mu_0 = 8 \in \langle 7.94, 8.86 \rangle = \langle \mu_L, \mu_U \rangle$ , hypotézu  $H_0$  **NEZAMÍTÁME** na hladině 5%.  
(Výsledek musel samozřejmě dopadnout stejně jako při testovací statistice, protože je to ekvivalentní princip.)

(b) V tomto případě budeme na hladině  $\alpha = 5\%$  (příp. 1%) testovat hypotézu o střední hodnotě

$$\tilde{H}_0 : \mu \leq \mu_0 (= 8)$$

proti alternativní hypotéze:

$$\tilde{H}_1 : \mu > \mu_0 (= 8) .$$

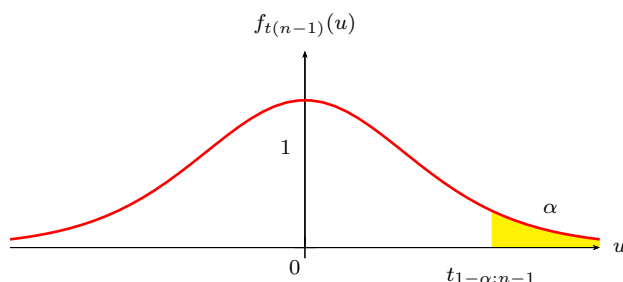
**Pomocí testovací statistiky:**

Statistika  $T$  bude mít stejný tvar jako v předešlém případě (a). Kritérium pro **ZAMÍTNUTÍ**  $\tilde{H}_0$  (na hladině  $\alpha$ ) bude ale teď jiné, a sice

$$\text{zamítáme } \tilde{H}_0 \text{ (na hladině } \alpha) \Leftrightarrow t > t_{1-\alpha; n-1} .$$

**Proč má zamítací kritérium uvedený tvar:** Za předpokladu platnosti nulové hypotézy, tj. pokud  $E(X) \leq \mu_0$ , bude mít hustota pro statistiku  $T$  svůj vrchol v intervalu  $(-\infty, 0)$ . Očekávané hodnoty takovéto statistiky  $T$  by se měly pohybovat spíše v záporných až nulových hodnotách. Pokud se příliš odchýlí do kladných hodnot, bude to důvod k zamítnutí nulové hypotézy. “Nejhorší” z tohoto hlediska je krajní případ  $E(X) = \mu_0$ , pro který má  $T$  opět Studentovo  $t$ -rozdělení s  $n - 1$  stupni volnosti (viz obrázek). (V ostatních případech  $\mu < \mu_0$  uz ovšem statistika  $T$  Studentovo rozdělení nemá! Pro zájemce je více podrobností na konci tohoto dokumentu.)

Chyba 1. druhu s pravděpodobností  $\alpha$  zde tedy bude soustředěna jen na jedné straně:



Podobně jako předtím máme

$$\begin{aligned} P_{(\tilde{H}_0 \text{ platí})}(\text{nastává chyba 1. druhu}) &= P_{(\tilde{H}_0 \text{ platí})}(\text{zamítáme } \tilde{H}_0) = \\ &= P_{(\tilde{H}_0 \text{ platí})}(T > t_{1-\alpha; n-1}) = \alpha \end{aligned}$$

Hodnota statistiky  $T$  zůstane stejná jako předtím, tedy  $t = 1.75$ , a protože pro  $\alpha = 0.05$  máme splněno zamítací kritérium

$$t = 1.75 > 1.677 \doteq t_{0.95; 48} = t_{1-\alpha; n-1} ,$$

hypotézu  $\tilde{H}_0$  **ZAMÍTNEME**.

(Pozor, jde o jednostranný test, takže kvantil je jiný! Veškerou chybu jsme spotřebovali jen na kladné hodnoty. A toto malé zvětšení, oproti oboustrannému testu, už stačilo na zamítnutí.)

Pro  $\alpha = 1\%$  pak máme

$$t = 1.75 \not> 2.407 \doteq t_{0.99; 48} ,$$



takže při této hladině hypotézu  $\tilde{H}_0$  naopak **NEZAMÍTNEME**.

**Pomocí intervalového odhadu:**

Kritérium pro zamítnutí  $\tilde{H}_0$  na hladině  $\alpha$

$$t > t_{1-\alpha; n-1}$$

se dá ekvivalentně přepsat (opět při vyjádření  $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s_x} \sqrt{n}$ ) jako

$$\mu_0 \notin \left( \bar{x} - \frac{s_x}{\sqrt{n}} \cdot t_{1-\alpha; n-1}, +\infty \right) =: (\mu_D, +\infty)$$

což je hledaný dolní interval spolehlivosti.

Při vyčíslení pro  $\alpha = 5\%$ , tj.  $t_{1-\alpha; n-1} = t_{0.95; 48} \doteq 1.677$ , tedy dostaneme

$$\langle \mu_D, +\infty \rangle = \left\langle 8.4 - \frac{1.6}{\sqrt{49}} \cdot 1.677, +\infty \right\rangle = \langle 8.017, +\infty \rangle$$

Protože máme  $\mu_0 = 8 \notin \langle 8.017, +\infty \rangle = \langle \mu_D, +\infty \rangle$ , hypotézu  $\tilde{H}_0$  **ZAMÍTÁME** na hladině 5%. (Výsledek opět dopadne stejně jako při testovací statistice, protože je to ekvivalentní princip.)

Tvar intervalu spolehlivosti si můžeme intuitivně zapamatovat takto:

Při pravdivosti  $\tilde{H}_0$  je  $\mu \leq \mu_0$ . Protože  $\langle \mu_D, \infty \rangle$  představuje dolní interval spolehlivosti 95% pro  $\mu$ , musí být s touto pravděpodobností v tomto intervalu i  $\mu_0$ . Pokud není (což nastane jen s 5% pravděpodobností), je to důvod k zamítnutí.

**Důležitá poznámka:** Všimněme si, že jsme došli k těmto (zdánlivě protichůdným výsledkům):  
na hladině  $\alpha = 5\%$  jsme

- hypotézu  $\mu = \mu_0$  nezamítli
- hypotézu  $\mu \leq \mu_0$  zamítli

přestože nezamítnutý případ je podpřípadem zamítnutého! To vypadá sice jako rozpor, ale ve skutečnosti v každém z případů testujeme hypotézy jiným způsobem. Jak už bylo napsáno výše, chyba se v případě oboustranného testu rozloží symetricky na obě strany, zatímco u jednostranného testu je nahromaděna jen na jednom konci.

**Příklad 12.4** (asymptotický test střední hodnoty)

*U 64 poboček firmy byl naměřen výběrový průměr počtu zákazníků za den 23, výběrový rozptyl pak byl roven 36. Rozdělení počtu zákazníků není známé.*

- Sestrojte (asymptotický) oboustranný interval pro střední hodnotu počtu zákazníků o spolehlivosti 95%.*
- Otestujte na hladině 5%, zda skutečná střední hodnota počtu zákazníků za den může být považována za rovnu 25.*

**Řešení:**

Máme veličiny

$$X_i = \text{“počet pacientů u } i\text{-tého lékaře za den”}$$

pro  $i = 1, \dots, n$ , kde  $n = 64$ , které budeme pokládat za nezávislé. Jejich rozdělení není známé.

(a) Asymptotický oboustranný interval pro střední hodnotu o spolehlivosti  $1 - \alpha$  se bude podobat tomu, který se odvozuje, pokud  $X_i$  mají normální rozdělení. Rozdíl bude jen v tom, že kvantil  $t_{1-\frac{\alpha}{2}; n-1}$  pro Studentovo rozdělení s  $n - 1$  stupni volnosti (který používáme, když  $X_i$  mají normální rozdělení) se nahradí asymptotickou hodnotou když  $n \rightarrow \infty$ , která odpovídá kvantilu  $u_{1-\frac{\alpha}{2}} = \Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$  pro rozdělení  $N(0, 1)$ .

Průslušný asymptotický interval o spolehlivosti  $1 - \alpha = 95\%$  tedy je:

$$\langle \mu_L, \mu_U \rangle := \left\langle \bar{x} - \frac{s_x}{\sqrt{n}} \cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}} \quad , \quad \bar{x} + \frac{s_x}{\sqrt{n}} \cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\rangle$$

kde  $\bar{x} = 23$  je výběrový průměr a  $s_x^2 = 36$  je výběrový rozptyl. Pro  $\alpha = 5\%$  máme hodnotu kvantilu  $u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{0.975} = \Phi^{-1}(0.975) \doteq 1.96$ . Po dosazení máme tedy

$$\langle \mu_L, \mu_U \rangle := \left\langle 23 - \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{64}} \cdot 1.96 \quad , \quad 23 + \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{64}} \cdot 1.96 \right\rangle \doteq \langle 22.28, 23.72 \rangle$$

Tento interval se pochopitelně MĚNÍ s každým měřením (protože je závislý na naměřených vstupech), a jeho smysl je ten, že skutečná hodnota  $\mu = E(X)$  (která se NEMĚNÍ!) bude obsažena v tomto (obecně proměnném intervalu) s pravděpodobností 95%.

(b) Podle zadání máme na hladině  $\alpha = 5\%$  otestovat hypotézu o střední hodnotě  $\mu = E(X)$  tvaru

$$\mathbf{H}_0 : \mu = \mu_0$$

proti alternativní hypotéze:

$$\mathbf{H}_A : \mu \neq \mu_0 .$$

kde  $\mu_0 = 25$ .

#### Pomocí intervalového odhadu:

Využijeme už spočítaného asymptotického oboustranného intervalu  $\langle \mu_L, \mu_U \rangle$  pro střední hodnotu o spolehlivosti 95%. Podle toho, co jsme uvedli výše v části (a), je pravděpodobnost, že střední hodnota  $\mu = E(X)$  bude obsažena v (proměnném) intervalu  $\langle \mu_L, \mu_U \rangle$ , rovna 95%. Tedy mimo tento interval se ocitne jen v 5% případech.

Jestliže předpokládáme, že  $\mu = \mu_0$  (tj. hypotézu  $\mathbf{H}_0$ ), bude kritérium pro její zamítnutí na hladině  $\alpha$  přirozeně tvaru:

$$\text{zamítáme } \mathbf{H}_0 \text{ (na hladině } \alpha) \Leftrightarrow \mu_0 \notin \langle \mu_L, \mu_U \rangle .$$

A protože skutečně nakonec máme, že  $\mu_0 = 25 \notin \langle 22.28, 23.72 \rangle = \langle \mu_L, \mu_U \rangle$ , tak hypotézu  $\mathbf{H}_0$  **ZAMÍTÁME** na hladině 5%.

#### Pomocí testovací statistiky:

Podmínka pro zamítnutí  $\mathbf{H}_0$  na hladině  $\alpha$  se dá z formy pro interval spolehlivosti

$$\mu_0 \notin \left\langle \bar{x} - \frac{s_x}{\sqrt{n}} \cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}} \quad , \quad \bar{x} + \frac{s_x}{\sqrt{n}} \cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\rangle$$

ekvivalentně přepsat jako

$$|t| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

kde  $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s_x} \sqrt{n}$ , což je (podobně jako v **Příkladu 11.4**) hodnota testovací veličiny (tzv. *statistiky*):

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S_X} \sqrt{n}$$

Protože však neznáme rozdělení veličin  $X_i$ , neznáme ani *přesné* rozdělení této statistiky  $T$ . To ale na druhou stranu nevádí, protože pro dost velká  $n$  nakonec bude mít veličina  $T$  přibližné rozdělení  $N(0, 1)$  (bez ohledu na počáteční rozdělení rozdělení veličin  $X_i$ ). To je tedy důvod, proč se pak v zamítacím kritériu objevují kvantily pro norm. rozdělení. Co přesně znamená “dost velká  $n$ ”, závisí pochopitelně na tom, jak “divoké” je rozdělení veličin  $X_i$ . Když si teď připustíme, že  $X_i$  by mohly mít Poissonovo rozdělení, tak i relativně malé hodnoty  $n$  (my máme  $n = 64$ ) mohou být dostatečné pro použití asymptotiky.

Shrňme si to tedy tak, že kritérium pro zamítnutí  $\mathbf{H}_0$  (na hladině  $\alpha$ ) je tvaru

$$\text{zamítáme } \mathbf{H}_0 \text{ (na hladině } \alpha) \Leftrightarrow |t| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}.$$

Při konkrétním dosazení máme

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s_x} \sqrt{n} = \frac{23 - 25}{\sqrt{36}} \sqrt{64} = -\frac{16}{3} \doteq -5.33$$

a tudíž

$$|t| \doteq |5.33| > 1.96 \doteq u_{0.975}$$

což znamená, že hypotézu  $\mathbf{H}_0$  (opět) **ZAMÍTÁME** na hladině 5%.

(Výsledek musel samozřejmě dopadnout stejně jako pomocí intervalu spolehlivosti, protože je to ekvivalentní princip.)

### Podrobnější zdůvodnění tvaru zamítacího kritéria pro test nulové hypotézy $\mu \leq \mu_0$ s neznámým rozptylem:

Nejdříve si pro zjednodušení uvědomme následující věc:

Jestliže máme dvě veličiny  $X, Y$  takové, že  $X \leq Y$  (tj.  $X(\omega) \leq Y(\omega)$  pro všechna  $\omega \in \Omega$ ), pak platí, že

- $E(X) \leq E(Y)$  pokud střední hodnoty existují,
- $P(c < X) \leq P(c < Y)$  pro všechna  $c \in \mathbb{R}$ .

A nyní to zdůvodnění: Abychom více zdůraznili závislost veličiny  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  na parametru  $\mu$ , budeme ji vyznačovat jako  $X_\mu$  a podobně to budeme psát u statistiky  $T_\mu = \frac{\bar{X}_\mu - \mu_0}{S_{X_\mu}} \sqrt{n}$ . Je nutné zdůraznit, že za předpokladu nulové hypotézy (tj. že  $\mu \leq \mu_0$ ) statistika  $T_\mu$  obecně **NEMÁ** Studentovo  $t$ -rozdělení ( $t$ -rozdělení se objeví právě jen pokud  $\mu = \mu_0$ ).

Nyní předpokládejme platnost nulové hypotézy  $\mathbf{H}_0 : \mu \leq \mu_0$ . Pak máme:

$$\mu \leq \mu_0 \Rightarrow T_\mu = \underbrace{\frac{\bar{X}_\mu - \mu_0}{S_{X_\mu}} \sqrt{n}}_{\text{složitější rozdělení}} = \frac{\bar{X}_\mu - \mu}{S_{X_\mu}} \sqrt{n} + \underbrace{\frac{\mu - \mu_0}{S_{X_\mu}} \sqrt{n}}_{\leq 0} \leq \underbrace{\frac{\bar{X}_\mu - \mu}{S_{X_\mu}} \sqrt{n}}_{t_{(n-1)\text{-rozdělení}} =: U_\mu}$$

Tedy dostali jsme, že  $T_\mu \leq U_\mu$  a  $U_\mu$  má  $t_{(n-1)}$ -rozdělení s  $n - 1$  stupni volnosti. Z toho máme, že:

$$E(T_\mu) \leq E(U_\mu) = 0$$

Můžeme tak očekávat, že hodnoty statistiky  $T_\mu$  budou především v intervalu  $(-\infty, 0)$ . Jako obor  $\widetilde{W} \subseteq \mathbb{R}$  takových hodnot veličiny  $T$ , kdy už budeme zamítat, si proto zvolíme

$$\widetilde{W} : (u_1, \infty) ,$$

kde požadujeme, aby  $u_1 \in \mathbb{R}$  bylo nejmenší takové, aby chyba 1. druhu byla nejvýše  $\alpha$ , tj.

$$\begin{aligned} (\forall \mu \leq \mu_0) \quad \alpha &\geq P_{(\mathbf{H}_0 \text{ platí})}(\text{nastává chyba 1. druhu}) = P_{(\mathbf{H}_0 \text{ platí})}(\text{zamítáme } \mathbf{H}_0) = \\ &= P_{(\mathbf{H}_0 \text{ platí})}(T_\mu \in \widetilde{W}) = P_{(\mathbf{H}_0 \text{ platí})}(u_1 < T_\mu) \end{aligned}$$

A teď si jen určíme, kolik musí být  $u_1$  a současně ukážeme, že největší možná chyba nastává pro případ  $\mu = \mu_0$ :

Z toho, že  $T_\mu \leq U_\mu$  a veličiny  $U_\mu$  a  $T_{\mu_0}$  mají obě  $t_{(n-1)}$ -rozdělení s  $n - 1$  stupni volnosti ihned dostaneme, že

$$P_{(\mathbf{H}_0 \text{ platí})}(u_1 < T_\mu) \leq P_{(\mathbf{H}_0 \text{ platí})}(u_1 < U_\mu) = 1 - F_{t_{(n-1)}}(u_1) = P_{(\mathbf{H}_0 \text{ platí})}(u_1 < T_{\mu_0})$$

Vidíme tedy, že  $P_{(\mathbf{H}_0 \text{ platí})}(u_1 < T_\mu) \leq P_{(\mathbf{H}_0 \text{ platí})}(u_1 < T_{\mu_0}) \leq \alpha$  a hledané nejmenší  $u_1$  tak musí splňovat, že

$$P_{(\mathbf{H}_0 \text{ platí})}(u_1 < T_{\mu_0}) = \alpha$$

a protože  $T_{\mu_0}$  má Studentovo rozdělení, je tudíž

$$u_1 = t_{1-\alpha; n-1}$$

a kritérium pro **ZAMÍTNUTÍ** je tak skutečně tvaru

$$\text{zamítáme } \mathbf{H}_0 \text{ (na dané hladině } \alpha) \Leftrightarrow t > t_{1-\alpha; n-1} .$$