13. cvičení z PST

9. - 13. května 2022

Příklad 13.1 (test střední hodnoty normálního rozdělení při **známém** rozptylu)

Teploměrem, o jehož chybě předpokládáme, že má normální rozdělení s nulovou střední hodnotou a směrodatnou odchylkou $\sigma = 3°$*, jsme provedli* 30 *měření teploty roztoku. Průměrný výsledek byl* 61°*. Otestujte na hladině významnosti* 5 %*, zda teplota roztoku je* 60°*.*

Řešení:

Předpokládejme, že teplota roztoku je konstantní (ale neznámá) hodnota μ. Chyba měření teploty je veličina $Y \sim N(0, \sigma^2)$, kde $\sigma = 3°$. Naše veličina

$$X = \text{“\textit{naměřená teplota}”}$$

(v jednotkách °) je tedy tvaru $X = \mu + Y$ a má tudíž rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$.

Podle zadání máme otestovat hypotézu o střední hodnotě

$$\mathbf{H}_0 : \mu = \mu_0 \ (= 60°)$$

proti alternativní hypotéze:

$$\mathbf{H}_1 : \mu \neq \mu_0 \ (= 60°) \ .$$

Hodnotu rozptylu σ^2 známe. Takže použijeme test střední hodnoty se známým rozptylem (protože tím se dozvíme víc než kdybychom uvažovali neznámý rozptyl a navíc ani neznáme hodnotu výběrové směrodatné odchylky).

Pomocí testovací statistiky:

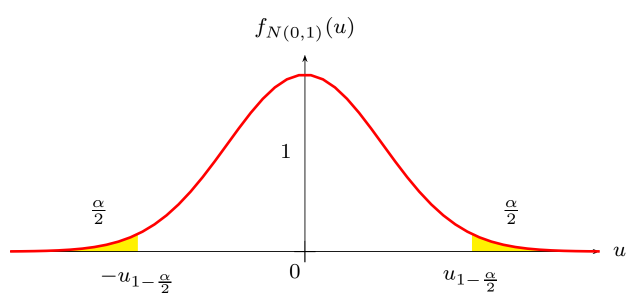
Realizace testovací statistiky $T = \frac{\overline{\mathbf{X}} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$ pro $n = 30$ je

$$t = \frac{\overline{\mathbf{x}} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} = \frac{61 - 60}{3} \sqrt{30} \doteq 1.83$$

Zamítací kritérium zde máme tvaru

$$\text{zamítáme } \mathbf{H}_0 \text{ (na hladině } \alpha) \quad \Leftrightarrow \quad |t| > \underbrace{u_{1-\frac{\alpha}{2}}}_{\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \quad .$$

Proč má zamítací kritérium uvedený tvar: Za předpokladu platnosti nulové hypotézy, tj. pokud $E(X) = \mu_0$, bude mít statistika T normální rozdělení $N(0, 1)$. Očekávané hodnoty takovéto statistiky T by se měly pohybovat kolem nuly. Pokud se příliš odchýlí, bude to důvod k zamítnutí nulové hypotézy. Nebudeme přitom preferovat vychýlení na žádnou ze stran - tj. chybu 1. druhu s pravděpodobností α rozdělíme na poloviny $\frac{\alpha}{2}$ na obě strany.



Pak máme

$$P_{(H_0 \text{ platí})}\Big(\text{nastává chyba 1. druhu}\Big) = P_{(H_0 \text{ platí})}\Big(\text{zamítáme } \mathbf{H}_0\Big) =$$
$$= P_{(H_0 \text{ platí})}\Big(\ |T| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}\ \Big) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha$$

Hodnotu kvantilu pro $\alpha = 0.05$ (tj. pro $1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975$) určíme z tabulek jako

$$u_{0.975} = \Phi^{-1}(0.975) \doteq 1.96\ .$$

Protože zamítací kritérium NENÍ splněno, tj. máme:

$$1.96 = u_{0.975} \not< |t| = 1.83$$

tak nulovou hypotézu $\mathbf{H}_0$ NEzamítáme.

Pomocí intervalu spolehlivosti:
Kritérium pro zamítnutí $\mathbf{H}_0$ na hladině α

$$u_{1-\frac{\alpha}{2}} < |t| \quad \left(= \frac{|\overline{\boldsymbol{x}} - \mu_0|}{\sigma}\sqrt{n}\ \right)$$

se dá ekvivalentně přepsat jako

$$|\overline{\boldsymbol{x}} - \mu_0| > \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

neboli

$$\mu_0 \notin \left\langle\ \overline{\boldsymbol{x}} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}} \quad , \quad \overline{\boldsymbol{x}} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}}\ \right\rangle \quad =: \langle \mu_L,\ \mu_U \rangle$$

což je tvar zamítacího kritéria s použitím intervalu spolehlivosti.

Při vyčíslení pro $\alpha = 5\%$ tedy dostaneme

$$\langle \mu_L,\ \mu_U \rangle = \left\langle\ 61 - \underbrace{\frac{3}{\sqrt{30}} \cdot 1.96}_{\doteq 1.07} \quad , \quad 61 + \frac{3}{\sqrt{30}} \cdot 1.96\ \right\rangle = \langle 59.93,\ 62.07 \rangle$$

Protože máme

$$\mu_0 = 60 \in \langle 59.93,\ 62.07 \rangle = \langle \mu_L,\ \mu_U \rangle$$

(tj. kritérium pro zamítnutí není splněno) hypotézu $\mathbf{H}_0$ **NEZAMÍTÁME** na hladině 5%.

(Výsledek musel samozřejmě dopadnout stejně jako při testovací statistice, protože je to ekvivalentní princip.)

Intuitivně to můžeme chápat takto:

(1) μ se má nacházet s 95% pravděpodobností v intervalu spolehlivosti;

(2) my předpokládáme, že $\mu = \mu_0$;

(3) zjistili jsme, že μ_0 v intervalu je.

Tedy μ se skutečně nachází v intervalu spolehlivosti a my tak nemáme žádný důvod k tomu hypotézu zamítnout.

(A kdybychom to naopak nezjistili, pak bychom hypotézu zamítli, ale spletli bychom se přitom jen s 5% pravděpodobností.)

Poznámky k testu dobré shody: Chceme otestovat (na hladině α), jestli daná veličina X s konečně mnoha (navzájem různými!) hodnotami $a_1, \dots, a_k$ (ne nutně číselnými) má předepsané pravděpodobnosti $(p_1, \dots, p_k)$, tedy nulovou hypotézu

$\mathbf{H}_0 : P(X = a_i) = p_i$ pro všechna $i \in \{1, \dots, k\}$

proti alternativní hypotéze:

$\mathbf{H}_A : P(X = a_{i_0}) \neq p_{i_0}$, pro alespoň jedno $i_0 \in \{1, \dots, k\}$

Při n pokusech s veličinou X si pro $i = 1, \dots, k$ označme veličiny

$$N_i = \text{“}\textit{počet výskytů případu } X = a_i \textit{ při } n \textit{ pokusech}\text{”}\ .$$

Máme tedy náhodný vektor

$$\boldsymbol{N} = (N_1, \dots, N_k)$$

a vztah $N_1 + \cdots + N_k = n$. Už z toho vidíme, že veličiny N_i nejsou nezávislé, ale zase k té nezávislosti tak daleko nemají. Náhodný vektor $\boldsymbol{N}$ má tzv. multinomické rozdělení a jednotlivá marginální rozdělení veličin jsou binomická, konkrétně $N_i \sim \mathrm{Bi}(n, p_i)$. Speciálně tedy $E(N_i) = n \cdot p_i$.

Jako testovací veličinu zde používáme:

$$T = \sum_{i=1}^{k} \frac{(N_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i}$$

která má asymptoticky (tj. pro $n \to \infty$) tzv. χ^2-rozdělení s $k - 1$ stupni volnosti. Pro praktické použití této asymptotiky se obvykle požaduje, aby platilo, že

$$n \cdot p_i \geq 5 \ \text{ pro všechna } \ i \in \{1, \dots, k\}\ .$$

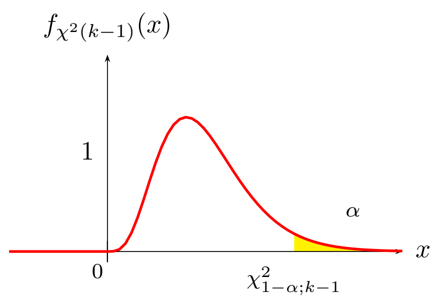
Hodnoty $n \cdot p_i$ se označují jako tzv. *teoretické četnosti.*

Pokud tedy platí nulová hypotéza $\mathbf{H}_0$, měly by být hodnoty veličiny T malé. Jestliže hodnoty T budou příliš velké, bude to důvod k zamítnutí nulové hypotézy.

Jak určit hranici, kde už nastane zamítnutí: veličina T má (přibližně) $\chi^2(k-1)$ rozdělení, tedy platí

$$P_{(H_0 \text{ platí})}\big(T > q_{\chi^2(k-1)}(1 - \alpha)\big) \doteq \alpha$$

kde $q_{\chi^2(k-1)}(1 - \alpha)$ je hodnota kvantilu pro $\chi^2(k-1)$ rozdělení (viz obrázek, kde α je velikost žluté plochy pod hustotou $f_{\chi^2(k-1)}(x)$ pro $\chi^2(k-1)$ rozdělení).



Kritérium pro **ZAMÍTNUTÍ** $\mathbf{H}_0$ (na hladině α) proto volíme jako

$$\mathbf{H}_0 \text{ zamítáme (na hladině } \alpha) \quad \Leftrightarrow \quad t > q_{\chi^2(k-1)}(1 - \alpha)\ .$$

Z definice chyby 1. druhu, tj.

$$\text{nastává chyba 1. druhu} \quad \Leftrightarrow \quad (\text{hypotéza } \mathbf{H}_0 \text{ platí} \quad \& \quad \text{my ji zamítáme})$$

pak totiž máme, že

$$P_{(H_0 \text{ platí})}\Big(\text{nastává chyba 1. druhu}\Big) = P_{(H_0 \text{ platí})}\Big(\text{zamítáme } \mathbf{H}_0 \text{ (na hladině } \alpha)\Big) =$$

$$= P_{(H_0 \text{ platí})}\big(T > q_{\chi^2(k-1)}(1-\alpha)\big) \doteq \alpha$$

neboli pravděpodobnost chyby 1. druhu (ovšem za předpokladu platnosti $\mathbf{H}_0$!) je pak omezena hodnotou α.

Příklad 13.2 (test dobré shody)

Firma má 3 pobočky. Dva roky bylo sledováno, která z nich zaznamenala nejvyšší měsíční výnos. Bylo zjištěno, že nejvýnosnější byla první pobočka $10\times$, druhá $6\times$ a třetí $8\times$.
Je možné říct, že první pobočka je nejvýnosnější $2\times$ častěji než každá ze zbylých dvou? Testujte na hladině 5%.

Řešení:
Máme tedy veličinu

$$X = \text{“\textit{číslo pobočky, která je zrovna (tj. v daném měsíci) nejvýnosnější}”}$$

s $k = 3$ hodnotami $\{\textit{první, druhá, třetí}\}$.

Nejdříve si potřebujeme zjistit, jaké rozdělení

$$P(X = \textit{první}) = p_1, \quad P(X = \textit{druhá}) = p_2, \quad P(X = \textit{třetí}) = p_3$$

vlastně předpokládáme. Z požadavku máme

$$p_1 = 2 \cdot p_2, \quad p_1 = 2 \cdot p_3, \quad p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

z čehož dostáváme

$$(p_1, p_2, p_3) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

Naše hypotéza tedy je

$\mathbf{H}_0$: veličina X má rozdělení s pravděpodobnostmi $(p_1, p_2, p_3) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$,

a alternativní hypotéza bude:

$\mathbf{H}_A$: veličina X má rozdělení *jiné* než $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

Využijeme test dobré shody. Celkový počet měření (tj. počet měsíců) je $n = 10 + 6 + 8 = 24$. Pro přehlednost si vypíšeme tabulku s jednotlivými četnostmi (pozorovanými i teoretickými):

i (pobočky)	první	druhá	třetí
n_i (pozorované četnosti)	10	8	6
p_i (teoretické pravděpodobnosti)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$n \cdot p_i$ (teoretické četnosti)	$24 \cdot \frac{1}{2} = 12$	$24 \cdot \frac{1}{4} = 6$	$24 \cdot \frac{1}{4} = 6$

Vidíme, že všechny teoretické četnosti jsou ≥ 5, takže skutečně můžeme použít asymptotické přiblížení pro testovací statistiku T (ta tedy bude mít χ^2-rozdělení). Teď už si jen spočítáme hodnotu této statistiky

$$t = \sum_{i=1}^{3} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = \frac{(10-12)^2}{12} + \frac{(8-6)^2}{6} + \frac{(6-6)^2}{6} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 0 = 1$$

a porovnáme s kvantilem χ^2-rozdělení s $k - 1 = 3 - 1 = 2$ stupni volnosti:

$$t = 1 \not> 5.99 \doteq \chi^2_{0.95;\,2} = \chi^2_{1-\alpha;\,k-1}$$

Protože zamítací kritérium NENÍ splněno, tak $\mathbf{H}_0$ **NEZAMÍTÁME** (na hladině α).

- -

Poznámky k testu nezávislosti: Máme veličiny

- X s (různými) hodnotami $\{a_1, \ldots, a_k\}$ a
- Y s (různými) hodnotami $\{b_1, \ldots, b_\ell\}$

a chceme otestovat (na hladině α), hypotézu

$\mathbf{H}_0$: rozdělení veličin X a Y jsou *nezávislá*

proti alternativní hypotéze:

$\mathbf{H}_A$: rozdělení veličin X a Y jsou *závislá*

Při n pokusech s náhodným vektorem (X, Y) si pro $i = 1, \ldots, k$ označme veličiny

$$N_{i,j} = \text{“\textit{počet výskytů případu} } (X,Y) = (a_i, b_j) \text{ \textit{při} } n \text{ \textit{pokusech}”} .$$

a opět máme náhodný vektor

$$\boldsymbol{N} = (N_{1,1}, \ldots, N_{k,\ell})$$

s multinomickým rozdělením. Marginální rozdělení jednotlivých veličin $N_{i,j}$ jsou opět binomická a *za předpokladu nezávislosti X a Y* mají střední hodnotu

$$E(N_{i,j}) = n \cdot P(X = a_i, Y = b_j) \overset{\text{(nezáv.)}}{=} n \cdot P(X = a_i) \cdot P(Y = b_j) .$$

Podobně jako v testu dobré shody by tyto střední hodnoty představovaly teoretické četnosti až na to, že pravděpodobnosti $P(X = a_i)$ a $P(Y = b_j)$ nemáme v hypotéze uvedeny. Proto je odhadneme jako

$$P(X = a_i) \doteq \frac{n_{i,\bullet}}{n} \quad \text{a} \quad P(Y = b_j) \doteq \frac{n_{\bullet,j}}{n}$$

kde $n_{i,\bullet}$ a $n_{\bullet,j}$ jsou naměřené hodnoty veličin

$$N_{i,\bullet} = \sum_{j=1}^{\ell} N_{i,j} = \text{“\textit{počet výskytů případu} } X = a_i \text{ \textit{při} } n \text{ \textit{pokusech}”}$$

$$N_{\bullet,j} = \sum_{i=1}^{k} N_{i,j} = \text{“\textit{počet výskytů případu} } Y = b_j \text{ \textit{při} } n \text{ \textit{pokusech}”}$$

což jsou tzv. *marginální četnosti.*

Z tohoto důvodu jako testovací veličinu volíme:

$$T = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\left(N_{i,j} - \frac{N_{i,\bullet} \cdot N_{\bullet,j}}{n} \right)^2}{\frac{N_{i,\bullet} \cdot N_{\bullet,j}}{n}}$$

která má asymptoticky (tj. pro $n \to \infty$) opět χ^2-rozdělení, tentokrát ale s $(k-1) \cdot (\ell - 1)$ stupni volnosti. Pro praktické použití této asymptotiky se obvykle opět požaduje, aby platilo, že

$$\frac{n_{i,\bullet} \cdot n_{\bullet,j}}{n} \geq 5 \text{ pro všechna } i = 1, \ldots, k \text{ a } j = 1, \ldots, \ell.$$

Kritérium pro **ZAMÍTNUTÍ** $\mathbf{H}_0$ (na hladině α) volíme podobně jako u testu dobré shody a sice

$$\mathbf{H}_0 \text{ zamítáme (na hladině } \alpha) \quad \Leftrightarrow \quad t > q_{\chi^2_{(k-1)\cdot(\ell-1)}}(1 - \alpha) .$$

- -

Příklad 13.3 (test nezávislosti veličin)

V přímořském středisku probíhá kurz surfování a vodních lyží pro děti. Vybíráme 100 účastníků a sledujeme následující rozdělení sportů mezi chlapce a dívky:

	surf	*vodní lyže*
chlapci	40	20
dívky	20	20

(a) Testujte na hladině $\alpha = 1\%$, zda je druh sportu nezávislý na tom, zda je zvolen chlapcem nebo dívkou.

(b) Testujte na hladině $\alpha = 5\%$, zda jsou počty chlapců a dívek účastnících se kurzu přibližně stejné.

Řešení:

Nechť veličina X označuje pohlaví daného dítěte a Y druh sportu, který si vybralo.

(a) Budeme testovat hypotézu:

$\mathbf{H}_0$: rozdělení veličin X a Y jsou *nezávislá*

proti alternativní hypotéze:

$\mathbf{H}_1$: rozdělení veličin X a Y jsou *závislá*.

na hladině významnosti $\alpha = 5\%$.

Naměřené četnosti $n_{i,j}$ a marginální četnosti $n_{i,\bullet}$ a $n_{\bullet,j}$ pak budou:

$n_{i,j}$ $(Y =)\ j$ $(X =)\ i$	surf	vodní lyže	$n_{i,\bullet}$
chlapci	40	20	60
dívky	20	20	40
$n_{\bullet,j}$	60	40	

Celkový počet dětí je $n = \sum_{i,j} n_{ij} = 40+20+20+20 = 100$. Za předpokladu $\mathbf{H}_0$ pak teoretické četnosti $\frac{n_{i,\bullet}\cdot n_{\bullet,j}}{n}$ v této tabulce budou:

$\frac{n_{i,\bullet}\cdot n_{\bullet,j}}{n}$ $(Y =)\ j$ $(X =)\ i$	surf	vodní lyže	$n_{i,\bullet}$
chlapci	$\frac{60\cdot 60}{100} = 36$	$\frac{40\cdot 60}{100} = 24$	60
dívky	$\frac{60\cdot 40}{100} = 24$	$\frac{40\cdot 40}{100} = 16$	40
$n_{\bullet,j}$	60	40	

Podmínka na tyto teoretické (tj. očekávané) četnosti ≥ 5 je splněna, takže test nezávislosti můžeme použít. Pro hodnotu testovací statistiky dostaneme

$$t = \sum_{i,j} \frac{\left(n_{i,j} - \frac{n_{i,\bullet}\cdot n_{\bullet,j}}{n}\right)^2}{\frac{n_{i,\bullet}\cdot n_{\bullet,j}}{n}} =$$

$$= \frac{(40-36)^2}{36} + \frac{(20-24)^2}{24} + \frac{(20-24)^2}{24} + \frac{(20-16)^2}{16} \doteq 2.78\ .$$

Tuto hodnotu dále porovnáme s hodnotou kvantilu χ^2 pro $(k-1)(\ell-1) = 1$ stupňů volnosti, kde $k = 2$ je počet položek veličiny X a $\ell = 2$ je počet položek veličiny Y.

Kritérium pro **ZAMÍTNUTÍ** $\mathbf{H}_0$ (na hladině α) bude tedy tvaru

$$t > q_{\chi_1^2(1-\alpha)} \quad \Leftrightarrow \quad \text{zamítáme } \mathbf{H}_0 \text{ (na hladině } \alpha) \ .$$

Hledaný kvantil je

$$q_{\chi_1^2}(1-\alpha) = q_{\chi_1^2}(0.99) = 6.63 \ .$$

Protože

$$t \doteq 2.78 \not> 6.63 \doteq q_{\chi_1^2}(0.99) \ ,$$

hypotézu o nezávislosti **NEZAMÍTÁME**.

- -

(b) V tomto případě budeme uvažovat pouze veličinu X a testovat (na hladině $\alpha = 5\%$) hypotézu

$\widetilde{\mathbf{H}}_0$: veličina X má rozdělení s pravděpodobnostmi $(p_1, p_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$,

proti alternativní hypotéze

$\widetilde{\mathbf{H}}_A$: veličina X má rozdělení *jiné* než $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Využijeme teď opět test dobré shody. Celkový počet měření je zase $n = 100$. Naměřené četnosti odpovídají už spočítaným marginálním četnostem pro hodnoty veličiny X, tedy $n_i = n_{i,\bullet}$. Pro přehlednost si zase vypíšeme tabulku s jednotlivými četnostmi (pozorovanými i teoretickými):

i	chlapci	dívky
n_i (pozorované četnosti)	60	40
p_i (teoretické pravděpodobnosti)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$n \cdot p_i$ (teoretické četnosti)	$100 \cdot \frac{1}{2} = 50$	$100 \cdot \frac{1}{2} = 50$

Vidíme, že všechny teoretické četnosti jsou ≥ 5, takže můžeme použít asymptotické přiblížení pro testovací statistiku T. Teď už si jen spočítáme hodnotu této statistiky

$$t = \sum_i \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = \frac{(60-50)^2}{50} + \frac{(40-50)^2}{50} = 2 + 2 = 4$$

a porovnáme s kvantilem χ^2-rozdělení s $k - 1 = 2 - 1 = 1$ stupněm volnosti:

$$t = 4 > 3.84 \doteq q_{\chi_1^2}(0.95) = q_{\chi_1^2}(1-\alpha)$$

Protože zamítací kritérium JE splněno, tak $\widetilde{\mathbf{H}}_0$ **ZAMÍTÁME** (na hladině α).