3. cvičení z PST

8. února - 4. března 2022

Připomenutí: Jevy $A_1, \ldots, A_n$ jsou nezávislé $\overset{\text{def.}}{\iff}$ pro každou indexovou množinu $K \subseteq \{1, \ldots, n\}$ je

$$P\Big(\bigcap_{i\in K} A_i\Big) = \prod_{i\in K} P(A_i)\ .$$

Netriviální podmínky vzniknou pro $|K| \geq 2$. Máme tak $2^n - n - 1$ podmínek.

Speciálně: jevy A, B a C jsou nezávislé právě když:

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B), \quad P(A\cap C) = P(A)\cdot P(C), \quad P(B\cap C) = P(B)\cdot P(C)$$

a

$$P(A\cap B\cap C) = P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$$

přičemž žádná z těchto 4 podmínek NENÍ důsledkem zbylých třech.

Příklad 3.1 *Pro hod dvěma symetrickými mincemi uvažujme jevy*

$A =$*"na první minci padl líc",*

$B =$*"na druhé minci padl rub",*

$C =$*"na mincích padly různé výsledky".*

Jak je to s nezávislostí jevů A, B, C?

Řešení:
Prostor všech možných výsledků jsou uspořádané dvojice hodnot na jednotlivých mincích

$$\Omega: \quad \begin{array}{cc} (\text{líc}, \text{líc}) & (\text{líc}, \text{rub}) \\ (\text{rub}, \text{líc}) & (\text{rub}, \text{rub}) \end{array}$$

a každý výsledek bude stejně pravděpodobný. Pak máme $|A| = |B| = |C| = 2$ a tedy

$$P(A) = P(B) = P(C) = \tfrac{1}{2}$$

a dále

$$A\cap B = A\cap C = B\cap C = A\cap B\cap C = \{\ (\text{líc}, \text{rub})\ \}\ .$$

Tedy

$$P(A\cap B) = P(A\cap C) = P(B\cap C) = P(A\cap B\cap C) = \tfrac{1}{4}\ .$$

a proto máme

$$P(A\cap B) = \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} = P(A)\cdot P(B)$$

a podobně je to pro ostatní případy, zatímco

$$P(A\cap B\cap C) = \tfrac{1}{4} \neq \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} = P(A)\cdot P(B)\cdot P(C).$$

Jevy jsou tak po dvou nezávislé, ale ne celkově nezávislé.

Poznámka: Nepleťte si disjunktní jevy s nezávislými:

- A a B jsou **disjunktní** $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.
- A a B jsou **nezávislé** $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Příklad 3.2 *Náhodné jevy A a B jsou nezávislé a $P(A \cup B) = 0.545$, $P(A \cap B) = 0.105$. Určete pravděpodobnosti $P(A)$, $P(B)$ a $P(A \cap B^c)$.*

Řešení:
Jestliže využijeme nezávislosti náhodných jevů A a B, pak dostaneme

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B), \qquad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Označme si $P(A) = x$ a $P(B) = y$. Pro hledané pravděpodobnosti tak dostaneme soustavu rovnic

$$0.545 = x + y - 0.105, \qquad x \cdot y = 0.105 \Rightarrow y = \frac{0.105}{x}\,.$$

Po dosazení do první rovnice dostaneme kvadratickou rovnici pro neznámou x ve tvaru

$$x^2 - 0.65x + 0.105 = 0 \Rightarrow x_1 = 0.35, \quad x_2 = 0.3\,.$$

Ze symetrie vztahů plyne, že je

$$P(A) = 0.35, \quad P(B) = 0.3 \qquad \text{nebo} \qquad P(A) = 0.3, \quad P(B) = 0.35\,.$$

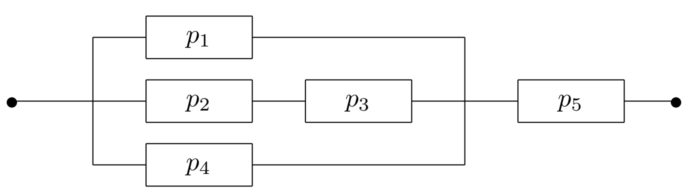
A dále pro první z možností je

$$P(A \cap B^c) = P(A) \cdot P(B^c) = 0.35 \cdot 0.7 = 0.245$$

a pro druhou volbu řešení je

$$P(A \cap B^c) = P(A) \cdot P(B^c) = 0.3 \cdot 0.65 = 0.195\,.$$

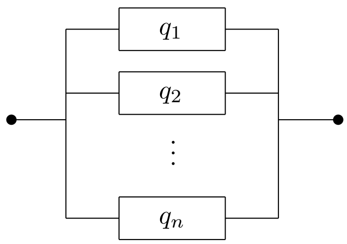
Příklad 3.3 *(operace s nezávislými jevy) Zařízení na obrázku je tvořeno zapojením bloků, které pracují nezávisle na sobě a pravděpodobností výskytu poruch jsou zadány. Vypočtěte pravděpodobnost poruchy funkce celého zařízení.*



Pravděpodobnosti vyčíslete pro $p_1 = 0.2$, $p_2 = p_3 = 0.4$, $p_4 = 0.3$ a $p_5 = 0.1$.

Řešení:
Úlohu si zjednodušíme tím, že budeme postupně nahrazovat více bloků jedním blokem, který bude mít stejnou pravděpodobnost poruchy.

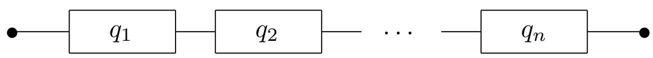
- Pro paralelní zapojení



a jevy $A_i =$"*i-tý blok (seshora) má poruchu*" je pravděpodobnost poruchy tohoto zapojení rovna

$$P(\text{"porucha paralelního zapojení"}) = P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdots P(A_n) = q_1 \cdots q_n \ .$$

- Pro sériové zapojení



a jevy $B_i =$"*i-tý blok (zleva) má poruchu*" je pravděpodobnost poruchy tohoto zapojení rovna

$$P(\text{"porucha sériového zapojení"}) = P(B_1 \cup \cdots \cup B_n) = 1 - P\big((B_1 \cup \cdots \cup B_n)^c\big) =$$

$$= 1 - P(B_1^c \cap \cdots \cap B_n^c) = 1 - P(B_1^c) \cdots P(B_n^c) = 1 - (1 - q_1) \cdots (1 - q_n) \ .$$

Pro vyřešení původního zadání teď

(a) nejdříve nahradíme sériové zapojení dvou bloků s pravděpodobnostmi poruch $p_2 = 0.4$ a $p_3 = 0.4$ jediným blokem s pravděpodobností poruchy

$$p_{2,3} = 1 - (1 - p_2)(1 - p_3) = 1 - 0.6 \cdot 0.6 = 0.64 \ .$$

(b) dále nahradíme paralelní zapojení tří bloků s pravděpodobnostmi poruch $p_1 = 0.2$, $p_{2,3} = 0.64$ a $p_4 = 0.3$ jediným blokem s pravděpodobností poruchy

$$p_{1,2,3,4} = p_1 \cdot p_{2,3} \cdot p_4 = 0.2 \cdot 0.64 \cdot 0.3 = 0.0384 \ .$$

(c) a nakonec nahradíme sériové zapojení dvou bloků s pravděpodobnostmi poruch $p_{1,2,3,4} = 0.0384$ a $p_5 = 0.1$ jediným blokem, který odpovídá celému zařízení a má pravděpodobnost poruchy

$$p_{1,2,3,4,5} = 1 - (1 - p_{1,2,3,4})(1 - p_5) = 1 - 0.9616 \cdot 0.9 = 1 - 0,86544 = 0.13456 \ .$$

Důležitá poznámka: Pro jev $A \subseteq \Omega$, kde $P(A) \neq 0$, má funkce

$$\widetilde{P}(\cdot) := P(\ \cdot\ |A)$$

všechny vlastnosti pravděpodobnosti (pro množinu výsledků Ω a σ-algebru $\mathcal{A}$). Tedy podmíněná pravděpodobnost se chová v prvním argumentu jako obyčejná pravděpodobnost. Pozor, pro druhý argument už podobné chování neplatí!

V následujících větách používáme tento základní vztah pro jevy A a B:

$$P(B \cap A) = P(B|A) \cdot P(A)$$

pokud je podmíněná pravděpodobnost $P(B|A)$ definovaná, tj. pokud je $P(A) \neq 0$.

- -

Věta o úplné pravděpodobnosti: Nechť $A_1, \ldots, A_n$ je úplný disjunktní systém jevů na prostoru všech výsledků Ω (tedy jejich sjednocením je celé Ω a jevy jsou pro dvou disjunktní).

Nechť $P(A_i) \neq 0$ pro všechna i. Pak pro každý jev $B \subseteq \Omega$ platí

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(B|A_k) \cdot P(A_k) \ .$$

Bayesova věta: Pro jevy A a B platí

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

pokud $P(A) \neq 0$ a $P(B) \neq 0$.

- -

A ve spojení s větou o úplné pravděpodobnosti máme

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B|A_k) \cdot P(A_k)} \ .$$

(Všimněte si, že výraz v čitateli je jedním ze sčítanců ve jmenovateli.)

Příklad 3.4 *Na fakultě je 50% studujících na informatice, 30% na matematice a 20% na fyzice. Z těch, co studují na informatice je 10% žen, na matematice 30% a na fyzice 20%.*

(a) Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný studující je žena?

(b) Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný studující je muž na fyzice?

(c) Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná studentka studuje matematiku?

Řešení:
Označme si jevy

A_1 = *"náhodně vybraný studující je informatik"*

A_2 = *"náhodně vybraný studující je matematik"*

A_3 = *"náhodně vybraný studující je fyzik"*

B = *"náhodně vybraný studující je žena"*

Jevy A_1, A_2, A_3 jsou navzájem disjunktní a jejich sjednocením je celý pravděpodobnostní prostor Ω (tvořený všemi studujícími). Tedy máme úplný systém disjunktních jevů na Ω. Dále známe

$$\begin{array}{ccc} P(A_1) = 0.5 & P(A_2) = 0.3 & P(A_3) = 0.2 \\ P(B|A_1) = 0.1 & P(B|A_2) = 0.3 & P(B|A_3) = 0.2 \end{array}$$

(a) Chceme znát $P(B)$. Podle věty o úplné pravděpodobnosti máme

$$P(B) = \sum_{j=1}^{3} P(B \cap A_j) = \sum_{j=1}^{3} P(B|A_j) \cdot P(A_j) =$$

$$= 0.1 \cdot 0.5 + 0.3 \cdot 0.3 + 0.2 \cdot 0.2 = \mathbf{0.18}\ .$$

(b) Chceme znát $P(B^c \cap A_3)$. Podle definice podmíněné pravděpodobnosti máme

$$P(B^c \cap A_3) = P(B^c|A_3) \cdot P(A_3) = (1 - 0.2) \cdot 0.2 = \mathbf{0.16}\ .$$

(c) Chceme znát $P(A_2|B)$. Podle Bayesovy věty máme

$$P(A_2|B) = \frac{P(B|A_2) \cdot P(A_2)}{P(B)} = \frac{0.3 \cdot 0.3}{0.18} = \mathbf{0.5}\ .$$

- -

Příklad můžeme řešit i bez explicitního použití výše uvedených vět a to pomocí velikosti množin. Tato velikost bude vyjadřovat "počty" studentů v dané množině ovšem s tím, že tento počet může být i desetinné číslo (používáme tak vlastně geometrický pravděpodobnostní model). Tato desetinná čísla pochopitelně nesmíme zaokrouhlovat!

Prostoru Ω přiřadíme nějakou velikost např. $vol(\Omega) = 100$ (obvykle je dobré si volit takovou velikost, kterou můžeme snadno dělit hodnotami ve jmenovatelích zlomků v zadaných pravděpodobnostech).

Teď si postupně můžeme začít vyplňovat tabulku níže:

- $\textit{počet studujících} = vol(\Omega) = 100$
- $\textit{počet studujících na informatice} = vol(A_1) = P(A_1) \cdot vol(\Omega) = 0.5 \cdot 100 = 50$ a podobně pro matematiku a fyziku
- $\textit{počet žen na informatice} = vol(B \cap A_1) = P(B|A_1) \cdot vol(A_1) = 0.1 \cdot 50 = 5$ a podobně pro matematiku a fyziku
- $\textit{počet mužů na informatice} = vol(B^c \cap A_1) = vol(A_1) - vol(B \cap A_1) = 50 - 5 = 45$ a podobně pro matematiku a fyziku

	infor. (A_1)	matem. (A_2)	fyz. (A_3)	
muži (B^c)	45	21	16	82
ženy (B)	5	9	4	18
	50	30	20	100

Odsud pak ihned máme např. že

$$\textit{počet žen} = vol(B) = \sum_{i=1}^{3} vol(B \cap A_i) = 5 + 9 + 4 = 18$$

a tudíž

$$P(B) = \frac{\textit{počet žen}}{\textit{počet studujících}} = \frac{vol(B)}{vol(\Omega)} = \frac{18}{100} = \mathbf{0.18}$$

$$P(B^c \cap A_3) = \frac{\textit{počet mužů na fyzice}}{\textit{počet studujících}} = \frac{vol(B^c \cap A_3)}{vol(\Omega)} = \frac{16}{100} = \mathbf{0.16}$$

a

$$P(A_2|B) = \frac{\textit{počet žen na matematice}}{\textit{počet žen}} = \frac{vol(B \cap A_2)}{vol(B)} = \frac{9}{18} = \mathbf{0.5}\ .$$

Příklad 3.5 *Na fakultě je 50% studujících na informatice, 30% na matematice a 20% na fyzice. Z těch, co studují na informatice je 10% žen a (podobně) na matematice 30% je žen. Mezi studujícími je celkově 80% mužů.*

(a) Jaké procento z mužů studuje na matematice?

(b) Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný studující je žena na informatice?

(c) Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný studující fyziky je muž?

Řešení:
Opět si označme (jako u příkladu **3.5**) jevy

$A_1 =$ *"náhodně vybraný student je informatik"*

$A_2 =$ *"náhodně vybraný student je matematik"*

$A_3 =$ *"náhodně vybraný student je fyzik"*

$B =$ *"náhodně vybraný student je žena"*

Opět máme úplný systém disjunktních A_1, A_2, A_3 jevů na $\Omega =$ *"všichni studující"*. Tentokrát známe tyto pravděpodobnosti

$$P(A_1) = 0.5 \qquad P(A_2) = 0.3 \quad P(A_3) = 0.2$$
$$P(B|A_1) = 0.1 \quad P(B|A_2) = 0.3$$
$$P(B^c) = 0.8$$

(a) Chceme znát $P(A_2|B^c)$. Podle Bayesovy věty máme

$$P(A_2|B^c) = \frac{P(B^c|A_2) \cdot P(A_2)}{P(B^c)} = \frac{(1-0.3) \cdot 0.3}{0.8} = \frac{21}{80} = \mathbf{0.2625}\ .$$

(b) Chceme znát $P(B \cap A_1)$. Podle definice podmíněné pravděpodobnosti máme

$$P(B \cap A_1) = P(B|A_1) \cdot P(A_1) = 0.1 \cdot 0.5 = \mathbf{0.05}\ .$$

(c) Chceme znát $P(B^c|A_3)$. Protože neznáme $P(A_3|B^c)$, využijeme vztah

$$P(B^c|A_3) = \frac{P(B^c \cap A_3)}{P(A_3)}\ .$$

Z věty o úplné pravděpodobnosti máme

$$P(B^c \cap A_3) = P(B^c) - \sum_{j=1}^{2} P(B^c \cap A_j) = P(B^c) - \sum_{j=1}^{2} P(B^c|A_j) \cdot P(A_j) =$$

$$= 0.8 - \Big((1-0.1) \cdot 0.5 + (1-0.3) \cdot 0.3\Big) = 0.8 - 0.66 = 0.14$$

takže

$$P(B^c|A_3) = \frac{P(B^c \cap A_3)}{P(A_3)} = \frac{0.14}{0.2} = \mathbf{0.7}\ .$$

- -

Příklad opět můžeme řešit i bez explicitního použití výše uvedených vět (viz příklad **3.5**). Prostoru Ω přiřadíme opět velikost např. $vol(\Omega) = 100$.

Teď postupně můžeme začít vyplňovat tabulku níže:

- *počet studujících* $= vol(\Omega) = 100$
- *počet studujících na informatice* $= vol(A_1) = P(A_1) \cdot vol(\Omega) = 0.5 \cdot 100 = 50$ a podobně pro matematiku
- *počet žen na informatice* $= vol(B \cap A_1) = P(B|A_1) \cdot vol(A_1) = 0.1 \cdot 50 = 5$ a podobně pro matematiku
- *počet mužů na informatice* $= vol(B^c \cap A_1) = vol(A_1) - vol(B \cap A_1) = 50 - 5 = 45$ a podobně pro matematiku
- *počet mužů* $= vol(B^c) = P(B^c) \cdot vol(\Omega) = 0.8 \cdot 100 = 80$ a podobně pro ženy
- *počet mužů na fyzice* $= vol(B^c \cap A_3) = vol(B^c) - vol(B^c \cap A_1) - vol(B^c \cap A_2) = 80 - 45 - 21 = 14$ a podobně pro ženy na fyzice

	infor. (A_1)	matem. (A_2)	fyz. (A_3)	
muži (B^c)	45	21	14	80
ženy (B)	$0.1 \cdot 50 = 5$	$0.3 \cdot 30 = 9$	6	20
	50	30	20	100

Odsud pak ihned máme že

$$P(A_2|B^c) = \frac{\textit{počet mužů na matematice}}{\textit{počet mužů}} = \frac{vol(B^c \cap A_2)}{vol(B^c)} = \frac{21}{80} = \mathbf{0.2625}$$

$$P(B \cap A_1) = \frac{\textit{počet žen na informatice}}{\textit{počet studujících}} = \frac{vol(B \cap A_1)}{vol(\Omega)} = \frac{5}{100} = \mathbf{0.05}$$

a

$$P(B^c|A_3) = \frac{\textit{počet mužů na fyzice}}{\textit{počet studujících na fyzice}} = \frac{vol(B^c \cap A_3)}{vol(A_3)} = \frac{14}{14+6} = \mathbf{0.7}\ .$$

Příklad 3.6 *Automat vyrábí součástky ve tvaru obdélníka. Tolerance v šířce je překročena v 8 %, tolerance v délce je překročena v 7 % a v obou rozměrech ve 3 % vyrobených součástek.*

(a) Rozhodněte, zda jsou porušení rozměru v délce a šířce nezávislá či závislá.

(b) Vypočtěte pravděpodobnost toho, že náhodně vybraný výrobek má oba rozměry v toleranci.

Řešení:
Označme A porušení tolerance v šířce a B porušení tolerance v délce.

a) Potom je

$$P(A) = 0.08, \qquad P(B) = 0.07, \qquad P(A \cap B) = 0.03\,.$$

Náhodné jevy A a B budou nezávislé, právě když platí

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)\ .$$

To ale zjevně není pro náš případ pravda, protože $0.03 \neq 0.08 \cdot 0.07$. Porušení rozměrů jsou tedy závislé náhodné veličiny.

b) Dobrý výrobek je jev $A^c \cap B^c$, jehož pravděpodobnost je

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B^c) &= P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = 1 - 0.08 - 0.07 + 0.03 = 0.88\,. \end{aligned}$$

Dobrý výrobek získáme s pravděpodobností 88 %.