8. cvičení z STP

4. - 8. dubna 2022

Připomenutí: Jestliže máme dvě náhodné veličiny $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$, pak zobrazení

$$(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$$

nazýváme náhodný (dvousložkový) vektor.

Tedy náhodnému výsledku ω (tj. elementárnímu jevu) přiřadíme dvojici hodnot $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Např. vybranému člověku z množiny lidí Ω přiřadíme jeho tělesnou výšku a hmotnost.

(Obdobně vznikne náhodný vektor s více složkami. My se teď zaměříme hlavně na dvousložkový případ.)

Náhodný vektor (X, Y) umí přenést a vytvořit rozdělení pravděpodobnosti na $\mathbb{R}^2$ - a to tak, že každá "rozumná" množina $A \subseteq \mathbb{R}^2$ (např. otevřená množina nebo interval atd.) bude mít prostě pravděpodobnost

$$P_{(X,Y)}(A) := P\Big(\underbrace{(X,Y)^{-1}(A)}_{\{\omega \in \Omega \mid (X(\omega),Y(\omega)) \in A\}} \Big) .$$

Rozdělení této pravděpodobnosti $P_{(X,Y)}$ na $\mathbb{R}^2$ můžeme opět úplně popsat, pokud známe pravděpodobnosti jen některých speciálních intervalů a ty nám definují tzv. *sdruženou distribuční funkci* $F_{(X,Y)} : \mathbb{R}^2 \to \langle 0, 1 \rangle$ jako

$$F_{(X,Y)}(a, b) := P(X \leq a, Y \leq b)$$

Je dobré si uvědomit, že náhodný vektor (X, Y) můžeme snadno sestavit z libovolných dvou náhodných veličin X a Y. Zatímco ale k počítání s veličinou X nám stačí znát jen její distribuční funkci F_X, k práci s vektorem nám NESTAČÍ znalost distribučních funkcí jeho složek! Potřebujeme totiž znát, jaký je vztah mezi veličinami X a Y, a ten je schovaný právě ve sdružené distribuční funkci.

Opět si připomeňme, že pojem nezávislosti pro jevy umožňuje přirozeně definovat nezávislost veličin :

Definice: Veličiny X a Y jsou *nezávislé* $\Leftrightarrow$ $P(X \in I, Y \in J) = P(X \in I) \cdot P(Y \in J)$ pro libovolné intervaly $I, J \subseteq \mathbb{R}$.

Věta: X a Y jsou nezávislé $\Leftrightarrow$ $F_{(X,Y)}(a, b) = F_X(a) \cdot F_Y(b)$ pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$.

Příklad 8.1 *Délka hrany krychle je náhodná veličina* $X \sim \mathrm{Ro}(1, 2)$. *Určete distribuční funkci náhodné veličiny Y popisující plochu povrchu této krychle.*

Řešení:
Máme veličiny

X= *"délka hrany krychle"*

Y= *"plocha povrchu krychle"*

takže $Y = 6 \cdot X^2$ a pro distribuční funkci náhodné veličiny Y dostáváme

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(6X^2 \leq y) = P(X^2 \leq \tfrac{y}{6}) = \begin{cases} P\left(|X| \leq \sqrt{\tfrac{y}{6}}\,\right) = F_X\left(\sqrt{\tfrac{y}{6}}\,\right) & , \ y \geq 0 \\ P(\emptyset) = 0 & , \ y < 0 \ . \end{cases}$$

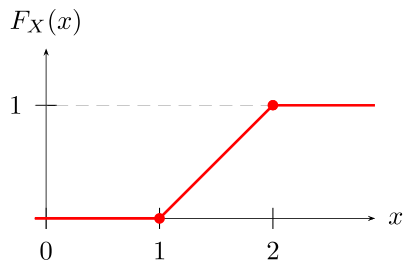
kde jsme využili toho, že obor hodnot pro X je $\langle 1,2\rangle$, tedy $X \geq 0$ a speciálně tak platí, že $|X| = X$.

Teď si už si jen vyjádříme F_X a dosadíme:

Pro veličinu $X \sim \mathrm{Ro}(1,2)$ je její hustota $f_X(x) = \begin{cases} 1, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$ a distribuční funkce

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ x-1, & 1 \leq x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

s grafem



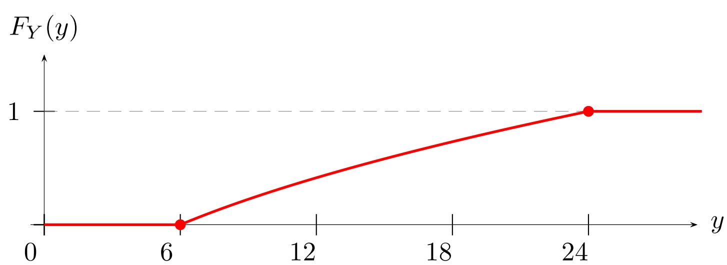
Do F_X (správně!) dosadíme $x = \sqrt{\frac{y}{6}}$ (pro $y \geq 0$) a přepíšeme podmínky pro y:

$$1 \leq \sqrt{\tfrac{y}{6}} \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq \tfrac{y}{6} \leq 4 \quad \Leftrightarrow \quad 6 \leq y \leq 24$$

(zbylé podmínky jsou podobné) a dostaneme tak

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 6 \\ \sqrt{\frac{y}{6}} - 1, & 6 \leq y \leq 24 \\ 1, & y > 24 \end{cases}$$

s grafem



Příklad 8.2 *Průměrný počet zákazníků během dne v první prodejně je 20, ve druhé prodejně 25. Předpokládáme, že oba počty se řídí Poissonovým rozdělením. Odvoďte rozdělení počtu zákazníků v obou prodejnách dohromady.*

Řešení:
Označme si veličiny

X = *"počet zákazníků během dne v 1. prodejně"*

Y = *"počet zákazníků během dne v 2. prodejně"*

Z = *"počet zákazníků během dne v obou prodejnách dohromady"*

kde X a Y budeme přirozeně pokládat za nezávislé. Máme

$$X \sim \text{Poiss}(\lambda), \text{ kde } \lambda = E(X) = 20$$

$$Y \sim \text{Poiss}(\mu), \text{ kde } \mu = E(Y) = 25$$

a

$$P(X = i) = \frac{\lambda^i}{i!} \cdot e^{-\lambda} \quad \text{a} \quad P(Y = j) = \frac{\mu^j}{j!} \cdot e^{-\mu}$$

Jelikož $Z = X + Y$ a případ $X + Y = k$ se rozloží na disjunktní možnosti $(X, Y) = (i, k - i)$ pro $i = 0, 1, \ldots, k$, dostáváme

$$P(Z = k) = P(X + Y = k) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} P(X = i,\ Y = k - i) \overset{\text{(nezávislost)}}{=} \sum_{i=0}^{k} P(X = i) \cdot P(Y = k - i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!} e^{-\mu} = e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{k!} \cdot \underbrace{\frac{k!}{i!(k-i)!}}_{\binom{k}{i}} \cdot \lambda^i \cdot \mu^{k-i} =$$

$$= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda^i \cdot \mu^{k-i} \overset{\text{(binom. věta)}}{=} \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} (\lambda + \mu)^k$$

tj. $Z \sim \text{Poiss}(\lambda + \mu)$ neboli $Z \sim \text{Poiss}(45)$.

Poznámka: Představme si, že jednotlivým prodejnám přiřadíme (čistě účelově) nějaké velikosti a a b (např. velikost plochy prodejny v m^2) tak, aby průměrný počet zákazníků na jednotku plochy byl v obou prodejnách stejný, tj. $\frac{\lambda}{a} = \frac{\mu}{b}$. Veličiny X a Y pak můžeme chápat jako počty událostí v intervalech délky a a b, přičemž v obou intervalech je "hustota událostí" stejná. Při tomto přístupu bude veličina Z představovat počet událostí v intervalu délky $a + b$, takže Poissonovo rozdělení se pak dá skutečně očekávat.

Připomenutí: Kovariance pro X a Y je definována jako

$$\text{cov}(X, Y) := E\Big((X - EX) \cdot (Y - EY)\Big) = \cdots = E(XY) - E(X) \cdot E(Y) .$$

Speciálně je $\text{cov}(X, X) = \text{var}(X)$.

Kovariance $\text{cov}(\cdot, \cdot)$ má tyto vlastnosti (X, Y, Z jsou veličiny, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ jsou konstanty):

- je lineární v každé složce zvlášť (tj. je bilineární), tedy:

$$\text{cov}(aX + bY, Z) = a \cdot \text{cov}(X, Z) + b \cdot \text{cov}(Y, Z)$$
$$\text{cov}(Z, aX + bY) = a \cdot \text{cov}(Z, X) + b \cdot \text{cov}(Z, Y)$$

- symetrická, tj. $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$
- pozitivně semi-definitní, tj. $\text{cov}(X, X) \geq 0$, kde navíc platí, že:
  $\text{cov}(X, X) = 0 \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}$, že $P(X = \alpha) = 1$ (neboli: X odpovídá konstantní veličině)
- $\text{cov}(X + c, Y + d) = \text{cov}(X, Y)$.

Platí : X a Y jsou nezávislé veliciny $\Longrightarrow$ $\text{cov}(X, Y) = 0$.

(POZOR: Opačná implikace obecně neplatí!!)

Příklad 8.3 *Nechť $X \sim \text{Ro}(0, 2)$ a $Y = X^2 + 1$.*

(a) Sestrojte distribuční funkci náhodné veličiny Y.

(b) Spočtěte $\text{cov}(X, Y)$.

(c) Rozhodněte, zda jsou X a Y nezávislé a proč.

Řešení:

(a) Distribuční funkce F_Y se dá získat pomocí distribuční funkce F_X. Před výpočtem si ještě uvědomme, že $X \geq 0$ (protože její obor hodnot je $\langle 0, 2 \rangle$). Speciálně tedy $|X| = X$. Pro distribuční funkci náhodné veličiny Y máme

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 + 1 \leq y) =$$

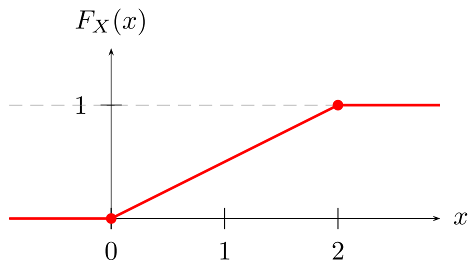
$$= P(X^2 \leq y - 1) = \begin{cases} P(\emptyset) = 0 & , \ y - 1 < 0 \\ P\left(|X| \leq \sqrt{y-1}\ \right) = F_X\left(\sqrt{y-1}\ \right) & , \ y - 1 \geq 0. \end{cases}$$

Teď už si stačí jen vyjádřit F_X a dosadit.

Pro veličinu $X \sim \text{Ro}(0, 2)$ je její hustota $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$ a distribuční funkce je pak

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x/2, & 0 \leq x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

s grafem



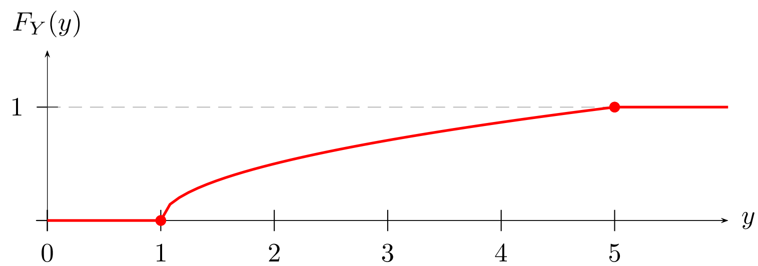
Do F_X (správně!) dosadíme $x = \sqrt{y-1}$ (pro $y - 1 \geq 0$) a přepíšeme podmínky pro y:

$$0 \leq \sqrt{y-1} \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq y-1 \leq 4 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq y \leq 5$$

(zbylé podmínky jsou podobné) a dostaneme tak

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 1 \\ \frac{\sqrt{y-1}}{2}, & 1 \leq y \leq 5 \\ 1, & y > 5 \end{cases}$$

s grafem



(b) Kovarianci vypočteme ze vztahu

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \mathrm{cov}(X, X^2+1) = \mathrm{cov}(X, X^2) = E(X \cdot X^2) - E(X) \cdot E(X^2)$$

Stačí si tedy pro $n \geq 1$ zjistit

$$E(X^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \cdot f_X(x)\ dx = \int_0^2 \frac{x^n}{2}\ dx = \left[\frac{x^{n+1}}{2(n+1)}\right]_0^2 = \frac{2^n}{n+1}$$

a dosazením dostaneme

$$\mathrm{cov}(X,Y) = 2 - 1 \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}\ .$$

(c) Protože $\mathrm{cov}(X,Y) \neq 0$, jsou veličiny X a Y závislé. Toto zjištění ovšem můžeme udělat i bez výpočtu kovariance:

Veličiny X a Y jsou funkčně propojené, takže stačí najít podmínky, které naráz nemůžou splnit, ale jednotlivě, s nenulovými pravděpodobnostmi, ano. Z předchozích úprav už víme, že pro $1 < y < 5$ platí

$$Y \leq y \quad \Leftrightarrow \quad X^2 + 1 \leq y \quad \Leftrightarrow \quad X \leq \sqrt{y-1}$$

a pravděpodobnosti těchto jevů jsou (z tvaru F_X a F_Y) ostře mezi 0 a 1. Takže např. z volby $y = 2$ dostaneme, že

$$Y \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad X \leq 1$$

takže

$$P(\underbrace{Y \leq 2,\ X > 1}_{\emptyset}) = 0 \neq \underbrace{P\left(Y \leq 2\right)}_{F_Y(2)=0.5} \cdot \underbrace{P\left(X > 1\right)}_{1-F_X(1)=0.5}$$

z čehož plyne, že veličiny X a Y jsou závislé.

Poznámka: Jak se dá očekávat, pokud jedna veličina závisí svými hodnotami na druhé, nejspíš nezávislé nebudou. Výjimkou je jen jeden případ a celá situaci se dá popsat takto:

Věta: Nechť X a $h(X)$ jsou obě náhodné veličiny, kde $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je borelovská funkce (např. spojitá). Pak X a $h(X)$ jsou nezávislé veličiny právě jen pokud

- $h(X)$ je konstantní veličina (přesněji: ex. $c \in \mathbb{R}$, že $P\big(h(X) = c\big) = 1$).

Příklad:

(1) Pro představu, kdy může třeba nastat případ nezávislosti v předchozí větě, si vezmeme $X \sim \mathrm{Ro}(1, 2)$ a funkci $h(x) = \max\{x, 3\}$. Vidíme, že ani veličina X ani funkce h nejsou konstantní, ale jejich složení $Y = h(X) = \max\{X, 3\} = 3$ už konstanta je. No a veličiny X a $Y = 3$ už samozřejmě nezávislé jsou.

(2) Ukažme si příklad dvou veličin tvaru X a $Y = h(X)$, které budou závislé a přitom bude platit $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$.

Stačí zvolit $X \sim \mathrm{Ro}(-1, 1)$ a $Y = X^2$. Podle věty výše X a Y budou závislé, protože Y není konstanta.

(Proč Y není (skoro všude) konstantní: protože X má spojité rozdělení, tak je $P(X = a) = 0$ pro každé $a \in \mathbb{R}$. Odsud ihned máme, že pro $b \in \mathbb{R}$ je $P(Y = b) = P(X^2 = b) = 0$. Tedy Y nemůže splňovat $P(Y = c) = 1$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$ a tudíž nemůže být konstanta.)

Současně s tím vidíme, že $E(X) = \frac{-1+1}{2} = 0$ a dále, že

$$E(X \cdot Y) = E(X \cdot X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} t^3 \cdot f_X(t)\ \mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \underbrace{t^3 \cdot \tfrac{1}{2}}_{\text{lichá funkce}}\ \mathrm{d}t = 0$$

A dále, střední hodnota $E(Y) = E(X^2)$ existuje, i když už nulová nebude.

Tím tedy dostaneme

$$\mathrm{cov}(X, Y) = \underbrace{E(XY)}_{=0} - \underbrace{E(X)}_{=0} \cdot E(Y) = 0\ .$$