MA2 - 1. konzultace

Diferenciální počet funkcí více proměnných

1 Funkce více proměnných. Grafy.

Budeme studovat funkce (zobrazení) $f : D \to \mathbb{R}$, kde $D \subseteq \mathbb{R}^n$ je definiční obor funkce f (značíme $D(f)$).

Př. Najděte a načrtněte definiční obor funkce $f(x,y) = \sqrt{\frac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$.

Řešení:
Výraz pod odmocninou musí být nezáporný a čitatel nesmí být nulový.

$$D(f): \ (x^2 - x + y^2 \geq 0 \ \wedge \ 2x - x^2 - y^2 > 0) \ \vee \ (x^2 - x + y^2 \leq 0 \ \wedge \ 2x - x^2 - y^2 < 0)$$

Zadání lze upravit na přehlednější tvar. Doplněním na čtverec, tedy použitím vzorce $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ např. pro

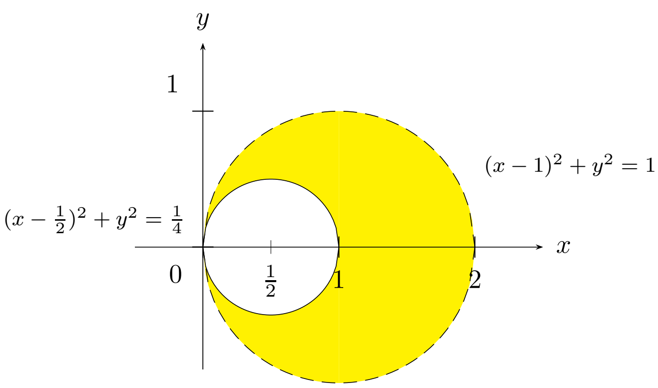
$$x^2 - x = \left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})^2\right) - (\tfrac{1}{2})^2 = (x - \tfrac{1}{2})^2 - (\tfrac{1}{2})^2$$

můžeme nerovnosti vyjádřit jako

$$D(f): \ \left((x-\tfrac{1}{2})^2 + y^2 \geq \tfrac{1}{4} \ \wedge \ (x-1)^2 + y^2 < 1\right) \ \vee \ \left((x-\tfrac{1}{2})^2 + y^2 \leq \tfrac{1}{4} \ \wedge \ (x-1)^2 + y^2 > 1\right)$$

což představuje oblasti vně a uvnitř kružnic. Z toho je vidět, že druhá závorka představuje prázdnou množinu, tedy celkem je

$$D(f): \ \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 \geq \tfrac{1}{4} \ \wedge \ (x-1)^2 + y^2 < 1$$



Definice: Pro funkci f z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ definujeme *vrstevnici na hladině* $c \in \mathbb{R}$ jako množinu

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \in D(f) \mid f(x_1, \ldots, x_n) = c\} \ .$$

Zde $D(f)$ je definiční obor funkce f.

(Zdůrazněme, že vrstevnice obvykle bývají objekty s dimenzí $n-1$. Ale není to vždy pravidlem!)

Poznámka: Nechť g je nějaká funkce z $\langle 0,+\infty)$ do $\mathbb{R}$. Graf funkce tvaru $f(x,y)=g(\sqrt{x^2+y^2})$ je rotačně symetrický podle osy z, a vznikne rotací grafu funkce g kolem osy z. Vrstevnice funkce f jsou složeny z kružnic. (Nemusí to ale být vždy jen prosté kružnice, nýbrž také např. mezikruží).

Př. Pro následující funkce f vždy načrtněte graf a popište vrstevnice:

(a) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ (kužel)

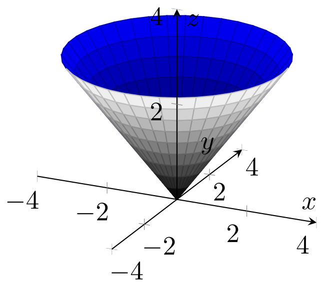
(b) $f(x,y)=x^2+2y^2$ (eliptický paraboloid),

(c) $f(x,y)=xy$ (hyperbolický paraboloid),

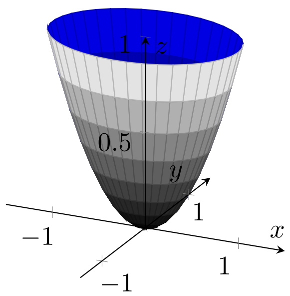
(d) $f(x,y)=x^2-y^2$ (hyperbolický paraboloid).

Řešení:
Označme si $r=\sqrt{x^2+y^2}$. Hodnota r představuje vzdálenost bodu (x,y,z) od 3. osy (tj. osy z).

(a) Graf funkce f vznikne rotací grafu funkce $g(r)=r$, pro $r\geq 0$. Jde tedy o kužel a vrstevnice jsou soustředné kružnice:



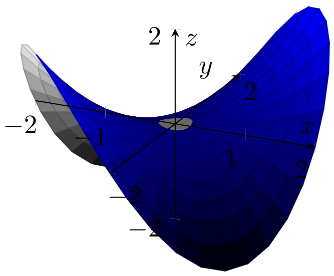
(b) Uvažujme nejdříve funkci $h(x,y)=x^2+y^2=(\sqrt{x^2+y^2})^2$. Její graf (tzv. rotační paraboloid) vznikne rotací grafu funkce $g(r)=r^2$, pro $r\geq 0$ (tj. rotací paraboly). Graf funkce $f(x,y)=x^2+2y^2$ se od něj bude lišit zúžením ve směru y. Průřezy (tj. vrstevnice) grafu f tak budou soustředné elipsy a celý graf se pak označuje jako eliptický paraboloid.



(c)+(d) Zde se hodí všimnout si, že grafy funkcí v (c) a (d) jsou navzájem otočené o $\frac{\pi}{4}$ (a současně přenásobené hodnotou $\frac{1}{2}$). To zjistíme, když si zavedeme nové proměnné $x=\frac{\sqrt{2}}{2}(a-b)$ a $y=\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$ neboli použijeme ortogonální transformaci

$$\Phi: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & -\sin(\frac{\pi}{4}) \\ \sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Pak pro $f(x,y)=xy$ je $(f\circ\Phi)(a,b)=\frac{1}{2}(a-b)(a+b)=\frac{1}{2}(a^2-b^2)$. Stačí si tedy rozmyslet graf jen pro jeden z případů. Vrstevnice jsou opět zřejmě (soustředné) hyperboly a jejich asymptoty. A výsledný graf se nazývá hyperbolický paraboloid (nebo také sedlová plocha) a je to příklad plochy s tzv. zápornou křivostí (stejně jako předchozí jednodílný hyperboloid).



2 Okolí. Vnitřek, uzávěr, hranice.

Motivace:

Pojem *otevřené* množiny intuitivně zavádíme jako množinu, která s každým bodem obsahuje ještě dost prostoru kolem něj (je to kvůli pozdějšímu použití pro derivování - potřebujeme se k bodu přiblížit "odkudkoliv").

Pojmem *uzavřené* množiny zase intuitivně myslíme takovou množinu, ze které nemůžeme vypadnout při "limitách posloupností," tj. taková množina obsahuje všechny body, ke kterým se můžeme z této množiny přiblížit libovolně blízko.

Kupodivu, tyto dva pojmy jsou nakonec navzájem doplňkové (viz níže).

Definice:

Okolím $U_\varepsilon(a_0)$ (tzv. otevřenou koulí) s poloměrem $\varepsilon > 0$ a středem v bodě $a_0 \in \mathbb{R}^n$ označujeme množinu

$$U_\varepsilon(a_0) \overset{\text{def}}{=} \{a \in \mathbb{R}^n \mid ||a - a_0|| < \varepsilon\}$$

kde $||a - a_0||$ je *eukleidovská vzdálenost* bodů a a a_0, tj. pro

$$a_0 = (x_1, \ldots, x_n)$$

a

$$a = (y_1, \ldots, y_n)$$

je

$$||a - a_0|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}\ .$$

Připomeňme si, že pro množinu $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si

- *vnitřek A°* množiny A definujeme jako množinu všech bodů $a \in A$, které jsou v A i s nějakým okolím:

$$a \in A^\circ \overset{\text{def}}{\iff} (\exists\, \varepsilon > 0)\ \ U_\varepsilon(a) \subseteq A$$

- *hranice ∂A* množiny A je množina všech bodů $a \in \mathbb{R}^n$, jejichž libovolná okolí zasahují jak do samotné množiny A, tak do jejího doplňku $\mathbb{R}^n \setminus A$:

$$a \in \partial A \overset{\text{def}}{\iff} (\forall\, \varepsilon > 0)\ \ U_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset \ \ \wedge \ \ U_\varepsilon(a) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset$$

- *uzávěr* $\overline{A}$ množiny A si definujeme jako množinu

$$\overline{A} \stackrel{\text{def}}{=} A \cup \partial A$$

neboli (jak se dá snadno ověřit) jako množinu všech bodů $a \in \mathbb{R}^n$, jejichž libovolná okolí zasahují do množiny A:

$$a \in \overline{A} \iff (\forall\, \varepsilon > 0)\;\; U_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset$$

Kromě toho ještě platí, že

$$\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$$

a tedy

$$\overline{A} = A^\circ \;\, \dot\cup \;\, \partial A$$

kde "$\dot\cup$" znamená disjunktní sjednocení. Pro libovolnou množinu A se dále celý prostor $\mathbb{R}^n$ vždy disjunktně rozloží na vnitřek A°, hranici ∂A a *vnějšek* $(\mathbb{R}^n \setminus A)^\circ$:

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{A^\circ}_{\text{vnitřek}} \;\dot\cup\; \underbrace{\partial A}_{\text{hranice}} \;\dot\cup\; \underbrace{(\mathbb{R}^n \setminus A)^\circ}_{\text{vnějšek}}$$

A nakonec si ještě (teď už skutečně) definujme, že

- množina A je *otevřená* $\stackrel{\text{def}}{\iff} A = A^\circ$ (tj. A je rovna svému vnitřku)
- množina A je *uzavřená* $\stackrel{\text{def}}{\iff} A = \overline{A}$ (tj. A je rovna svému uzávěru).

A platí, že

$$A \text{ je otevřená} \iff \mathbb{R}^n \setminus A \text{ je uzavřená}$$

(tj. otevřenost a uzavřenost jsou vzájemně doplňkové pojmy).

Poznámka: Při zdůvodnění toho, že nějaká množina je otevřená, případně uzavřená, se dá využít následující věta:

Jestliže $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce (tento pojem bude sice definován později, ale např. polynom určitě spojitá funkce bude), pak

- množina $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(x_1, \ldots, x_n) > 0\}$ je otevřená,
- množina $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(x_1, \ldots, x_n) \geq 0\}$ je uzavřená.

Př. Určete vnitřek, hranici a uzávěr definičního funkce funkce $f(x, y) = \sqrt{\frac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$ (viz první příklad).

Řešení:
Tento příklad je určený pro "intuitivní" řešení pomocí náčrtů daných množin.

Definiční obor funkce f už máme určený jako:

$$M = D(f):\;\; \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 \geq \tfrac{1}{4} \;\wedge\; (x-1)^2 + y^2 < 1\,.$$

- (***vnitřek***) M° : $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 > \frac{1}{4} \;\wedge\; (x-1)^2 + y^2 < 1.$
- (***uzávěr***) $\overline{M}$: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \geq \frac{1}{4} \;\wedge\; (x-1)^2 + y^2 \leq 1.$
- (***hranice***) $\partial M = \overline{M} \setminus M^\circ$: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \;\vee\; (x-1)^2 + y^2 = 1$
  (POZOR: je tu jiná logická spojka!)

Poznámka: Můžeme si všimnout, že vnitřek (uzávěr, resp.) jsme v předchozím příkladě získali tak, že jsme z neostrých nerovností udělali ostré (z ostrých neostré, resp.). Ale POZOR, takhle to obecně nefunguje - viz tento příklad:

Lze zvolit spojitou funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tak, aby pro množiny

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) > 0\}$$

a

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) \geq 0\}$$

bylo

$$\overline{A} \subsetneqq B \quad \text{a} \quad A \subsetneqq B^\circ$$

(neboli: po přidání neostré nerovnosti je uzávěr obecně MENŠÍ a po ubrání neostré nerovnosti je vnitřek obecně VĚTŠÍ.)

Taková funkce je např.

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ 0, & x \in \langle 0, 1 \rangle, \\ -(x-1)^2, & x > 1 \ . \end{cases}$$

kde je pak $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\}$ a $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 1\}$.

Problém vzniká proto, že zatímco vrstevnice

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = c\}$$

pro hladiny $c \neq 0$ jsou křivky (objekty s dimenzí 1), tak pro $c = 0$ je vrstevnice plocha (objekt s dimenzí 2).

3 Limita. Spojitost.

Motivace:

Jestliže chceme zjišťovat, jak se chová funkce v okolí nějakého bodu ve smyslu limity, pak se k tomuto bodu potřebujeme přiblížit pomocí bodu z definičního oboru dané funkce. Přitom však tyto body chceme mít jiné, než je samotný původní bod, ve kterém limitu zjišťujeme. To vede k následujícím pojmům:

- *Prstencovým okolím $P_\varepsilon(a_0)$* s poloměrem $\varepsilon > 0$ a středem v bodě $a_0 \in \mathbb{R}^n$ označujeme množinu

$$P_\varepsilon(a_0) \stackrel{\text{def}}{=} U_\varepsilon(a_0) \setminus \{a_0\} = \{a \in \mathbb{R}^n \mid 0 < ||a - a_0|| < \varepsilon\}$$

- bod a_0 je *hromadným bodem množiny M*, jestliže v každém svém okolí má nějaký bod této množiny, ale jiný než a_0, tj.:

$$(\forall\ \varepsilon > 0) \quad P_\varepsilon(a) \cap M \neq \emptyset$$

  (hromadný bod je tedy určitě bodem uzávěru množiny M, ale není "osamocený").

Definice limity funkce: Nechť $f : D \to \mathbb{R}$ je funkce s definičním oborem $D \subseteq \mathbb{R}^n$ a $a_0 \in \mathbb{R}^n$ je hromadný bod tohoto definičního oboru D. Následující definice a značení znamená, že hodnota $c \in \mathbb{R}$ je limitou funkce f v bodě a_0:

$$\lim_{a \to a_0} f(a) = c \stackrel{\text{def}}{\iff} (\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ \delta > 0)(\forall a \in D) \quad \underbrace{0 < \|a - a_0\| < \delta}_{a \in P_\delta(a_0)} \ \Rightarrow \ \underbrace{|f(a) - c| < \varepsilon}_{f(a) \in U_\varepsilon(c)}$$

(tj. když jsme v dostatečně malém prstencovém okolí $P_\delta(a_0)$ bodu a_0, pak se body odsud zobrazují funkcí f do zvoleného malého okolí $U_\varepsilon(c)$ hodnoty c.)

Definice spojitosti funkce: Funkce $f : D \to \mathbb{R}$ je spojitá v bodě $a_0 \in D \Leftrightarrow \lim_{a \to a_0} f(a) = f(a_0)$.

Funkce f je nazývá spojitá, jestliže je spojitá v každém bodě svého definičního oboru.

Př. Zjistěte, zda existuje limita $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$.

Řešení:
Definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$ je

$$D(f): \quad x \neq y \, .$$

Bod $(0,0)$ je zřejmě hromadný bod množiny $D(f)$. Abychom zjistili, jakou hodnotu by případná limita měla mít, vyzkoušíme se přiblížit k počátku po různých přímkách, konkrétně po přímkách $y = kx$, kde $k \neq 1$. Pak máme

$$\lim_{x\to 0} f(x,kx) = \lim_{x\to 0} \frac{x+kx}{x-kx} = \frac{1+k}{1-k} \, .$$

Tato hodnota je ale různá pro různé k. Původní limita funkce f tedy neexistuje.

Př. Zjistěte, zda existuje následující limita a pokud ano, určete její hodnotu $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|x|+|y|}$

Řešení:
Definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{xy}{|x|+|y|}$ je

$$D(f): \quad (x,y) \neq (0,0).$$

Tedy jmenovatel ve zlomku se vynuluje jen v jediném bodě. Nemáme tudíž možnost použít kritérium pro neexistenci limity (nemáme totiž dost velkou množinu, co by vynulovala jmenovatel). Zde vidíme, jak důležité pro další úvahy je určit si definiční obor funkce.

Co teď dál? Funkce ve jmenovateli by (bez absolutních hodnot) byla vlastně polynomem se stupněm 1. Na druhé straně v čitateli je zase polynom se stupněm 2, který by nejspíš měl převážit jmenovatele. Tušíme tedy, že by limita mohla existovat (a být nulová).

Zkusíme si to na nějakém přiblížení, např. po ose x (tj. při $y = 0$):

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

Tedy jediný kandidát na limitu je $c = 0$. Teď ukážeme, že to skutečně limita je. Použijeme přitom tento odhad:

$$|x|, |y| \leq |x| + |y|$$

Pro $(x,y) \neq (0,0)$ tak dostaneme

$$0 \leq \big|f(x,y) - \underbrace{c}_{=0}\big| = \frac{|x|\cdot|y|}{|x|+|y|} \leq \frac{(|x|+|y|)^2}{|x|+|y|} = |x| + |y|$$

Základní trik je použít takový odhad čitatele, který se pak zkrátí se jmenovatelem (a současně výsledek půjde pak k nule).

Z věty o limitě sevřené funkce pak máme, že

$$0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 \;\leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \big|f(x,y) - c\big| \;\leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} |x| + |y| \;= 0$$

kde jsme použili to, že funkce $g(x,y) = |x| + |y|$ je spojitá, protože je to složení spojitých funkcí (polynom, absolutní hodnota).

Nebo-li dokázali jsme, že $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = c = 0$.

Poznámka: Existenci limity $\lim_{a\to a_0} f(a) = c$ si ještě procvičíme pomocí její definice. Má tedy platit, že

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall a \in D(f) \quad 0 < \|a - a_0\| < \delta \ \Rightarrow \ |f(a) - c| < \varepsilon \, .$$

Opět použijeme stejný odhad pro $c = 0$ a ještě využijeme toho, že $|x|, |y| \le \sqrt{x^2 + y^2}$:

$$\big|f(x,y) - c\big| = \big|f(x,y)\big| \le |x| + |y| \le 2\sqrt{x^2+y^2} = 2 \cdot \|(x,y) - (0,0)\|$$

Pro $\varepsilon > 0$ teď stačí vzít $\delta := \varepsilon/2$ a pak pro $a_0 = (0,0)$ a $a = (x,y)$ takové, že $0 < \|a - a_0\| < \delta$ určitě máme, že

$$|f(a) - 0| \le \cdots \le 2 \cdot \|a - a_0\| < 2\delta = \varepsilon \, .$$

4 Derivace podle vektoru (ve směru). Parciální derivace.

Definice derivace podle vektoru (ve směru): Nechť f je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ a nechť a_0 je vnitřní bod jejího definičního oboru. *Derivace podle vektoru* $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$ funkce f v bodě a_0 je definována jako následující (konečná) hodnota

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{h}}(a_0) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(a_0 + t\vec{h})|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_0 + t\vec{h}) - f(a_0)}{t}$$

Neboli: Definiční obor $D(f)$ "projíždíme" po přímce $\varphi(t) = a_0 + t\vec{h}$, kde t představuje čas a $\vec{h}$ tím pádem vektor rychlosti pohybu po dané přímce. A ptáme se, jak se rychle se přitom budou měnit hodnoty funkce f při průchodu bodem a_0. Je zřejmé, že čím větší bude rychlost průchodu $\vec{h}$, tím rychlejší budou i změny hodnot funkce f.

Jestliže vektor $\vec{h}$ má jednotkovou délku, tj. $\|\vec{h}\| = 1$, nazývá se směrem a derivaci podle vektoru $\vec{h}$ pak také označujeme jako derivaci ve směru (nebo jako směrovou derivaci).

Definice parciální derivace: Speciálně definujeme tzv. *parciální derivaci podle i-té proměnné* (dejme tomu, že se bude jmenovat x_i) jako

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_0) := \frac{\partial f}{\partial \vec{e}_i}(a_0)$$

kde $\vec{e}_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i-\text{tá pozice}}, 0, \dots, 0)$ je vektor standardní báze.

Konkrétně pro funkci $f : D \to \mathbb{R}$, kde $D \subseteq \mathbb{R}^2$ a vnitřní bod $a_0 = (x_0, y_0)$ definičního oboru $D(f) = D$ je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, y_0)_{|x=x_0}$$

tedy funkci f stačí "obyčejně"derivovat podle proměnné x, kde druhou proměnnou y bereme na chvíli jako konstantu.

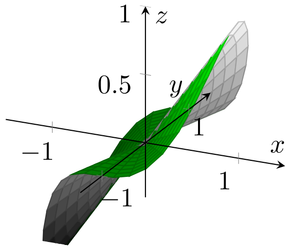
Př. Najděte parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x}$ funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & , \ (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & , \ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

ve všech bodech $a = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Je funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ spojitá v bodě $a_0 = (0,0)$?

Řešení:

Graf funkce f:



V bodech $a = (x, y) \neq (0, 0)$ je předpis funkce f v nějakém okolí $U_\varepsilon(a)$ ve tvaru $f(x, y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$. Můžeme tak standardně použít postupy o derivování funkcí:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3}{x^2+y^2}\right)(a) = \frac{3x^2(x^2+y^2) - 2x \cdot x^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

Pro bod $a = (0, 0)$, který nemá v žádném svém okolí "jednotný" předpis funkce f, musíme použít (explicitní) definici:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{t^3}{t^2+0} - 0}{t} = 1 \ .$$

Celkem jsme tedy dostali, že

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & \text{pro } (x,y) \neq (0,0), \\ 1, & \text{pro } (x,y) = (0,0) \ . \end{cases}$$

a podíváme se, jestli je tato funkce spojitá v bodě $(0, 0)$. Když si vezmeme např. přiblížení po ose y (tj. $x = 0$) dostaneme, že

$$\lim_{y \to 0} \tfrac{\partial f}{\partial x}(0, y) = \lim_{y \to 0} 0 = 0 \ .$$

Tedy limita

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \tfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

nemůže být rovna 1, což je hodnota $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$, a tedy funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ *není spojitá v bodě* $(0, 0)$.

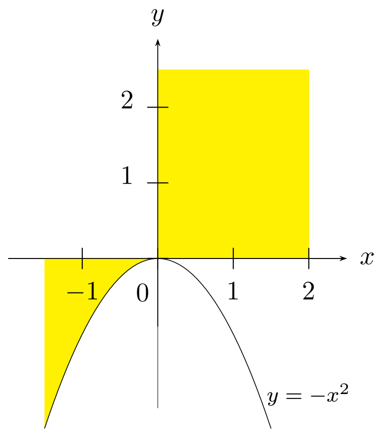
Na druhou stranu, jak je snadno vidět díky předpisu a spojitosti funkcí, v bodech $a = (x, y) \neq (0, 0)$ funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ spojitá je.

Př. Pro funkci $f(x, y) = (xy)^{\sqrt{x^2+y}}$ najděte parciální derivace a obory jejich existence.

Řešení:

Základ exponenciální funkce musí být nezáporný a výraz 0^0 není definován. Definiční obor je tedy

$$D(f) : x^2 + y \geq 0 \ \wedge \ xy \geq 0 \ \wedge \ \underbrace{\neg(x^2 + y = 0 \ \wedge \ xy = 0)}_{(x,y) \neq (0,0)} \ .$$



Jeho vnitřek (tj. množina, kde se můžeme ptát na parciální derivace) je otevřená množina

$$D(f)^\circ : y > -x^2 \ \wedge \ xy > 0 \ .$$

Ve všech bodech vnitřku můžeme použít pravidla o derivování součinu funkcí, složené funkce atd.

Funkci si pro $(x,y) \in D(f)^\circ$ vhodně přepíšeme jako $f(x,y) = (xy)^{\sqrt{x^2+y}} = e^{\ln(xy)\sqrt{x^2+y}}$. Parciální derivace jsou:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{\ln(xy)\sqrt{x^2+y}} \cdot \left[\frac{y}{xy}\sqrt{x^2+y} + \ln(xy)\frac{x}{\sqrt{x^2+y}} \right] = e^{\ln(xy)\sqrt{x^2+y}} \cdot \frac{x^2+y+x^2\ln(xy)}{x\sqrt{x^2+y}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{\ln(xy)\sqrt{x^2+y}} \cdot \left[\frac{x}{xy}\sqrt{x^2+y} + \ln(xy)\frac{1}{2\sqrt{x^2+y}} \right] = e^{\ln(xy)\sqrt{x^2+y}} \cdot \frac{2x^2+2y+y\ln(xy)}{2y\sqrt{x^2+y}}$$

Obě parciální derivace evidentně existují všude v $D(f)^\circ$.