MA2 - 2. konzultace

Derivace (Totální diferenciál). Tečný prostor. Derivace složené funkce, derivace vyšších řádů. Jakobiho matice.

1 Derivace (Totální diferenciál). Linearizace. Tečný prostor.

Definice (úplné) derivace:

Derivace (totální diferenciál) funkce f z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ ve vnitřním bodě $a_0 \in D(f)$ definičního oboru $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$ je takové lineární zobrazení (označené jako $f'(a_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$), které je nejlepší aproximací funkce f v bodě a_0 v tomto smyslu:

Rozdíl hodnot funkcí $f(a)$ a

$$g(a) := f(a_0) + f'(a_0)[a - a_0]$$

klesá v okolí bodu a_0 rychleji než $\|a - a_0\|$, tj.

$$\lim_{a \to a_0} \tfrac{f(a)-g(a)}{\|a-a_0\|} = \lim_{a \to a_0} \tfrac{f(a)-f(a_0)-f'(a_0)[a-a_0]}{\|a-a_0\|} = 0 \ .$$

Funkce g se nazývá *linearizací* funkce f v bodě a_0.

Také to můžeme říct tak, že existuje $\varepsilon > 0$ a funkce ω definovaná na ε-okolí počátku souřadnic $\vec{0}$ taková, že

$$\lim_{\vec{u} \to \vec{0}} \omega(\vec{u}) = 0$$

a platí, že

$$f(a_0 + \vec{h}) = f(a_0) + f'(a_0)[\vec{h}] + \|\vec{h}\| \cdot \omega(\vec{h})$$

pro každý vektor $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$ takový, že $\|\vec{h}\| < \varepsilon$.

Věty o derivaci:

- Pokud existuje derivace $f'(a_0)$, pak také existují derivace $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0)$ podle vektoru pro každý vektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ a platí, že

  $$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0) = f'(a_0)[\vec{u}] \ .$$

  Speciálně, existují pak všechny parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_0)$ a matice zobrazení $f'(a_0)$ ve standardní bázi má tvar

  $$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_0) \ , \dots , \ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_0) \right) \ .$$

  (Pro jednoduchost zápisu, budeme ztotožňovat zobrazení a jeho matici ve standardní bázi.)

  POZOR: Pouhá existence parciálních derivací ještě nezaručuje existenci (úplné) derivace! Ta je mnohem komplikovanější objekt. Máme ale tuto postačující podmínku:

- Nechť všechny parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ existují a *jsou spojité* na otevřené množině $G \subseteq \mathbb{R}^n$. Pak derivace $f'(a)$ existuje v každém bodě $a \in G$.

Definice tečné roviny:

Nechť existuje derivace $f'(a_0)$ funkce f v bodě a_0. Tečnou rovinu ke grafu funkce f v bodě definujeme jako graf linearizace funkce f v tomto bodě, tj. jako graf funkce $g(a) = f(a_0) + f'(a_0)[a - a_0]$. Tečná rovina má tedy předpis

$$z = f(a_0) + f'(a_0)[a - a_0]$$

Pro případ dvou proměnných a bodu $a_0 = (x_0, y_0)$ má tečná rovina rovnici

$$z = f(a_0) + \tfrac{\partial f}{\partial x}(a_0) \cdot (x - x_0) + \tfrac{\partial f}{\partial y}(a_0) \cdot (y - y_0)\ .$$

Př. Pro funkci $f(x, y) = xy + \sin(x - y)$ v bodě $a_0 = (2, 2)$ určete derivaci, tečnou rovinu a úhel, který tečná rovina svírá se základnou.

Řešení:

Ze spojitosti parciálních derivací (které vzápětí spočítáme) zjistíme, že derivace v bodě $a_0 = (2, 2)$ skutečně existuje.

Pro $a_0 = (2, 2)$ tedy máme

$$f'(a_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_0), \frac{\partial f}{\partial y}(a_0)\right) = \Big(y + \cos(x - y),\ x - \cos(x - y)\Big)(a_0) = (3, 1)\ .$$

Tečná rovina má rovnici:

$$z = f(a_0) + f'(a_0)[a - a_0] = f(a_0) + \tfrac{\partial f}{\partial x}(a_0) \cdot (x - x_0) + \tfrac{\partial f}{\partial y}(a_0) \cdot (y - y_0) =$$

$$= 4 + 3(x - 2) + y - 2$$

neboli

$$3x + y - z = 4\ .$$

Úhel $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ tečné roviny se základnou je určen pomocí normálového vektoru roviny $\vec{n}_1 = (3, 1, -1)$ a normálového vektoru základny $\vec{n}_2 = (0, 0, 1)$ jako

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{||\vec{n}_1|| \cdot ||\vec{n}_2||} = \frac{1}{\sqrt{3^2 + 1^2 + (-1)^2} \cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{11}},$$

tedy

$$\alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{11}}\right) \doteq 72.45^\circ\ .$$

Definice gradientu:

Nechť existuje $f'(a_0)$. *Gradient funkce* f v bodě a_0 je takový vektor $\mathrm{grad} f(a_0) \in \mathbb{R}^n$, že pro každé $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$ je

$$f'(a_0)[\vec{h}] = \mathrm{grad} f(a_0) \cdot \vec{h}$$

(kde $\cdot$ je standardní skalární součin). Tedy ve standardní bázi máme

$$\mathrm{grad} f(a_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

a proto také gradient i derivaci budeme ztotožňovat.

Věta o gradientu:

Jestliže gradient v bodě a_0 je nenulový, pak jeho směr, tj. vektor $\frac{\text{grad}f(a_0)}{\|\text{grad}f(a_0)\|}$, je směrem největšího růstu funkce v bodě a_0. Tedy největší hodnotou, jaké může nabýt výraz $\frac{\partial f}{\partial \vec{h}}(a_0) = f'(a_0)[\vec{h}]$ pro vektor $\vec{h}$ takový, že $\|\vec{h}\| = 1$ je hodnota $\|\text{grad}f(a_0)\|$ a to pouze pokud $\vec{h}$ je směrem gradientu.

To je okamžitý důsledek Cauchy-Schwartzovy nerovnosti, která říká, že pro každé dva vektory $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$|\vec{v} \cdot \vec{w}| \leq \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|$$

a rovnost zde nastává pouze pokud jsou vektory $\vec{v}$ a $\vec{w}$ lineárně závislé.

Tedy skutečně dostáváme, že pokud $\|\vec{h}\| = 1$, pak

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \vec{h}}(a_0)\right| = \left|\text{grad}f(a_0) \cdot \vec{h}\right| \leq \|\text{grad}f(a_0)\| \cdot \|\vec{h}\| = \|\text{grad}f(a_0)\| \ .$$

Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ je *směrem nulového růstu* funkce f v bodě a_0 právě když $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a_0) = 0$ (a vektor $\vec{v}$ je směr, tj. $\|\vec{v}\| = 1$.)

Poznámka: Nechť pro funkci $f(x,y)$ existuje $\text{grad}f(a_0) \in \mathbb{R}^3$ v bodě $a_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Pak vektor $\vec{U} \in \mathbb{R}^3$ leží ve vektorovém prostoru příslušnému tečné rovině v bodě a_0 právě když je

$$(\text{grad}f(a_0), -1) \cdot \vec{U} = 0 \ ,$$

kde $(\text{grad}f(a_0), -1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_0), \frac{\partial f}{\partial y}(a_0), -1\right)$

Je to proto, že rovnice tečné roviny má tvar $z = f(a_0) + \text{grad}f(a_0)[a - a_0]$ neboli

$$(\text{grad}f(a_0), -1) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - f(a_0) \end{pmatrix} = 0 \ .$$

Neboli $(\text{grad}f(a_0), -1)$ je normálový vektor tečné roviny (a jejího přidruženého vektorového prostoru).

Nechť je nyní $\vec{U} = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. Nechť $\vec{u} = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ představuje vektor z jeho prvních dvou souřadnic (neboli $\vec{u}$ je projekce $\vec{U}$ do základny). Pak $\vec{U}$ leží v tečné rovině právě když

$$0 = (\text{grad}f(a_0), -1) \cdot \vec{U} = \alpha \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(a_0) + \beta \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(a_0) + \gamma \cdot (-1) = f'(a_0)[\vec{u}] - \gamma = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0) - \gamma$$

neboli když

$$\gamma = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0), \quad \text{pro} \quad \vec{u} = (\alpha, \beta)$$

tudíž vektor $\vec{U}$ je prostě tvaru

$$\vec{U} = \left(\vec{u}, \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0)\right) \ .$$

Současně si všimněme, že úhel $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$, který svírá vektor $\vec{U} = (\alpha, \beta, \gamma) = \left(\vec{u}, \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0)\right)$ se základnou je pro $\vec{u} \neq (0,0)$ dán jako

$$\text{tg}(\varphi) = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0) = \frac{f'(a_0)[\vec{u}]}{\|\vec{u}\|} \ .$$

Př. Pro funkci $f(x,y) = xy + \sin(x - y)$ v bodě $a_0 = (2,2)$ určete

(a) směr největšího a směry nulového růstu.

(b) derivaci ve směru $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

(c) vektory $\vec{U}_1 = (0, 1, ?)$ a $\vec{U}_2 = (2, 1, ?)$ tak, aby ležely ve vektorovém prostoru odpovídajícímu tečné rovině. Který z vektoru ukazuje směrem většího stoupání v tečné rovině?

Řešení:
Z předchozího víme, že $f'(a_0) = (3, 1)$.

(a) Směrem největšího růstu $\vec{v}$ je směr gradientu (pokud je nenulový), tj. je to směr daný vektorem $\operatorname{grad} f(a_0) = (3, 1)$ (konkrétně jde o směr $\vec{v} = \frac{\operatorname{grad} f(a_0)}{\|\operatorname{grad} f(a_0)\|} = \frac{1}{\sqrt{10}}(3, 1)$).

Směry nulového růstu $\vec{w}$ jsou kolmé ke gradientu, tj. jde o směry určené vektory $(1, -3)$ a $(-1, 3)$, konkretní směry (tj. znormované vektory) tedy jsou

$$\vec{w}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right) \quad \text{a} \quad \vec{w}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right) \; .$$

(b) Máme

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0) = f'(a_0)[\vec{u}] = (3,\ 1) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \sqrt{2}$$

(c) Potřebujeme zjistit derivace podle vektorů $\vec{u}_1 = (0, 1)$ a $\vec{u}_2 = (2, 1)$:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}_1}(a_0) = df(a_0)[\vec{u}_1] = (3,\ 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

a

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}_2}(a_0) = df(a_0)[\vec{u}_2] = (3,\ 1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 7$$

Všimneme si, že každý z vektorů $\vec{u}_1$ a $\vec{u}_2$ má jinou délku.

Jde tedy o vektory $\vec{U}_1 = (0, 1, 1)$ a $\vec{U}_2 = (2, 1, 7)$, které svírají se základnou postupně úhly φ_1 a φ_2 takové, že

$$\operatorname{tg}(\varphi_1) = \frac{1}{\|\vec{u}_1\|} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{u}_1}(a_0) = \frac{1}{1} = 1$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_2) = \frac{1}{\|\vec{u}_2\|} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{u}_2}(a_0) = \frac{7}{\sqrt{54}} \; (< 1)$$

takže větší stoupání v tečné rovině ukazuje vektor v $\vec{U}_1$.

Př. Pomocí diferenciálu (vhodné funkce ve vhodném bodě) spočtěte přibližnou hodnotu výrazu $(1.04)^{2.02}$.

Řešení:
Budeme uvažovat funkci

$$f(x, y) = x^y = e^{y \ln x}$$

(pro jednoduchost s definičním oborem $x, y > 0$) a najdeme její linearizaci g v bodě $a_0 = (1, 2)$. Hodnotu v bodě $a_1 = (1.04, 2.02)$ pak vyjádříme přibližně jako

$$f(a_1) \doteq g(a_1) = f(a_0) + f'(a_0)[\vec{h}]$$

kde $\vec{h} = a_1 - a_0 = (0.04, 0.02)$.

Máme tedy

$$f'(a_0) = \left(\frac{y}{x} e^{y \ln x},\ \ln x \cdot e^{y \ln x}\right)(a_0) = (2,0)$$

takže

$$f(a_1) \doteq g(a_1) = f(a_0) + f'(a_0)[\vec{h}] = 1 + (2,0)\begin{pmatrix} 0.04 \\ 0.02 \end{pmatrix} =$$

$$= 1 + 0.08 = 1.08$$

(Pro srovnání: přesná hodnota zaokrouhlená na 5 desetinných míst je $f(a_1) \doteq 1.08245$.)

Věta: Nechť U je otevřená množina v $\mathbb{R}^3$, $\Phi : U \to \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná na G. Označme

$$M = \{a \in U \mid \Phi(a) = 0\}$$

což je zřejmě vrstevnice funkce Φ.

Jestliže pro každé $a \in M$ platí, že $\mathrm{grad}\Phi(a) \neq \vec{0}$, pak M je implicitně definovaná (regulární) plocha. Tečná rovina k M v bodě $a_0 = (x_0, y_0, z_0) \in M$ má rovnici

$$\mathrm{grad}\Phi(a_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0.$$

Poznámka: Každý graf spojitě diferencovatelné funkce $f : G \to \mathbb{R}$, kde $G \subseteq \mathbb{R}^2$ je otevřená v $\mathbb{R}^2$, můžeme přirozeně chápat jako implicitně definovanou (regulární) plochu pomocí funkce $\Phi : G \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\Phi(x,y,z) := f(x,y) - z$$

protože

$$GRAF\ (f) = \{(x,y,z) \in G \times \mathbb{R} \mid\ z = f(x,y)\ \} = \{(x,y,z) \in G \times \mathbb{R} \mid\ \Phi(x,y,z) = 0\ \}$$

Současně vidíme, že normálový vektor tečné roviny ke grafu funkce f v bodě $A_0 = \big(a_0, f(a_0)\big)$ pro $a_0 \in G$ je

$$\mathrm{grad}\Phi(A_0) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(A_0), \frac{\partial \Phi}{\partial y}(A_0), \frac{\partial \Phi}{\partial z}(A_0)\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_0), \frac{\partial f}{\partial y}(a_0), -1\right) \neq \vec{0}$$

tedy je nenulový.

Úhel, který svírají implicitně dané plochy M_1 a M_2, je dán jako úhel mezi jednotlivými tečnými rovinami a ten je zase určen jejich normálovými vektory n_1 a n_2, tj. gradienty funkcí Φ_1 a Φ_2. Z možných dvou (navzájem doplňkových) úhlů mezi tečnými rovinami si volíme ten menší. Tento úhel $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ má tedy nezáporný kosinus a je tudíž jednoznačně určen jako

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{||\vec{n}_1|| \cdot ||\vec{n}_2||}\ .$$

Př. (úhly grafů funkcí)

Nalezněte úhel, který svírají graf funkce $f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2 + 2y^2})$ a plocha $M : 2x^2 + 3y^2 + z^2 = 2$ v bodě $(1, 0, ?)$.

Řešení:
Úhel, který svírají implicitně dané plochy M_1 a M_2, je dán jako úhel mezi jednotlivými tečnými rovinami a ten je zase určen jejich normálovými vektory n_1 a n_2, tj. gradienty funkcí Φ_1 a Φ_2. Z možných dvou

(navzájem doplňkových) úhlů mezi tečnými rovinami si volíme ten menší. Tento úhel $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ má tedy nezáporný kosinus a je tudíž jednoznačně určen jako

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{||\vec{n}_1|| \cdot ||\vec{n}_2||} \ .$$

Třetí souřadnice bodu $A = (1, 0, ?)$, který je na grafu funkce f, je dána hodnotou $f(1, 0) = \ln(1) = 0$. Tedy jde o bod $A = (1, 0, 0)$. Je dobře ještě ověřit, že takto určený bod skutečně leží v M.

Graf funkce f si zadejme implicitně pomocí funkce

$$\Phi_1(x, y, z) = f(x, y) - z = \frac{1}{2}\ln(x^2 + 2y^2) - z \ .$$

Plocha M je zadaná implicitně funkcí

$$\Phi_2(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2 - 2 \ .$$

Normálové vektory tečných rovin v $A = (1, 0, 0)$ jsou

$$\vec{n}_1 = \text{grad } \Phi_1(A) = \left(\frac{x}{x^2 + 2y^2},\ \frac{2y}{x^2 + 2y^2},\ -1\right)_{|A} = (1, 0, -1)$$

$$\vec{n}_2 = \text{grad } \Phi_2(A) = \Big(4x,\ 6y,\ 2z\Big)_{|A} = (4, 0, 0)$$

Úhel $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ je dán jako $\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{||\vec{n}_1|| \cdot ||\vec{n}_2||} = \frac{4}{\sqrt{2} \cdot 4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, tedy $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Př. Najděte rovnici tečné roviny k elipsoidu $M :\ x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$, která je rovnoběžná s rovinou $\varrho :\ 4x + 2y + z = 3$.

Řešení:
Použijeme větu o tečné rovině k implicitně definované ploše v $\mathbb{R}^3$.

V našem případě je $\Phi(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 1$ a $U = \mathbb{R}^3$. Zřejmě $\text{grad}\Phi(a) = (2x, 4y, 2z)$.

Ověříme si, že v každém bodě $a_0 = (x_0, y_0, z_0) \in M$ je skutečně $\text{grad}\Phi(a_0) \neq \vec{0}$ (tj. že v každém bodě M máme k dispozici normálový vektor tečné roviny $\text{grad}\Phi(a_0)$):

Dokážeme to nepřímo: zřejmě $\text{grad}\Phi(a) = (2x, 4y, 2z) = \vec{0}$ právě když $a = (0, 0, 0)$. Ovšem tento bod není v M, protože nesplňuje $\Phi(a) = 0$.

Normálový vektor tečné roviny v bodě $a_0 = (x_0, y_0, z_0) \in M$ je tedy právě $\text{grad}\Phi(a_0)$. Tato rovina bude rovnoběžná s ϱ, která má normálový vektor $\mathbf{n}_\varrho = (4, 2, 1)$, právě když

$$(2x_0, 4y_0, 2z_0) = \text{grad}\Phi(a_0) = \lambda \cdot \mathbf{n}_\varrho = \lambda \cdot (4, 2, 1)$$

pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$, tedy $(x_0, y_0, z_0) = (2\lambda, \lambda/2, \lambda/2)$. Současně má také platit, že $x_0^2 + 2y_0^2 + z_0^2 = 1$. Po dosazení pak dostaneme $(2\lambda)^2 + 2(\lambda/2)^2 + (\lambda/2)^2 = 1$ tedy $\lambda = \pm 2/\sqrt{19}$.

Hledané tečné roviny pak musí mít normálový vektor $\mathbf{n}_\varrho$, tedy rovnici $4x + 2y + z = c$, kde neznámé hodnoty $c \in \mathbb{R}$ určíme dosazením spočítaných bodů $a_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{19}} \cdot (4, 1, 1)$, kterými tečné roviny musí procházet. Výsledek je

$$4x + 2y + z = \sqrt{19}$$

a

$$4x + 2y + z = -\sqrt{19}.$$

2 Derivace složeného zobrazení

2.1 Derivace zobrazení (s více složkami). Jakobiho matice.

Definice: Derivace pro funkci s více složkami (říkejme jí obecněji: zobrazení) se definuje analogicky jako pro reálnou (jednosložkovou) funkci. Tedy:

Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. *Derivace* zobrazení $\Phi : U \to \mathbb{R}^m$ ve bodě $a_0 \in U$ je takové lineární zobrazení (označené jako $\Phi'(a_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$), které je nejlepší aproximací zobrazení Φ v bodě a_0 v tomto smyslu:

$$\lim_{a \to a_0} \frac{\| \; \Phi(a) - \Phi(a_0) - \Phi'(a_0)[a - a_0] \; \|}{\|a - a_0\|} = 0$$

kde jsme v čitateli výrazu použili normu (v $\mathbb{R}^m$), což je ekvivalentní tomu, že výše uvedená limita platí v každé složce výrazů v čitateli. Upřesněme, co se tím myslí:

Nechť jednotlivé složky zobrazení jsou funkce $f_i : U \to \mathbb{R}^m$, $i = 1, \dots, m$, tedy

$$\Phi(a) = \big(f_1(a), \dots, f_m(a)\big) \quad \text{pro} \quad a \in U$$

pak výše uvedená limita platí právě když

$$\lim_{a \to a_0} \frac{f_i(a) - f_i(a_0) - \Big(\Phi'(a_0)[a - a_0]\Big)_i}{\|a - a_0\|} = 0 \qquad \text{pro} \qquad i = 1, \dots, m$$

kde $\Big(\Phi'(a_0)[a - a_0]\Big)_i$ je i-tá složka vektoru $\Phi'(a_0)[a - a_0]$.

Také to celé můžeme říct tak (jako u jednosložkové funkce), že pro lineární zobrazení $\Phi'(a_0)$ platí:

$$\Phi(a_0 + \vec{h}) = \Phi(a_0) + \Phi'(a_0)[\vec{h}] + o\big(\|\vec{h}\|\big)$$

Věta o existenci derivace: Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. Nechť $\Phi = (f_1, \dots, f_m) : U \to \mathbb{R}^m$ je takové zobrazení, že všechny složky $f_i : U \to \mathbb{R}^m$ jsou spojitě diferencovatelné (říkáme pak, že Φ je spojitě diferencovatelné, neboli třídy C^1). Pak pro $a \in U$ existuje derivace $\Phi'(a)$ a její matice (ve standardní bázi) typu $m \times n$ je

$$\Phi'(a) = \begin{pmatrix} \text{grad } f_1(a) \\ \vdots \\ \text{grad } f_m(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

kde opět ztotožňujeme lineární zobrazení s jeho maticí (nazývanou *Jakobiho* matice).

Př. Najděte derivaci zobrazení $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $g(x, y) = (x,\; xy,\; x^2 + y^2)$ v bodě $a_0 = (0, 1)$.

Řešení:

$$g'(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \\ \frac{\partial g_3}{\partial x} & \frac{\partial g_3}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & x \\ 2x & 2y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad g'(0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

kde $g_i(x, y)$ jsou jednotlivé složky zobrazení g.

2.2 Derivace složeného zobrazení. Řetězové pravidlo.

Věta o derivaci složeného zobrazení: Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ a $V \subseteq \mathbb{R}^m$ jsou otevřené množiny (v příslušných prostorech). A mějme zobrazení

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{\Phi} & V & \xrightarrow{\Psi} & \mathbb{R}^k \\ \cap\!| & & \cap\!| & & \\ \mathbb{R}^n & & \mathbb{R}^m & & \end{array}$$

se složkami $\Phi = (f_1, \ldots, f_m)$ a $\Psi = (g_1, \ldots, g_k)$.

Jestliže existuje derivace $\Phi'(a)$ v bodě $a \in U$ a derivace $\Psi'(b)$ v bodě $b = \Phi(a) \in V$, pak existuje derivace $\Big(\Psi \circ \Phi\Big)'(a)$ a platí:

$$\Big(\Psi \circ \Phi\Big)'(a) = \Psi'(b) \circ \Phi'(a) = \Psi'\Big(\Phi(a)\Big) \circ \Phi'(a)$$

a maticově zapsáno je to:

$$\Big(\Psi \circ \Phi\Big)'(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(b) & \ldots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(b) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial y_1}(b) & \ldots & \frac{\partial g_k}{\partial y_m}(b) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

kde opět ztotožňujeme lineární zobrazení s jeho maticí.

Konkrétně, pro i-tou složku $\Psi \circ \Phi$:

$$\Big(\Psi \circ \Phi\Big)_i(x_1, \ldots, x_n) = (g_i \circ \Phi)(x_1, \ldots, x_n) = g_i\Big(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)\Big)$$

z tohoto vyplývá tzv. řetězové pravidlo (což je jen přepis maticového násobení) a to ve tvaru

$$\frac{\partial(g_i \circ \Phi)}{\partial x_j}(a) = \sum_{\ell=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_\ell}(b) \cdot \frac{\partial f_\ell}{\partial x_j}(a)$$

Př. Určete derivaci funkce $F(r, \varphi) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, kde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná funkce.

Řešení:
Na funkci F použijeme $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ a $\frac{\partial}{\partial r}$ čímž podle řetězového pravidla dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r}\big(f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\big) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial(r\cos\varphi)}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial(r\sin\varphi)}{\partial r} = \cos\varphi\,\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\varphi\,\frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial \varphi} &= \frac{\partial}{\partial \varphi}\big(f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\big) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial(r\cos\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial(r\sin\varphi)}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi\,\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\varphi\,\frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}$$

Tedy

$$F'(r, \varphi) = \Big(\frac{\partial F}{\partial r},\ \frac{\partial F}{\partial \varphi}\Big) = \Big(\cos\varphi\,\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\varphi\,\frac{\partial f}{\partial y},\ \ -r\sin\varphi\,\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\varphi\,\frac{\partial f}{\partial y}\Big)\,.$$

2.3 Věta o implicitní funkci

Věta o implicitní funkci (dvou proměnných):

Nechť funkce Φ je spojitě diferencovatelná až do k-tého řádu na otevřené množině $G \subseteq \mathbb{R}^3$. Nechť pro $(x_0, y_0, z_0) \in G$ je $\Phi(x_0, y_0, z_0) = 0$ a $\frac{\partial \Phi}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Pak na nějakém okolí $U \subseteq \mathbb{R}$ bodu $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ existuje funkce $z(x, y) : U \to \mathbb{R}$, která je spojitě diferencovatelná až do k-tého řádu taková, že $\Phi(x, y, z(x, y)) = 0$ a $z(x_0, y_0) = z_0$.

Dále platí, že

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial \Phi}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)} \qquad\qquad \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial \Phi}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}$$

takže normálový vektor k tečné rovině v bodě (x_0, y_0, z_0) na grafu funkce $z = z(x, y)$ je

$$\vec{n} = \Big(\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0),\ \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0),\ -1\Big) = \Big(-\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial \Phi}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)},\ -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial \Phi}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)},\ -1\Big)$$

a tedy i jeho nenulový násobek

$$\mathrm{grad}\Phi(x_0, y_0, z_0) = \Big(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x_0, y_0, z_0),\ \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x_0, y_0, z_0),\ \frac{\partial \Phi}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\Big)$$

je normálovým vektorem k tečné rovině v bodě (x_0, y_0, z_0).

Důsledek (Věta o implicitních plochách): Nechť U je otevřená množina v $\mathbb{R}^3$, $\Phi : U \to \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná na G. Označme

$$M = \{a \in U \mid \Phi(a) = 0\}$$

což je zřejmě vrstevnice funkce Φ.

Jestliže pro $a \in M$ platí, že $\mathrm{grad}\Phi(a) \neq \vec{0}$, pak existuje okolí $U_\varepsilon(a)$, ze $U_\varepsilon(a) \cap M$ je grafem nějaké hladké funkce v některých dvou proměnných.

Tedy M vypadá lokálně jako graf funkce v nějakých dvou proměnných a proto ji můžeme nazvat (implicitně definovanou) plochou.

Tečná rovina k M v bodě $a_0 = (x_0, y_0, z_0) \in M$ má rovnici

$$\mathrm{grad}\Phi(a_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0.$$

Př. (derivace implicitní funkce)

Spočítejte derivaci funkce $z(x, y)$, která je řešením rovnice $x + y + z^2 - e^z = 0$ v okolí bodu $(x_0, y_0, z_0) = (2, -1, 0)$.

Řešení:

Funkci $z(x, y)$ opět neumíme nějak jednoduše explicitně vyjádřit, ale i tak můžeme zjistit její parciální derivace. Na obě strany rovnosti použijeme $\frac{\partial}{\partial x}$ a $\frac{\partial}{\partial y}$, přičemž využijeme řetízkové pravidlo (z je závislé na proměnných x a y):

$$0 = \frac{\partial\ 0}{\partial x} = \frac{\partial(x + y + z^2(x, y) - e^{z(x,y)})}{\partial x} = 1 + 2z\frac{\partial z}{\partial x} - e^z\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$0 = \frac{\partial\ 0}{\partial y} = \frac{\partial(x + y + z^2(x, y) - e^{z(x,y)})}{\partial y} = 1 + 2z\frac{\partial z}{\partial y} - e^z\frac{\partial z}{\partial y}$$

a odsud si parciální derivace vyjádříme:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{e^z - 2z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{e^z - 2z}$$

Zřejmě pro $(x_0, y_0, z_0) = (2, -1, 0)$ je $e^{z_0} - 2z_0 = 1 \neq 0$, takže derivace $z'(x, y) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$ je definována na nějakém okolí bodu $(x_0, y_0) = (2, -1)$. Konkrétně je $z'(2, -1) = (1, 1)$.

Poznámka: V derivování můžeme dále pokračovat a získat tak parciální derivace vyšších řádů a speciálně i matici druhé derivace (tyto pojmy viz dále). Zde pouze provedeme výpočet:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{e^z - 2z}\right) = -\frac{e^z - 2}{(e^z - 2z)^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{e^z - 2}{(e^z - 2z)^3}$$

a ze symetrie zadání pak máme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{e^z - 2}{(e^z - 2z)^3} \ .$$

Speciálně máme

$$z''(2, -1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.4 Transformace diferenciálního výrazu

Někdy potřebujeme vyjádřit nějaký výraz (případně rovnici) v jiných souřadnicích. Co se tím přesně myslí:

Představme si to tak, že v $\mathbb{R}^2$ “žije” funkce f (tj. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$). Prostor $\mathbb{R}^2$ (nebo jeho část) můžeme ale popisovat také pomocí jiných (křivočarých) souřadnic $\Phi : G \to \mathbb{R}^2$, kde $G \subseteq \mathbb{R}^2$ je vhodná množina. Je to podobné, jako když nějaké území na Zemi zachycujeme na různých mapách. A stejně jako nějaká oblast na Zemi vypadá na různých mapách vždy trochu jinak, stejně tak se funkce f vyjádřená pomocí souřadnicového popisu Φ bude také pokaždé jevit jinak (půjde totiž o funkci $f \circ \Phi : G \to \mathbb{R}$). Jak je vidět, i přes složení funkce f se zobrazením Φ, jde vlastně pořád o tentýž “objekt”, tj. tutéž “funkci” na prostoru $\mathbb{R}^2$.

Pokud nyní funkci

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

přiřadíme např. následující odvozenou funkci

$$\widetilde{f} := x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

(popsanou kartézskými souřadnicemi), pak chceme vědět, jak bude vypadat odpovídající přiřazení pomocí transformace Φ, kdy funkci

$$F := f \circ \Phi : \quad G \to \mathbb{R}$$

přiřazujeme odpovídající funkci

$$\widetilde{F} = \widetilde{f} \circ \Phi = \left(x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}\right) \circ \Phi : \quad G \to \mathbb{R} \ .$$

Posledně zmíněnou funkci $\widetilde{F}$ ovšem chceme vyjádřit pomocí derivací funkce F podle nových souřadnic (podobně jako $\widetilde{f}$ byla vyjádřena pomocí parciálních derivací funkce f).

Doplnění: Transformace souřadnic je bijektivní zobrazení. Pro *diferencovatelnou* transformaci, pak požadujeme, aby definiční obor i obor hodnot byly obě otevřené množiny a inverzní zobrazení bylo také diferencovatelné.

Př. Transformujte výraz $x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}$ pomocí polárních souřadnic:

$$\Phi : (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \quad \to \quad \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \geq 0\}$$

$$(r, \varphi) \quad \mapsto \quad (x, y)$$

kde

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi\ .$$

Řešení:

Potřebujeme vyjádřit hodnoty $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ pomocí hodnot a $\frac{\partial F}{\partial r}(r, \varphi)$ a $\frac{\partial F}{\partial \varphi}(r, \varphi)$, kde $(x, y) = \Phi(r, \varphi)$ a $F(r, \varphi) = f(x, y)$. Vezmeme si tedy rovnost

$$F(r, \varphi) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\ .$$

Ze vztahu

$$F = f \circ \Phi$$

(a diferencovatelnosti zobrazení f a Φ) plyne, že v bodě $\alpha = (r, \varphi)$ bude

$$F'(\alpha) = f'(\Phi(\alpha)) \circ \Phi'(\alpha)$$

(což je složení lineárních zobrazení) neboli

$$\left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial \varphi}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Odsud vypočítáme např. invertováním matice

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial \varphi}\right) \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial \varphi}\right) \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\frac{\sin\varphi}{r} & \frac{\cos\varphi}{r} \end{pmatrix}$$

nebo analogicky vynásobením rovnic tak, abychom získali výraz $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$, že

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\varphi\,\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\,\frac{\partial F}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sin\varphi\,\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r}\,\frac{\partial F}{\partial \varphi}$$

Takže po dosazení (a vyjádření x a y pomocí r a φ) dostáváme

$$x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = r\cos\varphi\left(\sin\varphi\,\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r}\,\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right) - r\sin\varphi\left(\cos\varphi\,\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\,\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right) = \frac{\partial F}{\partial \varphi}$$

3 Parciální derivace vyšších řádů. Druhá derivace. Hessova matice.

3.1 Parciální derivace vyšších řádů.

Definice: Parciální derivace vyšších řádů funkce $f : U \to \mathbb{R}$ (kde $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina) v bodě $a \in U$ definujeme induktivně jako

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(a) := \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} \right)(a)$$

kde $\frac{\partial^1 f}{\partial x_i} := \frac{\partial f}{\partial x_i}$ a $k \in \mathbb{N}$. Dále se zavádí zkrácené značení $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} := \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$ a podobně pro vyšší derivace.

3.2 Druhá derivace. Hessova matice.

Definice druhé derivace: Jestliže v každém bodě $a \in U$ existuje derivace $f'(a)$, získáme zobrazení

$$\begin{aligned} f' : \quad U &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ a &\mapsto f'(a) = \left(\tfrac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \tfrac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right) \end{aligned}$$

Pokud nyní v $a_0 \in U$ existuje derivace

$$(f')'(a_0) = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_0) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a_0) \end{pmatrix} \ (= \mathbb{A})$$

nazýváme tuto (čtvercovou) matici *Hessovou* maticí a druhou derivaci $f''(a_0)$ definujeme jako bilineární zobrazení

$$f''(a_0) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$f''(a_0)[\vec{u}, \vec{v}] = \vec{u}^T \cdot \mathbb{A} \cdot \vec{v} \quad \text{pro} \quad \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$$

Obvykle nám ale stačí pracovat s kvadratickým homogenním polynomem (tzv. kvadratickou formou)

$$Q[\vec{h}] := f''(a_0)[\vec{h}, \vec{h}] \quad \text{pro} \quad \vec{h} \in \mathbb{R}^n \ .$$

Postačující podmínka existence druhé derivace: Jestliže funkce $f : U \to \mathbb{R}$ je třídy C^2 (neboli: všechny druhé parciální derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ pro $i, j = 1, \dots, n$ existují na celé množině U a jsou zde spojíte) pak $f''(a)$ existuje pro $a \in U$ a odpovídající Hessova matice je symetrická.

3.3 Taylorův polynom

Definice Taylorova polynomu řádu 2: Nechť f je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ a a_0 vnitřní bod jejího definičního oboru. Taylorův polynom řádu 2 (pro bod a_0 a funkci f) je takový polynom $T_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stupně nejvýše 2, který nejlépe aproximuje funkci f v okolí bodu a_0 v tomto smyslu

$$f(a_0 + \vec{h}) = T_2(a_0 + \vec{h}) + o(\|\vec{h}\|^2)$$

tedy

$$\lim_{\vec{h} \to 0} \frac{f(a_0 + \vec{h}) - T_2(a_0 + \vec{h})}{\|\vec{h}\|^2} = 0 \ .$$

Tento polynom je jednoznačně určený (pokud existuje).

Existence a tvar Taylorova polynomu řádu 2: Jestliže existuje $f''(a_0)$, pak existuje i Taylorův polynom řádu 2 (pro bod a_0 a funkci f) a je tvaru

$$T_2(a_0+\vec{h}) = f(a_0) + f'(a_0)[\vec{h}] + \frac{1}{2!}f''(a_0)[\vec{h},\vec{h}]$$

kde $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$.

Př. (Taylorův polynom)
Najděte Taylorův polynom druhého řádu pro funkci f v okolí bodu a_0:

(i) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$, $a_0 = (1,-1)$,

(ii) $f(x,y,z) = xe^y \cos z$, $a_0 = (0,0,0)$.

Řešení:
(i) Máme

$$f'(a_0) = (3x^2 - 3y,\ 3y^2 - 3x)_{|a_0} = (6,0)$$

a

$$f''(a_0) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}_{|a_0} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$\begin{aligned} T_2(a_0+\vec{h}) &= 3 + (6,0)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(h_1,h_2)\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \\ &= 3 + 6h_1 + 3h_1^2 - 3h_1h_2 + 3h_2^2 \end{aligned}$$

kde $\vec{h} = (h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$.

(ii) Podobně dostaneme:

$$f'(a_0) = (e^y \cos z, xe^y \cos z, -xe^y \sin z)_{|a_0} = (1,0,0)$$

a

$$f''(a_0) = \begin{pmatrix} 0 & e^y\cos z & -e^y \sin z \\ e^y \cos z & xe^y \cos z & -xe^y \sin z \\ -e^y \sin z & -xe^y \sin z & -xe^y \cos z \end{pmatrix}_{|a_0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$T_2(a_0+\vec{h}) = h_1 + h_1h_2$$

kde $\vec{h} = (h_1,h_2,h_3) \in \mathbb{R}^3$.