MA2 - 3. konzultace

1 Vyšetřování extrémů

Dále se budeme zabývat vyšetřováním extrémů reálných funkcí a to v následujících typech úloh:

- hledání *lokálních* extrémů funkce f na *otevřené* množině U.
- hledání *absolutních (globálních)* extrémů funkce f na *uzavřené* (a obvykle také omezené) množině M.:

Definice extrémů: Funkce $f : G \to \mathbb{R}$, kde $G \subseteq \mathbb{R}^n$, má v bodě $a_0 \in G$

- *(globální) minimum* na $G \Leftrightarrow$ pro každé $a \in G$ je $f(a) \geq f(a_0)$
- *(globální) maximum* na $G \Leftrightarrow$ pro každé $a \in G$ je $f(a) \leq f(a_0)$
- *lokální minimum* $\Leftrightarrow$ existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $a \in U_\varepsilon(a_0) \cap G$ je $f(a) \geq f(a_0)$
  (neboli: v bodě a_0 (globální) minimum na $U_\varepsilon(a_0) \cap G$ pro nějaké $\varepsilon > 0$)
- *lokální maximum* $\Leftrightarrow$ existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $a \in U_\varepsilon(a_0) \cap G$ je $f(a) \leq f(a_0)$
  (neboli: v bodě a_0 (globální) maximum na $U_\varepsilon(a_0) \cap G$ pro nějaké $\varepsilon > 0$)

Globální (resp. lokální) minima a maxima se souhrnně nazývají extrémy (opět lokální nebo globální). A dále, pokud jsou ve výše zmíněné definici nerovnosti dokonce ostré (pochopitelně pro body a různé od a_0), říkáme, že daný extrém je ostrý.

Pozorování: Každý globální extrém (na dané množině) je také lokální extrém.

1.1 Vyšetřování lokálních extrémů na otevřených množinách

Věty, které teď budou popisovat nutné nebo postačující podmínky pro existenci extrému funkce více proměnných, jsou analogické případu jedné proměnné.

Nutná podmínka pro lokální extrém na otevřené množině: Nechť pro funkci $f : U \to \mathbb{R}$, kde $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, existuje v bodě $a_0 \in U$ (úplná) derivace $f'(a_0)$. Jestliže je v a_0 lokální extrém, pak $f'(a_0) = (0, \dots, 0)$.

Bod $a \in U$, ve kterém je $f'(a) = (0, \dots, 0)$, se nazývá *stacionární* bod funkce f.

Co je definitnost bilineární formy: Symetrická bilineární forma $Q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se nazývá

- *pozitivně definitní* $\Longleftrightarrow$ pro každý vektor $\vec{0} \neq \vec{h} \in \mathbb{R}^n$ je $Q[\vec{h}, \vec{h}] > 0$.
- *negativně definitní* $\Longleftrightarrow$ pro každý vektor $\vec{0} \neq \vec{h} \in \mathbb{R}^n$ je $Q[\vec{h}, \vec{h}] < 0$.
- *indefinitní* $\Longleftrightarrow$ existují vektory $\vec{h}, \vec{k} \in \mathbb{R}^n$ takové, že $Q[\vec{h}, \vec{h}] > 0$ a $Q[\vec{k}, \vec{k}] < 0$.

Každá symetrická bilineární forma $Q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je popsána svou maticí $\mathbb{A}$ ve standardní bázi, tj.

$$Q[\vec{h}, \vec{k}] = \vec{h}^T \cdot \mathbb{A} \cdot \vec{k}$$

pro všechna $\vec{h}, \vec{k} \in \mathbb{R}^n$. Tato matice $\mathbb{A}$ je symetrická, tedy $\mathbb{A}^T = \mathbb{A}$ (zde $(\cdot)^T$ znamená transponování dané matice).

Postačující podmínky pro lokální extrém na otevřené množině: Nechť funkce $f : U \to \mathbb{R}$ je třídy C^2 na otevřené množině U (tedy má spojité všechny druhé parciální derivace na U). Nechť $a_0 \in U$ je stacionární bod funkce f (tj. $f'(a_0) = (0, \dots, 0)$). Jestliže

- $f''(a_0)$ je *pozitivně* definitní $\Rightarrow$ v bodě a_0 je (ostré) lokální minimum.
- $f''(a_0)$ je *negativně* definitní $\Rightarrow$ v bodě a_0 je (ostré) lokální maximum.
- $f''(a_0)$ je *indefinitní* $\Rightarrow$ v bodě a_0 *NENÍ* lokální extrém.

V posledním případě říkáme, že v a_0 je sedlový bod (tj. pokud a_0 je stacionární a $f''(a_0)$ je indefinitní). Tento název je odvozen z toho, že při průchodu bodem a_0 po přímkách v něm máme v nějakém směru lokální minimum a v nějakém jiném zase lokální maximum.

Abychom mohli snadno rozeznávat definitnost forem, bude se nám hodit následující kritérium. Předtím si ještě zaveďme toto značení:

Pro čtvercovou matici $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pro $i = 1, \ldots, n$ označme Δ_i determinant matice typu $i \times i$ vzniklé z prvních i sloupců a prvních i řádků z matice $\mathbb{A}$. (Determinanty Δ_i se nazývají hlavní minory matice $\mathbb{A}$.)

Sylvestrovo kritérium (definitnosti symetrických forem): Nechť symetrická bilineární forma Q je popsána symetrickou maticí $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Pak Q je

- *pozitivně definitní* $\iff$ pro každé $i = 1, \ldots, n$ je $\Delta_i > 0$.
- *negativně definitní* $\iff$ pro každé $i = 1, \ldots, n$ je $\operatorname{sgn}(\Delta_i) = (-1)^i$.
  (neboli: hlavní minory střídají znaménka, přičemž PRVNÍ je ZÁPORNÉ.)

Pokud je ještě navíc $\det(\mathbb{A}) \neq 0$, pak Q je

- *indefinitní* $\iff$ není pozitivně ani negativně definitní (tj. nenastane ani jeden z předchozích dvou znaménkových případů).

Postup při hledání *lokálních* extrémů funkce f na *otevřené* množině U bude tento:

- najdeme stacionární body $a \in U$ (protože $f'(a) = \vec{0}$ je nutná podmínka);
- dále pak vyšetříme definitnost $f''(a)$ v těchto bodech.

Př. (lokální extrémy)

Nalezněte lokální extrémy (a sedlové body) funkcí

(i) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$,

(ii) $f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$ pro $x, y, z > 0$.

Řešení:
(i) Funkce je polynom a tedy má derivace všech řádů. Nutnou podmínkou pro extrém v daném bodě je nulovost první derivace.

$$f'(x, y) = (3x^2 - 3y,\ 3y^2 - 3x)$$

Tedy $f'(x, y) = 0$ právě když $x^2 = y$ a $y^2 = x$, což je právě když $(x, y) = (0, 0)$ nebo $(x, y) = (1, 1)$. V daných (kritických) bodech dále vyšetříme druhou derivaci:

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix} .$$

• Pro $(x,y)=(0,0)$ je $f''(0,0)=\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$. Tedy pro $\vec{h}=(h_1,h_2)^T \in \mathbb{R}^2$ je

$$f''(0,0)[\vec{h},\vec{h}] = -6h_1h_2$$

a tato forma nabývá libovolných hodnot (je indefinitní). V bodě $(0,0)$ je tedy SEDLO.

• Pro $(x,y)=(1,1)$ je $f''(1,1)=\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$. Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = 6 > 0$, $\Delta_2 = 36-9 = 27 > 0$) je forma pozitivně definitní a tedy v daném bodě je (lokální) MINIMUM. Toto minimum ale není globální, protože funkce není zdola omezená (lze vzít např. zúžení $f(x,0)=x^3$).

(ii) Nutnou podmínkou pro lokální extrém v daném bodě je nulovost první derivace:

$$f'(x,y,z) = \left(1 - \frac{y^2}{4x^2},\ \frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2},\ \frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2}\right)$$

Tedy $f'(x,y,z)=0$ právě když $y^2 = 4x^2$ a $y^3 = 2xz^2$ a $y = z^3$. Řešení pro $x,y,z > 0$ je pouze $(x,y,z) = \left(\frac{1}{2},1,1\right)$.

Dále vyšetříme druhou derivaci.

$$f''(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{y^2}{2x^3} & -\frac{y}{2x^2} & 0 \\ -\frac{y}{2x^2} & \frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3} & -\frac{2z}{y^2} \\ 0 & -\frac{2z}{y^2} & \frac{2}{y} + \frac{4}{z^3} \end{pmatrix}$$

Pro $(x,y,z) = \left(\frac{1}{2},1,1\right)$ je

$$f''\left(\tfrac{1}{2},1,1\right) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = 4 > 0$, $\Delta_2 = 12-4 = 8 > 0$, $\Delta_3 = 72-16-24 = 32 > 0$) je forma daná druhou derivaci pozitivně definitní a tedy v daném bodě je lokální MINIMUM.

1.2 Vyšetřování globálních extrémů na uzavřených množinách

V této části budeme pracovat s uzavřenými množinami $G \subseteq \mathbb{R}^n$, které budou obvykle i *omezené* (tj. existuje $K > 0$, že $G \subseteq \langle -K,\ K\rangle^n$; neboli G se vejde do dostatečně velké krychle.) Tyto množiny budou často také zadány nějakou implicitní vazbou.

Věta o nabytí obou globálních extrémů: Spojitá funkce $f : M \to \mathbb{R}$ na uzavřené a omezené množině $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^n$ nabývá svého minima i maxima (tj. existují $a_1, a_2 \in M$, ze v a_1 je globální maximum a v a_2 je globální minimum f na M).

Věta o nabytí globálního minima: Nechť $f : M \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce na uzavřené množině $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Nechť dále platí

$$(\forall\ n \in \mathbb{N})(\exists\ K > 0)(\forall\ a \in M) \qquad \|a\| \geq K \Rightarrow f(a) \geq n$$

(tj. jestliže se s bodem a vzdalujeme od počátku, jde hodnota $f(a)$ do plus nekonečna).
Pak funkce f nabývá na M svého globálního minima.

Nutná podmínka pro *vázaný* lokální extrém (Věta o Lagrangeových multiplikátorech):

Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $f, g_i : U \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$ jsou spojitě diferencovatelné funkce. Položme

$$M = \bigcap_{i=1}^{k} \{a \in U \mid g_i(a) = 0\}$$

(funkce g_i se nazývají vazby).

Nechť $a_0 \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f zúžené na M. Jestliže vektory

$$\operatorname{grad} g_1(a_0), \dots, \operatorname{grad} g_k(a_0) \text{ jsou lineárně nezávislé}$$

pak existují $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ (tzv. *Lagrangeovy multiplikátory*), že

$$\operatorname{grad} f(a_0) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot \operatorname{grad} g_i'(a_0) \ .$$

Alternativní znění:

Nechť M je výše uvedeného tvaru a platí uvedená lineární nezávislost (v bodě $a_0 \in M$). Označme si tzv. Lagrangeovu funkci $L : U \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ tvaru

$$L(x_1, \dots, x_n, \ell_1, \dots, \ell_k) := f(x_1, \dots, x_n) - \sum_{i=1}^{k} \ell_i \cdot g_i(x_1, \dots, x_n) \ .$$

Jestliže $a \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f zúžené na M, pak existuje $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$, že

$$L'(a, \lambda) = \left(\frac{\partial L}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial L}{\partial x_n}, \frac{\partial L}{\partial \ell_1}, \dots, \frac{\partial L}{\partial \ell_k} \right)_{(a,\lambda)} = (0, \dots, 0)$$

tedy platí

$$0 = \frac{\partial L}{\partial x_j}(a, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a) \qquad \text{pro} \quad j = 1, \dots, n$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \ell_j}(a, \lambda) = g_j(a) \qquad \text{pro} \quad j = 1, \dots, k.$$

(**neboli:** Jestliže a je lokální extrém f na M (a platí lineární nezávislost), pak pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}^k$ je (a, λ) stacionárním bodem funkce L.)

Poznámka: Jestliže výše zmíněná lineární nezávislost platí v každém bodě $a \in M$, pak se množina M nazývá *varieta* (angl. *manifold*) a je možné ji přiřadit dimenzi - pomocí věty o implicitní funkci - a sice $\dim M = n - k$. Dimenze tak odpovídá dimenzi n původního prostoru $\mathbb{R}^n$ sníženou o počet k nezávislých vazeb daných funkcemi $g_1, \dots, g_k$.

Tečný prostor k této varietě M v bodě a_0 je pak kolmý ke všem vektorům $\operatorname{grad} g_1(a_0), \dots, \operatorname{grad} g_k(a_0)$ a naše Lagrangeova věta tak říká jen to, že v případě lokálního extrému funkce f v bodě a_0 je $\operatorname{grad} f(a_0)$ kolmý k množině M v bodě a_0 (tj. kolmý k tečnému prostoru množiny M v bodě a_0).

V jednoduchém případě, že M je implicitně definovaná plocha v $\mathbb{R}^3$ (neboli vrstevnice funkce g) musí být gradient funkce f kolmý k této ploše (pokud je v daném bodě lok. extrém). To si lze dobře představit třeba když f je gravitační potenciál a $\operatorname{grad} f$ jeho gravitační silové pole působící na bod, jehož pohyb je vázaný na nějakou plochu (zadanou pomocí g). Pak se můžeme ptát, kde jsou na ploše místa s rovnovážnou polohou (stabilní = lokální minimum f, labilní = lokální maximum f).

Důležitá poznámka: Ve větě o Lagr. multiplikátorech je otevřenost množiny U (v definici množiny M) podstatná! Množina M je vždy v blízkém okolí bodu $a_0 \in M$ vpodstatě "rovná" a my se na ni díváme jako kdybychom pracovali ve skutečně rovném prostoru $\mathbb{R}^{n-k}$. V rámci něj už umíme vyšetřovat lokální extrémy pomocí "klasického" derivování a k němu právě potřebujeme, abychom kolem bodu a_0 měli dost prostoru (neboli: aby a_0 byl v jistém smyslu "uvnitř" množiny M).

Postup při hledání *absolutních (globálních)* extrémů funkce f na *uzavřené* (a obvykle také omezené) množině M bude tento:

- pomocí nutných podmínek (obvykle to jsou Lagrangeovy multiplikátory) vyloučíme ty body, kde určitě extrémy nejsou;
- ve zbylé množině podezřelých bodů (obvykle malé) srovnáme jejich funkční hodnoty, ze kterých vybereme největší a nejmenší;
- jestliže víme, že obou extrémů musí být nabyto, pak jsou to právě předchozí nalezené největší a nejmenší hodnoty v podezřelých bodech;
- při hledání pouze globálního minima podstupujeme obdobně - tj. hledáme nejmenší hodnotu mezi podezřelými body;
- Důležité: zde nepotřebujeme používat druhou derivaci! (Ostatně, globálnost případného extrému nám tato druhá derivace stejně nemůže potvrdit.)

Poznámka: Nechť M má tvar z Lagr. věty. Jestliže nějaký bod $a \in M$ nesplňuje podmínku o lineární nezávislosti $\operatorname{grad} g_1(a), \dots, \operatorname{grad} g_k(a)$, zařadíme ho automaticky mezi podezřelé body. Obvykle takových bodů není mnoho, případně funkce je na nich "uchopitelná". Proto při aplikaci Lagr. věty vlastně vždy ověřujeme, jestli všechny body z M splňují uvedenou podmínku pro lineární nezávislost. Pokud ano, vazbám $g_1, \dots, g_k$ se pak říká nezávislé.

Př. (vázané extrémy)
Najděte nejmenší a největší hodnoty funkce $f(x,y) = x - y + 3$ za podmínky $3x^2 + 5xy + 3y^2 = 1$. Načrtněte útvary určené těmito vazbami.

Řešení:
Hledáme absolutní extrémy funkce $f(x,y) = x - y + 3$ na množině

$$M = \{(x,y) \in U \mid g(x,y) = 0\}$$

kde $U = \mathbb{R}^2$ (je tedy otevřená) a $g(x,y) = 3x^2 + 5xy + 3y^2 - 1$.

- Ověříme, že soubor o jednom vektoru $\operatorname{grad} g(a)$ je lineárně nezávislý pro každé $a \in M$. Neboli, potřebujeme, aby $\operatorname{grad} g(a) \neq (0,0)$ pro každé $a \in M$:

  Protože
  $$\operatorname{grad} g(x,y) = g'(x,y) = \Big(6x + 5y,\ 5x + 6y\Big)$$
  tak $g'(x,y) = (0,0)$ právě když $(x,y) = (0,0)$. Bod $(0,0)$ ale není v M, takže v každém bodě $a \in M$ je $g'(a) \neq (0,0)$.

- Jestliže $a = (x,y) \in M$ je globální extrém f na M, pak je také lokální extrém na M. Z Lagrangeovy věty proto máme, že existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ takové, že

  $$(1,-1) = f'(a) = \lambda \cdot g'(a) = \lambda\Big(6x + 5y, 5x + 6y\Big)$$

a

$$3x^2 + 5xy + 3y^2 = 1.$$

Jelikož z rovnic plyne, že $\lambda \neq 0$, dostáváme rovnici $6x + 5y = \frac{1}{\lambda} = -(5x + 6y)$. Odsud plyne $x = -y$ a po dosazení do vazby získáme kandidáty na extrémy:

$$(1, -1), \qquad (-1, 1)$$

s hodnotami

$$f(1, -1) = 5, \qquad f(-1, 1) = 1.$$

• Potřebujeme ještě zjistit, zda množina M je vůbec omezená (uzavřenost M plyne snadno z toho, že $M = g^{-1}(\{0\})$, neboli že je to vzor uzavřené množiny $\{0\}$ při spojitém zobrazení g).

Doplněním na čtverec

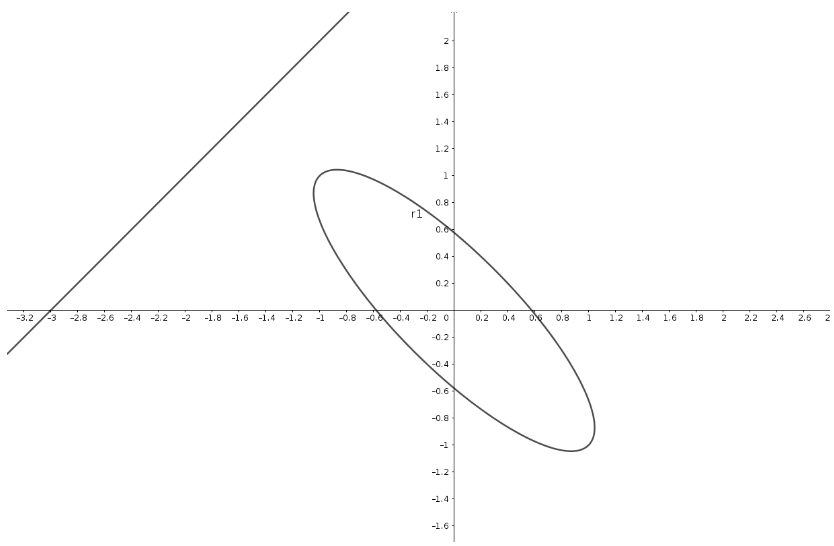
$$1 = 3x^2 + 5xy + 3y^2 = 3\left(x + \frac{5}{6}y\right)^2 + \frac{11}{12}y^2$$

zjistíme, že jde o omezenou množinu (konkrétně o (natočenou) elipsu). To lze zjistit i z toho, že kvadratická forma

$$Q(x, y) = 3x^2 + 5xy + 3y^2 = (x, y)\begin{pmatrix} 3 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

je pozitivně definitní (např. pomocí Sylvestrova kritéria).

• Spojitá funkce f tak na uzavřené a omezené množině M skutečně nabývá svého maxima v bodě $(1, -1)$ a minima v bodě $(-1, 1)$.



Poznámka: Úloha je ekvivalentní tomu, když máme najít na implicitně zadané křivce $M:\ 3x^2 + 5xy + 3y^2 = 1$ body, kde tečna přímka je rovnoběžná s přímkou $x - y + 3 = 0$.

Př. (vázané extrémy na uzavřené množině s vnitřkem a po částech hladkým okrajem)
Najděte nejmenší a největší hodnoty funkce $f(x, y) = 3xy$ na množině

(a) $M: \quad x^2 + y^2 \leq 2.$

(b) $M: \quad x(x - 1) \leq y \leq 0.$

Načrtněte tyto množiny.

Řešení:
(a) Množina M je kruh o poloměru $\sqrt{2}$ a středem v počátku. Příklad rozdělíme na vyšetření (volného) extrému na vnitřku množiny M, tj. na otevřené množině

$$M^\circ : \quad x^2 + y^2 < 2$$

a vázaného extrému na hranici

$$\partial M : \quad x^2 + y^2 = 2$$

kterou máme vyjádřenu pomocí (jediné) diferencovatelné vazby.

Extrém na M°:

Jestliže globální extrém $a = (x, y)$ leží v M°, je současně také lokální a tedy musí platit, že

$$f'(x,y) = \big(3y,\ 3x\big) = (0,0)$$

což nastává právě když $(x,y) = (0,0)$. Tento bod patří do M°. Máme tedy zatím jediný bod, kde by mohl byt extrém.

Extrém na $N = \partial M$: Funkci vyšetříme na kružnici $N : x^2 + y^2 = 2$ neboli na množině

$$N = \{(x,y) \in U \mid g(x,y) = 0\}$$

kde $U = \mathbb{R}^2$ je otevřená množina a $g(x,y) = x^2 + y^2 - 2$ vazbová funkce.

Podle metody Lagrangeových multiplikátorů pro extrém $a = (x, y)$ na N existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$\big(3y,\ 3x\big) = f'(a) = \lambda g'(a) = \lambda \cdot \Big(2x,\ 2y\Big)$$

a

$$x^2 + y^2 = 2.$$

Ani jedna z proměnných nemůže být nulová, takže máme $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}\lambda = \frac{y}{x}$, tedy $x^2 = y^2$ neboli $x = \pm y$. Dosazením do rovnice kružnice dostaneme kandidáty na extrémy:

$$(-1,1)\,, \quad (1,-1)\,, \quad (1,1)\,, \quad (-1,-1)$$

s odpovídajícími hodnotami

$$f\big(-1,1\big) = f\big(1,-1\big) = -3, \quad f\big(1,1\big) = f\big(-1,-1\big) = 3.$$

Množina M je uzavřená a omezená množina a spojitá funkce f tak na M nabývá svého maxima a minima.

Porovnáním hodnot podezřelých bodů dostáváme, že funkce nabývá svého MAXIMA v bodech $(1,1)$ a $(-1,-1)$ a MINIMA v bodech $(-1,1)$ a $(1,-1)$.

- -

(b) Množina M je vymezena parabolou $y = x(x-1)$ a osou x. Příklad rozdělíme na vyšetření (volného) extrému na vnitřku množiny M, tj. na otevřené množině

$$M^\circ : \quad x(x-1) < y < 0$$

a vázaného extrému na hranici

$$\partial M : \quad \begin{array}{c} (y = x^2 - x \ \ \& \ \ 0 \le x \le 1) \ \ \vee \\ \vee \ \ (y = 0 \ \ \& \ \ -0 \le x \le 1) \end{array}$$

kterou ale nejde vyjádřit pomocí jediné diferencovatelné vazby. Vazbami jsou dvě křivky (část paraboly a úsečka). POZOR: tyto dvě vazby ale NEPLATÍ současně! Každá vyjadřuje JINOU část okraje! To je vidět i z toho, že používáme logickou spojku "NEBO", nikoliv "A".

Extrém na M°:

Jestliže globální extrém $a = (x, y)$ leží v M°, je současně také lokální a tedy musí platit, že

$$f'(x, y) = \big(3y,\ 3x\big) = (0, 0)$$

což nastává právě když $(x, y) = (0, 0)$. Tento bod ale nepatří do M°. Zatím tedy žádný podezřelý bod nemáme.

Extrém na ∂M:

Funkci vyšetříme na jednotlivých částech hranice. Protože hraniční křivka se dá dobře parametrizovat, použijeme místo Lagrangeových multiplikátorů tento postup:

(i) Použijeme přirozenou parametrizaci části paraboly bez koncových bodů

$$M_1 : \quad y = x^2 - x \ \ \& \ \ x \in (0, 1)$$

$$\varphi(x) = (x, x^2 - x),\ x \in (0, 1)\ .$$

Pokud $a = \varphi(x_0) \in M_1$ je bodem extrému f na parabole, pak je t_0 extrémem funkce $f \circ \varphi$ a tedy musí být $(f \circ \varphi)'(x_0) = 0$. Tuto úvahu ovšem můžeme udělat právě jen proto, že x_0 je VNITŘNÍM bodem intervalu $(0, 1)$. Z tohoto důvodu MUSÍME při vyšetřování části paraboly vynechat její koncové body, kde navazuje na úsečku (tyto koncové body automaticky zařadíme do podezřelých bodů).

Budeme tedy vyšetřovat funkci

$$g(x) := f(\varphi(x)) = f(x, x^2 - x) = 3x(x^2 - x) = 3(x^3 - x^2) \quad \text{pro} \quad x \in (0, 1)\ .$$

Máme $g'(x) = 3(3x^2 - 2x) = 3x(3x - 2) = 0$, což je právě když $x = \frac{2}{3} \in (0, 1)$ (případ $x = 0$ neleží v intervalu $(0, 1)$). Dostaneme tak podezřelý bod $\left(\frac{2}{3}, (\frac{2}{3})^2 - \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{9}\right)$.

(ii) Funkci na další části hranice a sice na úsečce bez krajních bodů

$$M_2 : y = 0 \ \ \& \ \ x \in (0, 1)$$

můžeme vyšetřovat obdobně, ale zde snadno vidíme, že pro všechny body $a \in M_2$ je $f(a) = 0$, takže nemůžeme žádný z nich vyloučit. Proto celou M_2 zařadíme mezi podezřelé body.

(iii) A konečně body, kde se křivky napojují, tj. $(0, 0)$ a $(0, 1)$, zařadíme mezi podezřelé automaticky.

Množina M je uzavřená a omezená množina a spojitá funkce f tak na M nabývá svého maxima a minima.

Porovnáním hodnot podezřelých bodů dostáváme, že funkce nabývá svého MINIMA v bodě $\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{9}\right)$ (s hodnotou $f\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{9}\right) = -\frac{8}{9}$) a MAXIMA ve všech bodech úsečky $(x, 0)$ pro $0 \le x \le 1$ (s hodnotou $f(x, 0) = 0$).

Př. (vázané extrémy - aplikace)

Najděte tři kladná čísla, jejichž součin je maximální a jejichž součet je roven 100.

Řešení:

Zadání příkladu lze interpretovat také tak, že hledáme maximální objem kvádru, který se vejde do pravidelného trojbokého jehlanu, jehož jeden vrchol je společný s vrcholem tohoto kvádru. Intuitivně lze očekávat, že maximální takový objem bude odpovídat krychli.

Budeme tedy hledat body maxima funkce

$$f(x,y,z)=xyz$$

na množině

$$M=\{(x,y,z)\in U \mid \Phi(x,y,z)=0\},$$

kde

$$U:\; x,y,z>0$$

je otevřená množina a

$$\Phi(x,y,z)=x+y+z-100$$

je vazbová funkce.

Protože U je OTEVŘENÁ (což je podstatné!) a $\Phi'(a)\neq(0,0,0)$ pro každé $a\in M$, tak můžeme použít Lagrangeovu podmínku pro extrém na M. Pro bod extrému $a=(x,y,z)\in M$ pak musí existovat $\lambda\in\mathbb{R}$, že

$$(yz,xz,xy)=f'(a)=\lambda\Phi'(a)=\lambda(1,1,1)$$

a

$$x+y+z=100\ .$$

Odsud máme např. že $yz=\lambda=xz$ a protože $z>0$, tak dostaneme $x=y$. Podobně odvodíme, že $x=y=z$ a tedy $x+x+x=100$. Takže jediný podezřelý bod z extrému je $a=\left(\frac{100}{3},\frac{100}{3},\frac{100}{3}\right)$ s hodnotou $f\left(\frac{100}{3},\frac{100}{3},\frac{100}{3}\right)=\left(\frac{100}{3}\right)^3$.

Abychom mohli využít věty o nabytí extrémů, potřebujeme ale uzavřenou množinu, což M není (je to trojúhelník, ale bez hran). Tak si M prostě uzavřeme, čímž dostaneme

$$\overline{M}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x,y,z\geq 0 \quad \& \quad \Phi(x,y,z)=0\},$$

což je trojúhelník i s hranami. Na těchto přidaných hranách je ale funkce f nulová (a tudíž snadno uchopitelná), takže všechny hrany můžeme zařadit mezi podezřelé body z extrémů na $\overline{M}$. Tím jsme prošli všechny body $\overline{M}$.

Množina $\overline{M}$ je teď už uzavřená a omezená, takže spojitá funkce f zde nabývá svých extrémů. Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech teď snadno dostáváme, že na hranách nabývá f svého minima a v (jediném) bodě $\left(\frac{100}{3},\frac{100}{3},\frac{100}{3}\right)$ svého maxima (jak jsem očekávali).

Př. (vázané extrémy - vzdálenost)
Vypočtěte vzdálenost nejbližšího bodu hyperboly $M:\; x^2+5xy+y^2=9$ od počátku $(0,0)$.

Řešení:
Hyperbole je uzavřená množina, ale NENÍ omezená. Ke zjištění vzdálenosti od počátku $(0,0)$ si vezmeme funkci

$$f(x,y)=x^2+y^2$$

protože se čtvercem vzdálenosti se lépe pracuje. Tato funkce "v nekonečnu roste do nekonečna" (tj. splňuje podmínky o nabytí globálního minima na M). Kandidáta na minimum můžeme opět najít metodou Lagr. multiplikátorů.

Máme tedy $f(x,y) = x^2 + y^2$ a vazbovou funkci $g(x,y) = x^2 + 5xy + y^2 - 9$. Pro bod $a = (x,y) \in M$ lokálního extrému f na M existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$\big(2x, 2y\big) = f'(a) = \lambda \cdot g'(a) = \lambda\Big(2x + 5y, 5x + 2y\Big)$$

a

$$x^2 + 5xy + y^2 = 9.$$

Z prvního vztahu dostaneme

$$\begin{pmatrix} 2(\lambda-1) & 5\lambda \\ 5\lambda & 2(\lambda-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Protože pro bod $(x,y) \in M$ je $(x,y) \neq (0,0)$, tak vektorová rovnice je řešitelná právě když determinant čtvercové matice je nula. Neboli

$$0 = (2(\lambda-1))^2 - (5\lambda)^2 = (2\lambda - 2 - 5\lambda) \cdot (2\lambda - 2 + 5\lambda) = (-3\lambda - 2) \cdot (7\lambda - 2)$$

tedy $\lambda = -\frac{2}{3}$ nebo $\lambda = \frac{2}{7}$. Dosazením dostaneme $x = \pm y$ a z rovnice $x^2 + 5xy + y^2 = 9$ pak máme podezřelé body

$$a_0 = (x,y) = \pm\left(\tfrac{3}{\sqrt{7}}, \tfrac{3}{\sqrt{7}}\right)$$

s hodnotou $f(a_0) = \frac{18}{7}$. Podle věty o nabývání minima je tato hodnota skutečně minimální, takže vzdálenost bodu $(0,0)$ od hyperboly je $\sqrt{\frac{18}{7}}$.

Na úlohu lze také nahlížet geometricky: hledáme takový bod $(x,y) \in M$, aby jeho průvodič z počátku $(0,0)$, tj. vektor $\vec{h} = (x,y) - (0,0)$ byl kolmý na tečnou přímku k M v bodě (x,y). Tato tečná přímka má za normálový vektor $\operatorname{grad} g(x,y)$. Musíme tedy vyřešit systém podmínek $\vec{h} = \lambda \cdot \operatorname{grad} g(x,y)$ pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$ a $(x,y) \in M$. A to už je totéž jako výše.