MA2 - 4. konzultace

Integrální počet funkcí více proměnných

1 Dvojný integrál

Definice: *Základní oblast integrace* $D \subseteq \mathbb{R}^2$ je množina buď tvaru

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \langle a,b\rangle,\ s_1(x) \leq y \leq s_2(x)\}$$

kde $s_1, s_2 : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce, nebo analogického tvaru, když vyměníme proměnné, tj.

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \langle a,b\rangle,\ s_1(y) \leq x \leq s_2(y)\}\ .$$

Plošný obsah základní oblasti definujeme jako $V(D) = \int\limits_a^b s_2(t) - s_1(t)\, dt$.

Je ovšem potřeba ukázat, že pokud lze jednu a tutéž základní oblast vyjádřit oběma způsoby, pak i hodnota $V(D)$ vyjde stejně.

Definice: *Oblast integrace* $D \subseteq \mathbb{R}^2$ je sjednocení konečně mnoha základních oblastí $D_1, \ldots, D_k$, které mají navzájem disjunktní vnitřky (tj. $D_i^\circ \cap D_j^\circ = \emptyset$ pro $i \neq j$).

Obsah této oblasti D si definujeme jako $V(D) = \sum_{i=1}^k V(D_i)$.

Opět ovšem musíme ukázat, že toto číslo nezávisí na způsobu, jakým D rozložíme na základní oblasti. K tomuto důkazu to stačí udělat jen pro případ, kdy D je základní oblast (a to tak, že si vezmeme společně zjemnění obou rozdělení D pomocí vodorovných s svislých přímek, které vzniknou protažením hranic základních oblastí.) Pro obecný případ oblasti D pak znovu vezmeme společně zjemnění získané analogickým způsobem.

Jak teď definovat to, co bychom nazvali integrálem z funkce. Pro začátek se omezíme jen na spojité funkce.

Pro spojitou funkci $f : D \to \mathbb{R}$ chceme zavést její integrál, konkrétně číslo $\iint\limits_D f\ dS$ tak, aby platilo:

- $\iint\limits_{D_1 \cup D_2} f\ dS = \iint\limits_{D_1} f\ dS + \iint\limits_{D_2} f\ dS$ pro oblasti D_1 a D_2 s disjunktními vnitřky (tj. $D_1^\circ \cap D_2^\circ = \emptyset$).
- $V(D) \cdot \min_D(f) \leq \iint\limits_D f\ dS \leq V(D) \cdot \max_D(f)\ .$

Dá se ukázat, že to lze udělat jediným způsobem (kde se použijí horní a dolní součty jako u funkce jedné proměnné a dále to, že funkce je spojitá). Výsledné číslo nazýváme *dvojný integrál.*

Definice: *Zobecněná oblast integrace* $D \subseteq \mathbb{R}^2$ bude taková množina, pro kterou budeme mít posloupnost oblastí integrace $D_1 \subseteq D_2 \subseteq \cdots$, že $D = \bigcup_{n=1}^\infty D_n$. (Např. každá otevřená množina je zobecněnou oblastí integrace.)

Funkci $f : D \to \mathbb{R}$ na zobecněné oblasti integrace nazýváme *integrabilní* (na D) a definujeme její (konečný) integrál hodnotou

$$\iint\limits_D f\ dS := \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{D_n} f\ dS$$

jestliže zúžení funkce f na D_n je spojitá funkce pro každé $n \in \mathbb{N}$ a PŘEDEVŠÍM, jestliže

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{D_n} |f|\ dS < \infty\ .$$

Tato podmínka s tzv. *absolutní integrabilitou* je skutečně nutná a to k tomu, aby hodnota integrálu $\iint\limits_D f \; dS$ nezávisela na způsobu rozkladu oblasti D na podoblasti D_n. Je to analogické tomu, když sčítáme nekonečnou řadu čísel $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a chceme, aby součet nezávisel na přepermutování členů této řady.

Dále už nebudeme explicitně rozlišovat mezi výše uvedenými typy oblastí a také slovo "integrace" budeme případně vynechávat.

Základní vlastnosti dvojného integrálu: Pro $c \in \mathbb{R}$, oblasti D_1, D_2, D a integrabilní funkce f a g platí:

- $\iint\limits_{D_1} f \; dS + \iint\limits_{D_2} f \; dS = \iint\limits_{D_1 \cup D_2} f \; dS$, pokud D_1 a D_2 mají disjunktní vnitřky.
- $\iint\limits_D (c \cdot f + g) \; dS = c \cdot \iint\limits_D f \; dS + \iint\limits_D g \; dS$

K výpočtu integrálů slouží následující věta, která říká, že funkci můžeme postupně integrovat podle jednotlivých proměnných:

Fubiniho věta: Nechť $f : E \to \mathbb{R}$ je integrabilní funkce na oblasti integrace E. Pak platí

$$\iint\limits_E f \; dS = \int\limits_{\pi_2(E)} \left(\int\limits_{\substack{\text{(vodorovný) řez množinou } E \\ \text{pomocí přímky } \mathbb{R} \times \{y\}}} f(x,y) \; dx \right) dy$$

$$\iint\limits_E f \; dS = \int\limits_{\pi_1(E)} \left(\int\limits_{\substack{\text{(svislý) řez množinou } E \\ \text{pomocí přímky } \{x\} \times \mathbb{R}}} f(x,y) \; dy \right) dx,$$

kde $\pi_1, \pi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jsou projekce na jednotlivé osy, tedy $\pi_1(x,y) = x$ a $\pi_2(x,y) = y$.

Obrácená Fubiniho věta (verze použitelná i pro neomezené funkce nebo množiny): Nechť

- $E \subseteq \mathbb{R}^2$ je oblast integrace
- $f : E \to \mathbb{R}$ je *nezáporná* funkce spojitá na E°
- jeden z integrálů vzniklých postupnou integrací podle proměnných je konečný (tj. alespoň jeden z výrazů na pravé straně v předchozí větě existuje a je konečný).

Pak i integrál v opačném pořadí integrace je konečný, oba se rovnají a funkce má dvojný integrál $\iint\limits_E f \; dS$ (rovný této společné hodnotě).

Poznámka: Zde si jen ukážeme, že předpoklad konečnosti integrálu z absolutní hodnoty funkce (tj. absolutní integrability) je podstatný a že bez něj by Fubiniho věta obecně nefungovala. Např. pro funkci

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

na oblasti $E = (0,1)^2$ je

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \; dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{y}{x^2 + y^2} \right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} \; dx = \Big[\arctan(x) \Big]_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{4}$$

zatímco v opačném pořadí integrace dostaneme

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\, dx \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{-x}{x^2 + y^2} \right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^1 \frac{-1}{y^2 + 1}\, dy = \Big[-\arctan(y) \Big]_{y=0}^{y=1} = -\frac{\pi}{4}\,.$$

Když bychom si pak počítali integrál $\iint_{E_n} \left| \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \right| dS$ pro $E_n = \langle \frac{1}{n}, 1 \rangle^2$, zjistili bychom, že limita pro $n \to \infty$ vychází nekonečná.

Př. (dvojný integrál - Fubiniho věta)

Změňte pořadí integrace následujících integrálů:

(a) $\int\limits_0^1 \int\limits_{\sqrt{y}}^1 f(x, y)\, dx\, dy.$

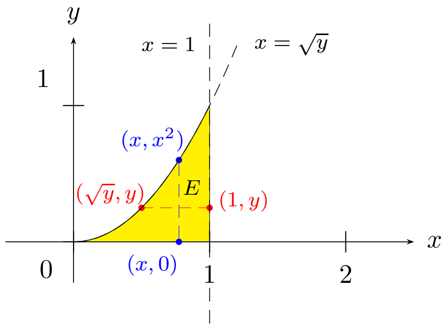
(b) $\int\limits_0^1 \int\limits_0^x f(x, y)\, dy\, dx + \int\limits_1^2 \int\limits_0^{2-x} f(x, y)\, dy\, dx.$

Řešení:

V těchto příkladech procvičujeme jen záměnu integrace, takže předpokládáme, že funkce f předpoklady Fubiniho věty splňuje.

(a) Základní oblast integrace je

$$E: \quad 0 \le y \le 1 \quad \& \quad \sqrt{y} \le x \le 1.$$



Po rozřezání oblasti E ve směru osy y máme

$$E: \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad 0 \le y \le x^2.$$

Záměna integrace pak vyjde jako:

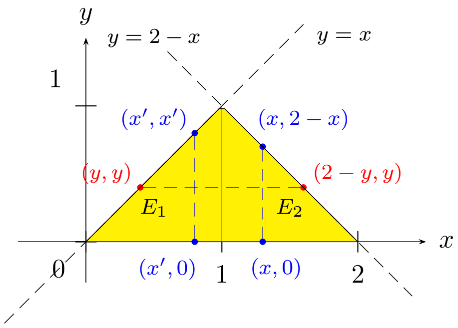
$$\int\limits_0^1 \int\limits_{\sqrt{y}}^1 f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} f(x, y)\, dy\, dx.$$

(b) Základní oblasti integrace jsou

$$E_1: \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad 0 \le y \le x$$

$$E_2: \quad 1 \le x \le 2 \quad \& \quad 0 \le y \le 2 - x.$$

Množiny E_1 a E_2 se překrývají pouze v úsečce $\{1\} \times \langle 0, 1 \rangle$, která na hodnotu integrálu nemá vliv. Funkci f tak můžeme prostě integrovat na sjednocení obou oblastí $E = E_1 \cup E_2$.



Pozor! Toto sjednocení není samozřejmá věc! Pokud by se totiž oblasti překrývaly na nějaké "podstatnější" množině, bylo pak na tomto průniku potřeba integrovat funkci dvakrát (příspěvek z každé oblasti D_i). Přesněji, platí

$$\iint\limits_{E_1} f\ dS \ + \ \iint\limits_{E_2} f\ dS = \iint\limits_{E_1 \setminus E_2} f\ dS \ + \ 2 \cdot \iint\limits_{E_1 \cap E_2} f\ dS \ + \ \iint\limits_{E_2 \setminus E_1} f\ dS \ \left(= \iint\limits_{E_1 \cup E_2} f\ dS \ + \ \iint\limits_{E_1 \cap E_2} f\ dS \right)$$

Takže $\pi_2(E) = \langle 0, 1\rangle$ a $(\mathbb{R} \times \{y\}) \cap E = \langle y, 2-y\rangle \times \{y\}$. Záměna integrace pak vyjde jako:

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^x f(x,y)\ dy\ dx + \int\limits_1^2 \int\limits_0^{2-x} f(x,y)\ dy\ dx = \int\limits_0^1 \int\limits_y^{2-y} f(x,y)\ dx\ dy.$$

Př. (dvojný integrál - Fubiniho věta)
Vypočítejte hodnotu integrálu:

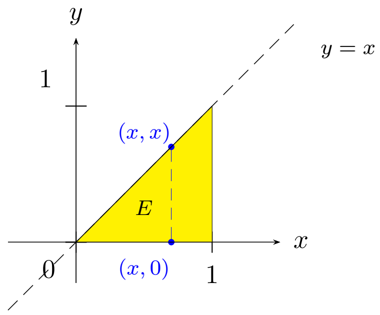
(a)
$$\iint\limits_E \frac{\sin x}{x}\, dxdy$$

kde E je trojúhelník s vrcholy $(0,0), (1,0), (1,1)$.

(b)
$$\iint\limits_E e^{\frac{x}{y}}\ dS,$$

kde E je oblast v prvním kvadrantu omezena křivkami $x = y^2$, $x = 0$ a $y = 1$.

Řešení:
(a) Oblast integrace je
$$E: \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad 0 \le y \le x\ .$$



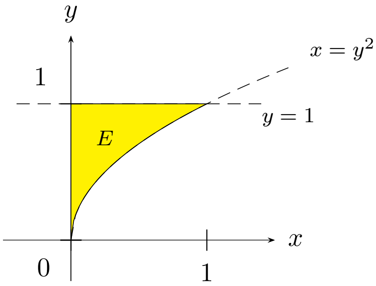
Máme

$$\iint_E \frac{\sin x}{x}\, dxdy = \int_0^1 \int_0^x \frac{\sin x}{x}\, dy\, dx = \int_0^1 \sin x\, dx = 1 - \cos(1).$$

(b) Oblast integrace

$$E: \quad 0 \le x \le y^2 \quad \& \quad 0 < y \le 1$$

je omezená, ale u funkce $f(x,y) = e^{\frac{x}{y}}$ zúžené na E to není jasné - problémový je bod $(0,0)$. Přesto ale můžeme použít Fubiniovu větu, protože funkce je nezáporná. Konkrétně:



Máme tedy

$$\iint_E e^{\frac{x}{y}}\, dS = \int_0^1 \int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}}\, dx\, dy = \int_0^1 \left[y e^{\frac{x}{y}} \right]_{x=0}^{x=y^2} dy = \int_0^1 y e^y - y\, dy = \left[(y-1)e^y - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2}.$$

Poznámka: Vyšetříme si ještě pro pořádek chování f na E v bodě $(0,0)$. Protože pro $(x,y) \in E$ máme $0 \le x \le y^2$ a $0 < y$, tak $0 \le \frac{x}{y} \le y$ a tedy

$$1 \le e^{\frac{x}{y}} \le e^y \to 1 \quad \text{pro} \quad (x,y) \to (0,0)$$

a proto $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in E}} e^{\frac{x}{y}} = 1$. Funkce f je proto na E omezená a spojitá a integrál tedy existuje a je konečný.

1.1 Substituce ve dvojném integrálu

Věta o substituci: Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^2$ je oblast integrace a $\Phi : U \to \mathbb{R}^2$ je zobrazení pro které platí, že

- Φ je spojité na U,
- Φ je prosté a spojitě diferencovatelné na U° (tj. na vnitřku U)
- $\det \Phi' \neq 0$ všude na U° a
- množina ∂U se skládá ze spojitě diferencovatelných křivek, případně bodů (tj. její příspěvek k hodnotě jakéhokoliv integrálu je nulový).

Pak je $\Phi(U)$ oblast integrace (a zobrazení Φ nazýváme *parametrizace* oblasti $\Phi(U)$ pomocí oblasti U).

Nechť f je integrabilní funkce na $\Phi(U)$. Pak

$$\iint\limits_{\Phi(U)} f \; dS = \iint\limits_{U} (f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'| \; d\widetilde{S}.$$

kde pro odlišení značíme integraci podle jiných proměnných jako $d\widetilde{S}$.

(Velikost plochy rovnoběžníku určeného vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ je rovna absolutní hodnotě determinantu matice sestavené z těchto vektorů.)

Př. (vyjádření oblasti v polárních souřadnicích)

Vyjádřete integrál

$$\iint\limits_{E} f(x,y) \; dx \; dy$$

v polárních souřadnicích v pořadí $d\varrho \; d\varphi$ pro oblast E, která je plochou trojúhelníka s vrcholy $(1,0)$, $(2,0)$ a $(1,1)$.

Řešení:
Oblast E je trojúhelník ohraničený přímkami $x = 1$, $y = 0$ a $x + y = 2$ a dá se popsat také jako

$$E: \quad 1 \leq x \leq 2 \quad \& \quad 0 \leq y \leq 2 - x$$

Pro parametrizaci oblasti E v polárních souřadnicích v pořadí $d\varrho \; d\varphi$ určíme nejdříve rozsah proměnné φ, což je $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$. Pro pevně zvolené φ teď určíme rozsah proměnné ϱ. Ten je ze zdola určený přímkou $x = 1$ a shora přímkou $x + y = 2$. Po dosazení $x = \varrho \cos\varphi$ a $y = \varrho \sin\varphi$ do těchto rovnic pak dostaneme oblast U ve tvaru

$$U: \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \quad \& \quad \frac{1}{\cos\varphi} \leq \varrho \leq \frac{2}{\cos\varphi + \sin\varphi}$$

takže přepis integrálu je následující

$$\iint\limits_{E} f(x,y) \; dx \; dy = \int\limits_{0}^{\pi/4} \int\limits_{\frac{1}{\cos\varphi}}^{\frac{2}{\cos\varphi + \sin\varphi}} \varrho \cdot f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi) \; d\varrho \; d\varphi \; .$$

Př. (polární souřadnice)

Použitím polárních souřadnic spočítejte

(a)

$$\int_0^1 \int_0^x \frac{x}{x^2+y^2}\, dy\; dx \;.$$

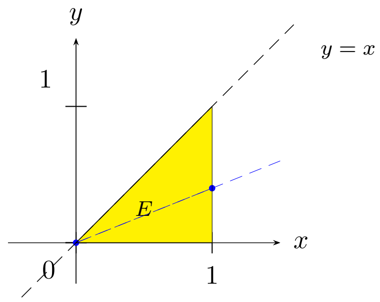
(b)

$$\int_0^1 \int_x^{\sqrt{2-x^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dy\; dx \;.$$

Řešení:

(a) Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad 0 \le y \le x$$



což je trojúhelník. Množinu U, která parametrizuje $E = \Phi(U)$ pomocí polárních souřadnic

$$\Phi: \; x = r\cos\varphi, \; y = r\sin\varphi$$

dostaneme dosazením do nerovnosti pro E

$$0 \le \underbrace{r\cos\varphi}_{=x} \le 1 \quad \& \quad 0 \le \underbrace{r\sin\varphi}_{=y} \le \underbrace{r\cos\varphi}_{=x} \;.$$

a úpravě, ale hlavně pomocí náčrtku, jako

$$U: \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4} \quad \& \quad 0 \le r \le \tfrac{1}{\cos\varphi} \;.$$

takže máme

$$\int_0^1 \int_0^x \frac{x}{x^2+y^2}\, dy\; dx = \iint_{E=\Phi(U)} \frac{x}{x^2+y^2}\; dS = \iint_U \cos\varphi\; dr\; d\varphi =$$

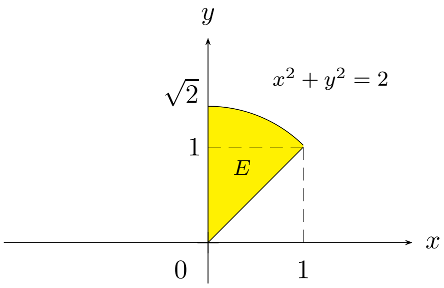
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} \cos\varphi\; dr\; d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\; d\varphi = \frac{\pi}{4} \;.$$

(b) Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad x \le y \le \sqrt{2-x^2}$$

což je kruhová výseč, jejíž parametrizace $E = \Psi(U)$ ve sférických souřadnicích je tvaru

$$U: \quad 0 \le r \le \sqrt{2} \quad \& \quad \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \;.$$



Takže máme

$$\int_0^1 \int_x^{\sqrt{2-x^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dy\, dx = \iint_{E=\Psi(U)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dS = \iint_U r\cos\varphi\, dr\, d\varphi =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{2}} r\cos\varphi\, dr\, d\varphi = \left(\int_0^{\sqrt{2}} r\, dr\right)\cdot\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi\right) = 1\cdot\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1-\frac{\sqrt{2}}{2}\ .$$

Poznámka: Použili jsme vztah

$$\iint_{X\times Y} f(x)g(y)\, dV = \Big(\int_X f(x)\, dx\Big)\cdot\Big(\int_Y g(y)\, dy\Big)$$

pro integrabilní funkce $f : X \to \mathbb{R}$ a $g : Y \to \mathbb{R}$.

Př. (oblast zadaná v polárních souřadnicích)

Určete velikost plochy E (v kartézských souřadnicích), kterou ohraničuje křivka zadaná pomocí polárních souřadnic $\varrho = \sin\varphi$, $\quad \varphi \in \langle 0, \pi\rangle$. Načrtněte danou křivku v polárních i kartézských souřadnicích.

Řešení:
(a) V polárních souřadnicích je oblast dána jako

$$U: \quad 0 \le \varphi \le \pi \quad \& \quad 0 \le \varrho \le \sin\varphi$$

položíme tedy $E := \Phi(U)$. Použitím věty o substituci dostaneme pro velikost plochy E (v kartézských souřadnicích!), že

$$\iint_{E=\Phi(U)} 1\, dS = \iint_U r\, dr\, d\varphi = \int_0^{\pi} \Big(\int_0^{\sin\varphi} r\, dr\Big)\, d\varphi = \int_0^{\pi} \left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=\sin\varphi} d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Trik k výpočtu integrálu: $\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi$ a současně $\int_0^{2\pi} (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\, d\varphi = \int_0^{2\pi} 1\, d\varphi = 2\pi$ tedy

$$\int_0^{\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

A co to vlastně máme za křivku: Protože máme $\varrho(\varphi) = \sin\varphi$, můžeme body (x, y) křivky parametrizovat pomocí úhlu φ a pak platí, že

$$x = \varrho\cos\varphi = \sin\varphi\cos\varphi$$

$$y = \varrho\sin\varphi = \sin^2\varphi$$

Současně máme vztah $x^2 + y^2 = \varrho^2 = (\sin\varphi)^2$ a spojením tak dostáváme $x^2 + y^2 = y$, což je rovnice pro danou křivku. Její úpravou máme $x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$, což je prostě kružnice se středem $(0, \frac{1}{2})$ a poloměrem $\frac{1}{2}$. Protože jsme měli spočítat plochu, kterou kružnice (v kartézských souřadnicích) ohraničuje, není divu, že nám vyšla plocha kruhu o poloměru $\frac{1}{2}$, tedy $\pi/4$.

2 Trojný integrál

Trojný integrál bychom mohli definovat podobně jako dvojný, ale odpovídající zdůvodnění, že vše funguje, by bylo ještě o něco náročnější. Těmito podobnostmi se ale už zabývat nebudeme.

Poznámka: Integrovat v praxi ovšem potřebujeme i ve vyšších dimenzích a často i jiné než jen spojité funkce. Moderní přístup tedy obvykle je ten, že se nejdříve vybuduje tzv. míra μ na množinách v $\mathbb{R}^n$, tj. způsob jak vhodné podmnožině $A \subseteq \mathbb{R}^n$ přiřadit její velikost $\mu(A)$ (ty, kterým dokážeme přiřadit velikost, nazýváme měřitelné), pak se zavede pojem měřitelné funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (to bude taková f, že vzor každého intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$, tj. množina $f^{-1}(I) \subseteq \mathbb{R}^n$, je měřitelná množina v $\mathbb{R}^n$) a tyto funkce rozložíme na kladnou část $f^+ := \max\{f, 0\}$ a zápornou část $f^- := \max\{-f, 0\}$ (tj. $f = f^+ - f^-$). Pro nezápornou měřitelnou funkci g pak definujeme (tzv. Lebesgueův) integrál $\int g\ d\mu$ supremem z dolních součtů funkce g tvaru

$$\sum_{I\in\mathcal{I}} \inf(g^{-1}(I)) \cdot \mu(g^{-1}(I))$$

kde $\mathcal{I}$ je nějaké dělení reálného intervalu $\langle 0, +\infty)$ na (obecně spočetný) systém disjunktních intervalů $I \subseteq \mathbb{R}$. Pro měřitelnou funkci zavedeme pak integrál přirozeně jako $\int f\ d\mu := \int f^+\ d\mu - \int f^-\ d\mu$, pokud má rozdíl smysl. Jak je vidět, nedělíme primárně definiční obor $\mathbb{R}^n$, ale obor hodnot, který je částí $\mathbb{R}$, a také funkce aproximujeme součty jen z jedné strany. Výhodou tohoto přístupu je jednak jednodušší a obecnější postup a pak i lepší vlastnosti prostoru všech funkcí s konečným integrálem - ten bude tzv. úplný, což se hodí zejména ve funkcionální analýze (s aplikacemi v kvantové mechanice), ale i v teorii pravděpodobnosti.

Fubiniho věta (pro trojný integrál): Nechť $E \subseteq \mathbb{R}^3$ je oblast integrace a $f : E \to \mathbb{R}$ je (absolutně) integrabilní funkce. Pak

$$\iiint\limits_E f\ dV = \iint\limits_{\pi_{1,2}(E)} \Big(\int\limits_{\substack{\text{řez množinou } E \text{ pomocí} \\ \text{přímky } \{(x,y)\}\times\mathbb{R}}} f(x,y,z)\ dz\Big)\ dx\ dy,$$

kde $\pi_{1,2} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je projekce, $\pi_{1,2}(x, y, z) := (x, y)$. Případně:

$$\iiint\limits_E f\ dV = \int\limits_{\pi_3(E)} \Big(\iint\limits_{\substack{\text{řez množinou } E \text{ pomocí} \\ \text{roviny } \mathbb{R}^2\times\{z\}}} f(x,y,z)\ dx\ dy\Big)\ dz$$

kde $\pi_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je opět projekce, $\pi_3(x, y, z) := z$.

Řezy v prvním případě jsou “vlákna” (která ale nemusí být souvislá). Po zintegrování podél vlákna, pak integrujeme přes příslušný průmět dané množiny (zde přes $\pi_{1,2}(E)$), kde postup dále můžeme opakovat (tj. průmět opět řežeme na vlákna atd.)

Jiná možnost, jak spočítat integrál, pak je ve druhém případě množinu nejdříve nařezat na dvourozměrné “plátky”, přes ně integrovat danou funkci a výsledek pak zintegrovat přes jednorozměrný průmět množiny E do směru zbylé souřadnice (zde přes $\pi_3(E)$).

Př. (trojný integrál - Fubiniho věta)
Vypočtěte

(a)

$$\iiint\limits_E xyz\ dV,$$

kde E je ohraničeno plochami $y = x^2$, $x = y^2$, $z = xy$ a $z = 0$.

(b)

$$\iiint\limits_E xy\ dV,$$

kde E je čtyřstěn s vrcholy $(0,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,0)$ a $(0,1,1)$.

Řešení:
(a) Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \le z \le xy, \quad x^2 \le y \le \sqrt{x}, \quad 0 \le x \le 1.$$

Máme tedy

$$\iiint\limits_E xyz\ dV = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \int_0^{xy} xyz\ dz\ dy\ dx = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \frac{(xy)^3}{2}\ dy\ dx = \frac{1}{8} \int_0^1 x^5 - x^{11}\ dx =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{96}.$$

(b) Oblast integrace E je množina ohraničená rovinami $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$ a $z = y - x$. Tedy můžeme psát např.

$$E: \quad 0 \le z \le y - x, \quad 0 \le x \le y, \quad 0 \le y \le 1.$$

Máme tedy

$$\iiint\limits_E xy\ dV = \int_0^1 \int_0^y \int_0^{y-x} xy\ dz\ dx\ dy = \int_0^1 \int_0^y y^2x - x^2y\ dx\ dy = \int_0^1 \left[y^2\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}y\right]_{x=0}^{x=y} dy =$$

$$= \int_0^1 \frac{y^4}{2} - \frac{y^4}{3}\ dy = \left[\frac{y^5}{30}\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{30}.$$

Př. (trojný integrál - Fubiniho věta)
Načrtněte oblast integrace

$$\int_0^1 \int_x^{2x} \int_0^{x+y} dz\, dy\, dx\ .$$

Řešení:
Oblast integrace je
$$E: \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad x \le y \le 2x \quad \& \quad 0 \le z \le x+y \ .$$
Projekce $\pi_{1,2}(E)$ do roviny xy je dána jako
$$\pi_{1,2}(E): \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad x \le y \le 2x$$
což je trojúhelník s vrcholy $(0,0)$, $(1,1)$ a $(1,2)$. Oblast E je pak vše, co je nad trojúhelníkem až po rovinu $z = x+y$. Z polohy této roviny pak plyne, že E je pětistěn s vrcholy $(0,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,2,0)$, $(1,1,2)$ a $(1,2,3)$. Integrál vyjadřuje jeho objem.

2.1 Substituce v trojném integrálu

Věta o substituci (trojný integrál): Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^3$ je oblast integrace a $\Phi : U \to \mathbb{R}^3$ je zobrazení pro které platí, že

- Φ je spojité na U,
- Φ je prosté a spojitě diferencovatelné na U° (tj. na vnitřku U)
- $\det \Phi' \neq 0$ všude na U° a
- množina ∂U se skládá ze spojitě diferencovatelných ploch, křivek, případně bodů (tj. její příspěvek k hodnotě jakéhokoliv trojného integrálu je nulový)

Pak je $\Phi(U)$ oblast integrace (a zobrazení Φ opět nazýváme *parametrizace* oblasti $\Phi(U)$ pomocí oblasti U).
Nechť f je integrabilní funkce na $\Phi(U)$. Pak
$$\iiint\limits_{\Phi(U)} f \ dV = \iiint\limits_{U} (f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'| \ d\widetilde{V}.$$
kde pro odlišení značíme integraci podle jiných proměnných jako $d\widetilde{V}$.

Cylindrické souřadnice mají předpis:
$$\Phi: \begin{array}{ccc} x & = & r\cos\varphi \\ y & = & r\sin\varphi \\ z & = & h \end{array}$$
kde $(r,\varphi,h) \in \langle 0,+\infty) \times \langle 0, 2\pi \rangle \times \mathbb{R}$. Dále je
$$\Phi' = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \det \Phi' = r \ .$$

Př. (cylindrické souřadnice)
Spočítejte objem tělesa
$$A: \quad x^2+y^2+z^2 \le 2 \ \ \& \ \ x^2+y^2 \le 1 \ .$$
Těleso A načrtněte.

Řešení:

Těleso A je průnik koule o poloměru $\sqrt{2}$ a válce o průměru 1, jehož osa prochází středem koule. Použijeme proto cylindrické souřadnice:

$$\Phi: \quad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi \qquad z = h\ .$$

Po dosazení do nerovnosti máme

$$r^2 + h^2 \le 2, \quad r^2 \le 1$$

Oblast parametrizace U tak bude

$$U: \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \& \quad 0 \le r \le 1 \quad \& \quad -\sqrt{2-r^2} \le h \le \sqrt{2-r^2}\ .$$

Pak dostáváme

$$\textit{objem } A = \iiint\limits_{A=\Phi(U)} 1\ \mathrm{d}V = \iiint\limits_{U} r\ \mathrm{d}h\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \int_{-\sqrt{2-r^2}}^{\sqrt{2-r^2}} r\ \mathrm{d}h\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 2r\sqrt{2-r^2}\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \Big[-\tfrac{2}{3}(2-r^2)^{3/2}\Big]_{r=0}^{r=1}\ \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \tfrac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)\ \mathrm{d}\varphi = \tfrac{4\pi}{3}(2\sqrt{2}-1)\ .$$

Výpočet pomocí sférických souřadnic (těžší):

Zjednodušíme se to tím, že těleso je symetrické podle roviny $z = 0$, takže si spočítáme jen objem části A' nad touto rovinou:

$$\Psi: \quad x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi, \quad z = r\cos\vartheta\ .$$

Po dosazení do nerovností pro A' máme

$$0 \le z = r\cos\vartheta, \quad r^2 \le 2, \quad r^2\sin^2\vartheta \le 1$$

speciálně $0 \le r \le \min\{\sqrt{2}, \frac{1}{\sin\vartheta}\}$. Z toho dostáváme (i podle náčrtu) oblast parametrizace jako

$$V: 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \text{a} \quad \begin{cases} 0 \le r \le \sqrt{2} & \text{pro} \quad \vartheta \in \langle 0, \frac{\pi}{4}\rangle \\ 0 \le r \le \frac{1}{\sin\vartheta} & \text{pro} \quad \vartheta \in \langle \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\rangle \end{cases}$$

Pak dostáváme

$$\textit{objem } A' = \iiint\limits_{A'=\Psi(V)} 1\ \mathrm{d}V = \iiint\limits_{V} r^2\sin\vartheta\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\vartheta\ \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{2}} r^2\sin\vartheta\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\vartheta\ \mathrm{d}\varphi + \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{1}{\sin\vartheta}} r^2\sin\vartheta\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\vartheta\ \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tfrac{2\sqrt{2}}{3}\sin\vartheta\ \mathrm{d}\vartheta\ \mathrm{d}\varphi + \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \tfrac{1}{3\sin^3\vartheta}\sin\vartheta\ \mathrm{d}\vartheta\ \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \tfrac{2\sqrt{2}}{3}\Big[-\cos\vartheta\Big]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\frac{\pi}{4}}\ \mathrm{d}\varphi + \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{3}\Big[-\operatorname{cotg}\vartheta\Big]_{\vartheta=\frac{\pi}{4}}^{\vartheta=\frac{\pi}{2}}\ \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \tfrac{2\sqrt{2}}{3}\left(1-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) + \tfrac{1}{3}\cdot 1\ \mathrm{d}\varphi = \tfrac{2\pi}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

Celkem tedy

$$\textit{objem } A = 2\cdot\textit{objem } A' = \tfrac{4\pi}{3}(2\sqrt{2}-1)\ .$$

Př. (cylindrické souřadnice)

Vypočítejte hodnotu integrálu
$$\iiint_E x^2 \, dV,$$
kde
$$E: \quad \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2 \quad \& \quad 0 \le y \quad \& \quad x \le 0\,.$$

Řešení:
Oblast E je čtvrtina kužele. K výpočtu integrálu proto použijeme cylindrické souřadnice:
$$\Phi: \begin{array}{rcl} x &=& r\cos\varphi \\ y &=& r\sin\varphi \\ z &=& z \end{array}$$
s parametrizací oblasti $E = \Phi(U)$ jako
$$U: \quad 0 \le r \le z \quad \& \quad 0 \le z \le 2 \quad \& \quad \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi\,.$$
Pak máme
$$\iiint_{E=\Phi(U)} x^2 \, dV = \iiint_U r^3 \cos^2\varphi \, dV = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^2 \int_0^z r^3 \cos^2\varphi \, dr \, dz d\varphi = \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^2 z^4 \cos^2\varphi \, dz d\varphi =$$
$$= \frac{1}{4} \left(\int_0^2 z^4 \, dz \right) \cdot \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2\varphi \, d\varphi \right) = \frac{8}{5}\pi.$$

Moment setrvačnosti J tělesa $E \subseteq \mathbb{R}^3$ s (nezápornou) hustotou $\varrho(x,y,z)$ vzhledem k ose otáčení p je definován jako
$$J = \iiint_E v^2(x,y,z) \cdot \varrho(x,y,z) \, dV$$
kde funkce $v(x,y,z)$ je vzdálenost bodu (x,y,z) od osy p. Tělesa, která mají velký poměr momentu setrvačnosti ke své celkové hmotnosti, jsou např. setrvačníky, které je těžké roztočit a pak i zastavit.

Př. (cylindrické souřadnice)

Zapište integrály pomocí cylindrických souřadnic a pak je spočítejte:
$$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} \, dz \, dy \, dx\,.$$

Řešení:
Oblast E je popsána jako

$$E: \quad -1 \le x \le 1 \quad \& \quad -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2} \quad \& \quad x^2+y^2 \le z \le 2-x^2-y^2$$

neboli

$$E: \quad |x| \le 1 \quad \& \quad |y| \le \sqrt{1-x^2} \quad \& \quad x^2+y^2 \le z \le 2-x^2-y^2$$

a ekvivalentně

$$E: \quad x^2+y^2 \le 1 \quad \& \quad x^2+y^2 \le z \le 2-x^2-y^2$$

což je prostě oblast ležící nad kruhem o poloměru 1 v rovině xy a je sevřena mezi grafy dvou funkcí (celkově vypadá jako "čočka"). Ještě si pro pořádek ověříme, že průmět oblasti do roviny xy je skutečně kruh o průměru 1 (jinak by totiž zadání nemělo smysl). Zřejmě ale je

$$x^2+y^2 \le 2-x^2-y^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2 \le 1$$

takže je to v pořádku.

V cylindrických souřadnicích Φ je parametrizací $E = \Phi(U)$ množina

$$U: \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \& \quad 0 \le r \le 1 \quad \& \quad r^2 \le h \le 2-r^2 \ .$$

Pak můžeme psát

$$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} \, dz \, dy \, dx = \iiint_{E=\Phi(U)} (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} \, dV =$$

$$= \iiint_U r^3 \cdot r \, d\varphi \, dh \, dr = \int_0^1 \int_{r^2}^{2-r^2} \int_0^{2\pi} r^4 \, d\varphi \, dh \, dr = 2\pi \int_0^1 \int_{r^2}^{2-r^2} r^4 \, dh \, dr =$$

$$= 4\pi \int_0^1 r^4(1-r^2) \ dr = 4\pi \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) = \frac{8}{35}\pi \ .$$

Všimněme si, že spočítaný integrál vyjadřuje moment setrvačnosti "čočky" E s hustotou $\varrho(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$ vzhledem k ose z.

Sférické souřadnice mají předpis:.

$$\Psi: \begin{array}{rcl} x &=& (r\sin\vartheta)\cos\varphi \\ y &=& (r\sin\vartheta)\sin\varphi \\ z &=& r\cos\vartheta \end{array}$$

kde $(r,\varphi,\vartheta) \in \langle 0,+\infty) \times \langle 0,2\pi\rangle \times \langle 0,\pi\rangle$.

Poznámka: Sférické souřadnice jsou složením dvou (upravených) cylindrických souřadnic a sice:

$$\Psi = \Phi_2 \circ \Phi_1$$

$$\Phi_2: \begin{array}{rcl} x &=& \tilde{r}\cos\tilde{\varphi} \\ y &=& \tilde{r}\sin\tilde{\varphi} \\ z &=& \tilde{z} \end{array} , \qquad \Phi_1: \begin{array}{rcl} \tilde{r} &=& r\sin\vartheta \\ \tilde{\varphi} &=& \varphi \\ \tilde{z} &=& r\cos\vartheta \end{array}$$

takže pro determinant máme

$$\det \Psi' = \det(\Phi_2)'_{|\Phi_1} \cdot \det(\Phi_1)' = \tilde{r}_{|\Phi_1} \cdot r = (r \sin \vartheta) \cdot r = r^2 \sin \vartheta.$$

Př. (sférické souřadnice)

Vypočtěte

$$\iiint_E \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-2)^2}} \, dV,$$

kde $E: \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Řešení:

Pomocí sférických souřadnic Ψ si zvolíme parametrizaci koule $E = \Psi(U)$ jako

$$U: \quad 0 \leq r \leq 1 \quad \& \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad \& \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi \, .$$

Takže můžeme psát

$$\iiint_{E=\Psi(U)} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 4z + 4}} \, dV = \iiint_U \frac{r^2 \sin \vartheta}{\sqrt{r^2 - 4r \cos \vartheta + 4}} \, dV =$$

$$= \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{r^2 \sin \vartheta}{\sqrt{r^2 - 4r \cos \vartheta + 4}} \, d\varphi \, d\vartheta \, dr = 2\pi \int_0^1 \int_0^\pi \frac{r^2 \sin \vartheta}{\sqrt{r^2 - 4r \cos \vartheta + 4}} \, d\vartheta \, dr =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left[r \frac{\sqrt{r^2 - 4r \cos \vartheta + 4}}{2} \right]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} dr = \pi \int_0^1 r \left(\sqrt{r^2 + 4r + 4} - \sqrt{r^2 - 4r + 4} \right) dr =$$

$$= \pi \int_0^1 r \Big(|r+2| - |r-2| \Big) \, dr = \pi \int_0^1 r \Big(r + 2 - (2 - r) \Big) \, dr = 2\pi \int_0^1 r^2 \, dr = \frac{2}{3}\pi.$$

Těžiště tělesa $E \subseteq \mathbb{R}^3$ o (nezáporné) hustotě $\varrho(x, y, z) : E \to \mathbb{R}$ se definuje jako bod $T = (T_1, T_2, T_3) \in \mathbb{R}^3$ kde

$$T_1 = \frac{1}{m} \iiint_E x \cdot \varrho(x, y, z) \, \mathrm{d}V,$$

$$T_2 = \frac{1}{m} \iiint_E y \cdot \varrho(x, y, z) \, \mathrm{d}V,$$

$$T_3 = \frac{1}{m} \iiint_E z \cdot \varrho(x, y, z) \, \mathrm{d}V,$$

a $m = \iiint_E \varrho(x, y, z) \, \mathrm{d}V$ je hmotnost tohoto tělesa. (Podobně by se těžiště definovalo, kdyby se jednalo jen o útvar v rovině se souřadnicemi x a y a plošnou hustotou $\sigma(x, y)$.)

Př. (sférické souřadnice)

Vypočtěte těžiště tělesa

$$E: \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \quad \& \quad z \cdot \tan(\alpha_0) \geq \sqrt{x^2 + y^2},$$

s konstantní hustotou rovnou 1, kde $R > 0$ a $\alpha_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ jsou parametry.

Řešení:
Těleso E je průnikem koule o poloměru R a kužele s vrcholovým úhlem $2\alpha_0$, jehož špička je ve středu koule. Výhodné tedy bude použít sférické souřadnice

$$\Psi: \quad \begin{array}{rcl} x &=& (r\sin\vartheta)\cos\varphi \\ y &=& (r\sin\vartheta)\sin\varphi \\ z &=& r\cos\vartheta \end{array}$$

Parametrizace $E = \Psi(U)$ pak bude

$$U: \quad 0 \le r \le R \quad \& \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \& \quad 0 \le \vartheta \le \alpha_0$$

Pro těžiště musíme nejdříve spočítat hmotnost:

$$m = \iiint\limits_{E=\Psi(U)} 1\ dV = \iiint\limits_{U} r^2 \sin\vartheta\ dV = \int_0^R \int_0^{\alpha_0} \int_0^{2\pi} r^2 \sin\vartheta\ d\varphi\ d\vartheta\ dr =$$

$$= 2\pi \int_0^R \int_0^{\alpha_0} r^2 \sin\vartheta\ d\vartheta\ dr = 2\pi(1-\cos\alpha_0) \int_0^R r^2\ dr = \frac{2}{3}\pi R^3 (1-\cos\alpha_0).$$

Protože těleso E je rotačně symetrické podle osy z, budou x-ová i y-ová souřadnice těžiště obě nulové. Zbývá tedy spočítat z-ovou souřadnici těžiště:

$$T_3 = \frac{1}{m} \iiint\limits_{E=\Psi(U)} z\ dV = \frac{1}{m} \iiint\limits_{U} r^3 \cos\vartheta \sin\vartheta\ d\varphi\ d\vartheta\ dr = \frac{1}{m} \int_0^R \int_0^{\alpha_0} \int_0^{2\pi} r^3 \frac{\sin 2\vartheta}{2}\ d\varphi\ d\vartheta\ dr =$$

$$= \frac{\pi}{m} \left(\int_0^R r^3\ dr \right) \cdot \left(\int_0^{\alpha_0} \sin 2\vartheta\ d\vartheta \right) = \frac{\pi R^4}{8m}(1-\cos 2\alpha_0) = \frac{3R}{16} \cdot \frac{1-\cos 2\alpha_0}{1-\cos\alpha_0} = \frac{3R}{8}(1+\cos\alpha_0).$$

Př. (obecnější sférické souřadnice)
Vypočtěte těžiště tělesa

$$E: \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1 \quad \& \quad x, y, z \ge 0,$$

s konstantní hustotou rovnou 1, kde $a, b, c > 0$ jsou parametry.

Řešení:
Oblast integrace E je osmina obecného elipsoidu. Použijeme proto upravené sférické souřadnice Φ (které parametrizují tento elipsoid):

$$\Phi: \quad \begin{array}{rcl} x/a &=& (r\sin\vartheta)\cos\varphi \\ y/b &=& (r\sin\vartheta)\sin\varphi \\ z/c &=& r\cos\vartheta \end{array},$$

které vzniknou složením "klasických" sférických souřadnic Ψ a lineární transformace $\mathcal{L}$, která deformuje jednotlivé osy:

$$\Phi = \mathcal{L} \circ \Psi, \qquad \mathcal{L}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) := (a\tilde{x}, b\tilde{y}, c\tilde{z}).$$

Máme tedy
$$\Phi' = \mathcal{L}' \circ \Psi' \quad \text{a} \quad \det \Phi' = (\det \mathcal{L}') \cdot (\det \Psi') = abc \cdot r^2 \sin \vartheta,$$
protože
$$\mathcal{L}' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$
Parametrizace U oblasti $E = \Phi(U)$ je
$$U: \quad 0 \leq r \leq 1 \quad \& \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad \& \quad 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}.$$
Výpočet hmotnosti m oblasti E si usnadníme znalostí objemu koule o poloměru 1 (označme ji jako K) a toho, že objem E je jedna osmina objemu celého původního elipsoidu, který označme např. jako F. Protože $F = \mathcal{L}(K)$, máme:
$$m = \iiint\limits_E 1 \; dV = \frac{1}{8} \iiint\limits_{F=\mathcal{L}(K)} 1 \; dV = \frac{1}{8} \iiint\limits_K |\det \mathcal{L}'| \; dV =$$
$$= \frac{abc}{8} \iiint\limits_K 1 \; dV = \frac{abc}{8} \cdot \frac{4}{3}\pi = \frac{\pi abc}{6}.$$
Pro zjištění těžiště $\vec{T} = (T_1, T_2, T_3)$ se nyní stačí omezit jen na jednu složku (např. T_3), protože ostatní lze analogicky získat příslušným natočením elipsoidu do daného směru a zopakováním výpočtu. Máme tedy
$$T_3 = \frac{1}{m} \iiint\limits_{E=\Phi(U)} z \; dV = \frac{1}{m} \iiint\limits_U (cr \cos \vartheta) \cdot (abc \; r^2 \sin \vartheta) \; dV =$$
$$= \frac{3c}{\pi} \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \sin 2\vartheta \; d\varphi \; d\vartheta \; dr = \frac{3c}{\pi} \left(\int_0^1 r^3 \; dr \right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\vartheta \; d\vartheta \right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \; d\varphi \right) = \frac{3}{8}c.$$
Podobně tedy budeme mít $T_1 = \frac{3}{8}a$ a $T_2 = \frac{3}{8}b$.