MA2 - 6. konzultace

1 Integrální věty

1.1 Greenova věta

Definice: Pro základní oblast integrace $E \subseteq \mathbb{R}^2$ tvoří její okraj ∂E uzavřenou křivku. Definujeme si *kanonickou* orientaci tohoto okraje ∂E a to v kladném směru (neboli proti směru hodinových ručiček). Tato orientace znamená, že při procházení ∂E máme v daném místě oblast E vždy po levé straně.

Věta: Nechť $E \subseteq \mathbb{R}^2$ je oblast integrace složená z konečně mnoha základních oblastí $E_1, \dots, E_n$ s navzájem disjunktními vnitřky. Nechť každá z křivek ∂E_i má kanonickou orientaci (tj. kladnou). Pak se hranice ∂E skládá z konečně mnoha orientovaných uzavřených křivek $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_k$ takových, že

- $\partial E = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{C}_i \ \subseteq \ \bigcup_{j=1}^{n} \partial E_j$ a
- pro každé $i = 1, \dots, k$ se orientace křivky $\mathcal{C}_i$ shoduje s orientací příslušného úseku kladně orientované křivky ∂E_j (až na konečně mnoho bodů). Shodností orientací myslíme shodu jejich jednotkových tečných polí.

Poznamenejme, že rozklad ∂E na křivky $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_k$ není jednoznačný a to ani, co se týče jejich počtu.

Definice: Orientaci okraje ∂E oblasti integrace E z předchozí věty budeme opět označovat jako *kanonickou*. Tato orientace opět znamená, že při procházení ∂E máme v daném místě oblast E vždy po levé straně.

(Je samozřejmě potřeba ještě ukázat, že takto definovaná orientace nezávisí na způsobu rozkladu E na základní oblasti ani na výběru křivek $\mathcal{C}_i$.)

Greenova věta: Nechť $E \subseteq \mathbb{R}^2$ je oblast integrace a její okraj ∂E má *kanonickou* orientaci. Pak pro spojitě diferencovatelné vektorové pole $\vec{F} = (F_1, F_2)$ platí

$$\int\limits_{\partial E} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint\limits_{E} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \, dS \ .$$

Poznámka: Výraz na pravé straně si můžeme pamatovat jako

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ F_1 & F_2 \end{vmatrix} .$$

Je to analogie rotace pole (jakéhosi "víru"v daném bodě) ve třech dimenzích. Interpretací Greenovy věty je to, že "víry"pole uvnitř oblasti se v sousedních bodech vyruší a zbude jen "vír"na okraji oblasti. Někdy místo označení "kanonická orientace"budeme říkat, že orientace okraje je v souladu s Greenovou větou.

Př. (Greenova věta)

Použijte Greenovu větu k nalezení práce síly $\vec{F}(x, y) = (2xy^3, \ 4x^2y^2)$ vykonané na částici podél křivky $\mathcal{C}$, která je hranicí oblasti M ohraničené křivkami $y = 0$, $x = 1$ a $y = x^3$ v prvním kvadrantu. Křivka $\mathcal{C}$ je orientována v kladném smyslu (tj. proti směru hodinových ručiček).

Řešení:

Máme tedy oblast

$$M: \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad 0 \le y \le x^3.$$

Její hranicí je po částech diferencovatelná křivka, která má orientaci odpovídající použití Greenovy věty.

Dále je

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 8xy^2 - 6xy^2 = 2xy^2$$

a proto

$$\int\limits_{\mathcal{C}=\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint\limits_M \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \, dS = \iint\limits_M 2xy^2 \, dS = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^3} 2xy^2 \, dy \, dx = \int\limits_0^1 \frac{2}{3} x^{10} \, dx = \frac{2}{33}.$$

Př. (Greenova věta)

Pomocí Greenovy věty spočítejte

$$\int\limits_{\mathcal{C}} (3y - e^{\sin x}) \, dx + (7x + \sqrt{y^4 + 1}) \, dy$$

kde $\mathcal{C}$ je kladně orientovaná kružnice $x^2 + y^2 = 9$.

Řešení:

Naše oblast M je kruh o poloměru 3

$$M: \quad x^2 + y^2 \le 3^2$$

a pole je

$$\vec{F}(x, y) = \left(3y - e^{\sin x}, \; 7x + \sqrt{y^4 + 1} \right) .$$

Orientace křivky $\mathcal{C}$ je v souhlase s Greenovou větou. Můžeme proto psát (s využitím znalosti obsahu kruhu)

$$\int\limits_{\mathcal{C}=\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint\limits_M \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \, dS = \iint\limits_M (7 - 3) \, dS = \iint\limits_M 4 \, dS = 4 \cdot \pi \cdot 3^2 = 36\pi \, .$$

Je vidět, že původní křivkový integrál bychom těžko počítali, ale s využitím Greenovy věty je výpočet snadný.

Př. (Greenova věta)

Pomocí Greenovy věty spočítejte plochu v $\mathbb{R}^2$ omezenou cykloidou $\varphi(t) = (t - \sin t, \; 1 - \cos t)$ pro $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a osou x.

Řešení:

Plochu E si vymezíme křivkami $\mathcal{C}_1$ (cykloida) a $\mathcal{C}_2$ (úsečka na ose x) tak, aby tyto křivky tvořily její okraj, který bude orientovaný v souladu s Greenovou větou. Cykloida

$$\mathcal{C}_1: \quad \varphi(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

má podle zadané parametrizace opačnou orientaci než potřebujeme. Pro úsečku je nejjednodušší si zvolit parametrizaci

$$\mathcal{C}_2: \quad \psi(t) = (t, 0), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

která je ve směru, který chceme.

Greenovu větu, pro (zatím nespecifikované) vektorové pole $\vec{F}(x,y) = \Big(F_1(x,y), F_2(x,y)\Big)$, pak použijeme takto:

$$\iint\limits_E \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \, dS = \int\limits_{\partial E} \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\int\limits_{\mathcal{C}_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int\limits_{\mathcal{C}_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

kde znaménka u křivek odpovídají tomu, jestli daná křivka má nebo nemá orientaci v souladu s Greenovou větou.

Teď už jen zbývá si zvolit vhodné vektorové pole a to tak, aby $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1$. Pak totiž bude

$$\text{obsah}(E) = \iint\limits_E \underbrace{1}_{\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}} \, dS = \cdots = -\int\limits_{\mathcal{C}_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int\limits_{\mathcal{C}_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} \,.$$

Takových voleb je mnoho, ale pro nás bude nejlepší nějaká jednoduchá, např. $\frac{\partial F_2}{\partial x} = 1$ a $\frac{\partial F_1}{\partial y} = 0$, tj. $\vec{F} = (0, x)$. Pro takovouto volbu bude i integrál $\int\limits_{\mathcal{C}_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}$ nulový, protože $\vec{F}$ je kolmé k ose x, takže při pohybu ve vodorovném směru nekoná práci. Ale stejně si nulovost ještě ověříme i explicitně.

Takže máme

$$\text{pro cykloidu: } \varphi(t) = (\underbrace{t - \sin t}_{=x(t)}, \ \underbrace{1 - \cos t}_{=y(t)}), \qquad \varphi'(t) = (1 - \cos t, \ \ \sin t)$$

$$\text{pro úsečku: } \psi(t) = (\underbrace{t}_{=x(t)}, \ \underbrace{0}_{=y(t)}), \qquad \psi'(t) = (1, \ \ 0)$$

a po dosazení dostaneme

$$\text{obsah}(E) = -\int\limits_{\mathcal{C}_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int\limits_{\mathcal{C}_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\int\limits_0^{2\pi} \vec{F}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, dt + \int\limits_0^{2\pi} \vec{F}(\psi(t)) \cdot \psi'(t) =$$

$$= -\int\limits_0^{2\pi} (0, \ \ t - \sin t) \cdot \begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \, dt + \int\limits_0^{2\pi} \underbrace{(0, \ \ t) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=0} \, dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} t \cdot (-\sin t) + \sin^2 t \, dt = \underbrace{\big[t \cos t\big]_0^{2\pi}}_{=2\pi} - \underbrace{\int\limits_0^{2\pi} \cos t \, dt}_{=0} + \underbrace{\int\limits_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt}_{=\pi} = 2\pi - 0 + \pi = 3\pi \,.$$

Př. (Greenova věta)

Pomocí Greenovy věty spočítejte

$$\int_{\mathcal{C}} y^2\, dx + 3xy\, dy$$

kde $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ je hranice mezikruží určeného záporně orientovanou kružnicí $\mathcal{C}_1$ s poloměrem 2 a středem v počátku a kladně orientovanou kružnicí $\mathcal{C}_2$ s poloměrem 1 a středem také v počátku.

Řešení:
Orientace hranice mezikruží je opačná než orientace pro Greenovu větu (správná orientace znamená, že při postupu podél hranice máme oblast po levé straně). Naše oblast je tvaru

$$M: \quad 1^2 \leq x^2 + y^2 \leq 2^2$$

a pole je

$$\vec{F}(x,y) = \left(y^2,\ 3xy\right) .$$

Můžeme proto psát

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\iint_{M} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\, dS = -\iint_{M} 3y - 2y\ dS = \iint_{M} -y\ dS = \begin{bmatrix} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \\ 1\leq r\leq 2 \\ 0\leq\varphi\leq 2\pi \end{bmatrix} =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_1^2 -r^2\cos\varphi\ dr\ d\varphi = \left(\int_1^2 -r^2\ dr\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi}\cos\varphi\ d\varphi\right) = 0 .$$

1.2 Stokesova věta

Stokesova věta je zobecněním Greenovy věty z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^3$, kdy původně rovnou plochu už uvažujeme různě zakřivenou v prostoru a spolu s tím i její okraj může být zakřivená v prostoru.

Stokesova věta: Nechť plocha $M \subseteq \mathbb{R}^3$ a její okraj $K(M)$ mají orientace, které jsou navzájem v souladu (neboli: odpovídají pravidlu pravé ruky). Pak pro spojitě diferencovatelné vektorové pole $\vec{F} = (F_1,\ F_2,\ F_3)$ platí:

$$\int_{K(M)} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_{M} \mathrm{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S} ,$$

kde

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) := \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z},\ -\left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\right),\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) .$$

Poznámka: Z předchozí konzultace o plochách připomeňme pravidlo pravé ruky:
Ruku položíme na plochu poblíž okraje tak, aby vektor její orientace mířil do dlaně a palec ukazoval směrem dovnitř plochy - pak zbylé prsty ukazují směr orientace okraje), nebo jednodušeji - když obcházíme plochu podél okraje ve směru křivky $\mathcal{C}$, musíme ji aktuálně mít vždy po levé straně.

Př. (Stokesova věta)
Pomocí Stokesovy věty spočítejte

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s},$$

kde $\vec{F}(x,y,z) = (xz, 2xy, 3xy)$ a $\mathcal{C}$ je hranice části roviny $3x + y + z = 3$, která je v prvním oktantu. Okraj plochy je orientovaný v záporném smyslu při pohledu seshora (neboli: jestliže křivku, která tvoří okraj, zprojektujeme do roviny xy, bude mít tento její obraz zápornou orientaci).

Řešení:
Plocha M je trojúhelník. Orientace plochy v souladu s orientací okraje je tedy směrem dolů (při pohledu zdola bude okraj orientovaný v "kladném" smyslu). Normované normálové pole je tak dané směrem vektoru

$$\vec{n} = -(3,1,1)\ .$$

Dále máme

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & 2xy & 3xy \end{vmatrix} = \big(3x,\ x-3y,\ 2y\big)\ .$$

Plochu zparametrizujeme jako graf funkce $z = 3 - 3x - y$, tedy

$$\Phi(x,y) = (x, y, 3-3x-y)$$

pomocí množiny

$$U: \quad 0 \le x \le 1 \ \ \&\ \ 0 \le y \le 3-3x\ .$$

(U je jen projekcí M do roviny xy). Pro tečné vektory máme

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial \Phi}{\partial x} &= \begin{pmatrix} 1, & 0, & -3 \end{pmatrix} \\ \tfrac{\partial \Phi}{\partial y} &= \begin{pmatrix} 0, & 1, & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \big(3,1,1\big).$$

Protože tento vektorový součin má opačný směr než zadaná orientace $\vec{n}$, musíme ho do integrálu dosadit s opačným znaménkem (nebo prostě změnit pořadí vektorů v součinu, tj. dosadit $\frac{\partial \Phi}{\partial y} \times \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ namísto $\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y}$). Takže máme

$$\int\limits_{\mathcal{C}=K(M)} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iint\limits_{M=\Phi(U)} \mathrm{rot}(\vec{F})\cdot d\vec{S} = \iint\limits_{U} \Big(\mathrm{rot}(\vec{F})\circ\Phi\Big)\cdot\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\times\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) dS =$$

$$= \iint\limits_{U} (3x,\ x-3y,\ 2y)\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} dS = \iint\limits_{U} (-10x+y)\ dS = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{3(1-x)} y - 10x\ dy\ dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{9}{2}(1-x)^2 - 30x(1-x)\ dx = \frac{3}{2} - 30\cdot\frac{1}{6} = -\frac{7}{2}\ .$$

Př. (Stokesova věta)
Spočítejte práci síly

$$\vec{F}(x,y,z) = \Big((x+1)^x + z^2\Big)\vec{i} + \Big((y+1)^y + x^2\Big)\vec{j} + \Big((z+1)^z + y^2\Big)\vec{k}$$

vykonané na částici, která se pohybuje podél okraje části sféry $x^2+y^2+z^2 = 4$ ležící v prvním oktantu.

Křivka $\mathcal{C}$ daná okrajem této plochy je orientovaná v záporném smyslu při pohledu seshora (přesněji: ve směru daném posloupnosti bodů $(2,0,0) \to (0,0,2) \to (0,2,0)$).

Řešení:
Jak je vidět z tvaru vektorového pole, integrál odpovídající práci $\vec{F}$ síly podél uvedeného okraje $\mathcal{C}$ bychom přímým způsobem počítali asi těžko. Pomůžeme si proto Stokesovou větou, která integrál převede na tok pole $\mathrm{rot}(\vec{F})$ plochou

$$M: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad x, y, z \geq 0 \ .$$

Tu musíme orientovat tak, aby její orientace byla v souladu se zvolenou orientací křivky $\mathcal{C}$. To lze uvidět např. z náčrtku a správná orientace plochy M je pak směrem *do počátku souřadnic* (tedy kdyby M byla celá sféra, byla by to ta orientace dovnitř).

Pro použití Stokesovy věty si spočítáme rotaci pole

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (x+1)^x + z^2 & (y+1)^y + x^2 & (z+1)^z + y^2 \end{vmatrix} = (2y - 0,\ 2z - 0,\ 2x - 0) \ .$$

Dále budeme potřebovat ještě plochu M zparametrizovat. K tomu bude nejvhodnější použít sférických souřadnic (pro $r = 2$). Parametrizace pak bude

$$\Phi: \quad \begin{array}{rcl} x & = & 2\sin\vartheta\cos\varphi \\ y & = & 2\sin\vartheta\sin\varphi \\ z & = & 2\cos\vartheta \end{array}$$

pro

$$U: \quad 0 \leq \varphi \leq \tfrac{\pi}{2} \quad \& \quad 0 \leq \vartheta \leq \tfrac{\pi}{2} \ .$$

Pro výpočet plošného integrálu budeme potřebovat ještě vektorový součin

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} & \frac{\partial z}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial\vartheta} & \frac{\partial y}{\partial\vartheta} & \frac{\partial z}{\partial\vartheta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2\sin\vartheta\sin\varphi & 2\sin\vartheta\cos\varphi & 0 \\ 2\cos\vartheta\cos\varphi & 2\cos\vartheta\sin\varphi & -2\sin\vartheta \end{vmatrix} =$$

$$= (-4\sin^2\vartheta\cos\varphi,\quad -4\sin^2\vartheta\sin\varphi,\quad -4\sin\vartheta\cos\vartheta)$$

který má zjevně tu správnou orientaci odpovídající orientaci plochy (tj. směrem *do počátku* souřadnic), protože znaménko z-tové složky je záporné pro body z vnitřku množiny U. Kdyby součin neměl požadovanou orientaci, vzali bychom ho s opačným znaménkem. Proto teď můžeme psát

$$\int\limits_{\mathcal{C}=K(M)} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint\limits_{M=\Phi(U)} \mathrm{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S} = \iint\limits_{U} \left(\mathrm{rot}(\vec{F}) \circ \Phi\right) \cdot \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\right) d\varphi\ d\vartheta =$$

$$= \iint\limits_{U} (4\sin\vartheta\sin\varphi,\quad 4\cos\vartheta,\quad 4\sin\vartheta\cos\varphi) \cdot \begin{pmatrix} -4\sin^2\vartheta\cos\varphi \\ -4\sin^2\vartheta\sin\varphi \\ -4\sin\vartheta\cos\vartheta \end{pmatrix} d\varphi\ d\vartheta =$$

$$= -16 \iint\limits_{U} \sin^3\vartheta(\sin\varphi\cos\varphi) + (\sin^2\vartheta\cos\vartheta)\sin\varphi + (\sin^2\vartheta\cos\vartheta)\cos\varphi\ d\varphi\ d\vartheta =$$

$$= \left(-16\int\limits_0^{\pi/2} \underbrace{\sin^3\vartheta}_{(1-\cos^2\vartheta)\sin\vartheta}\ d\vartheta\right) \cdot \left(\int\limits_0^{\pi/2} \sin\varphi\cos\varphi\ d\varphi\right) + \left(-16\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2\vartheta\cos\vartheta\ d\vartheta\right) \cdot \left(\int\limits_0^{\pi/2} (\sin\varphi + \cos\varphi)\ d\varphi\right) =$$

$$= \Big[-16(-\cos\vartheta + \tfrac{1}{3}\cos^3\vartheta)\Big]_0^{\pi/2} \cdot \Big[\tfrac{1}{2}\sin^2\varphi\Big]_0^{\pi/2} + \Big[-\tfrac{16}{3}\sin^3\vartheta\Big]_0^{\pi/2} \cdot \Big[-\cos\varphi + \sin\varphi\Big]_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{32}{3}\cdot\frac{1}{2} + \left(-\frac{16}{3}\right)\cdot 2 = -\frac{16}{3}\ .$$

Př. (Stokesova věta)

Určete

$$\int\limits_{\mathcal{C}} (y-z)\ dx + (z-x)\ dy + (x-y)\ dz$$

kde

$$\mathcal{C}:\ x^2+y^2=1\ \ \&\ \ x+z=1$$

je kladně orientovaná křivka při pohledu seshora.

Řešení:

Křivka $\mathcal{C}$ je elipsa, která vznikne jako průnik roviny $x+z=1$, která šikmo přeřízne povrch válce $x^2+y^2=1$. Můžeme ji chápat jako hranici plochy

$$M:\qquad x^2+y^2\le 1\ \ \&\ \ x+z=1$$

s orientací nahoru. Použijeme proto Stokesovu větu. Spočítáme si rotaci

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix} = \big(-2,\ -2,\ -2\big)\ .$$

Protože pole $\mathrm{rot}(\vec{F})$ je konstantní a M představuje plochu ohraničenou elipsou, jde o celkem lehký výpočet, který si zkusíme udělat bez použití parametrizace M.

Normované normálové vektorové pole orientované plochy M je určené normálovým vektorem roviny, ve které plocha leží, a sice $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$ (směr vektoru také odpovídá zadání). Můžeme pak psát

$$\int\limits_{\mathcal{C}=K(M)} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iint\limits_M \mathrm{rot}(\vec{F})\cdot d\vec{S} = \iint\limits_M \big(\mathrm{rot}(\vec{F})\cdot\vec{n}\big)\ dS = -2\sqrt{2}\iint\limits_M 1\ dS\ .$$

Teď už stačí jen určit velikost povrchu plochy M (tj. $\iint\limits_M 1\ dS$). Protože ale jde o plochu ohraničenou elipsou s délkami poloos $a=1$ a $b=\sqrt{2}$ (snadno určíme z obrázku), je obsah roven $\pi ab = \sqrt{2}\pi$.

Dosazením pak dostáváme

$$\int\limits_{\mathcal{C}=K(M)} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \cdots = -2\sqrt{2}\iint\limits_M 1\ dS = -2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\pi = -4\pi\ .$$

Nebo prostě můžeme použít parametrizaci plochy M - plochu zparametrizujeme jako graf funkce $z=1-x$, tedy

$$\Phi(x,y) = (x,y,1-x)$$

pomocí množiny

$$U:\quad x^2+y^2\le 1$$

a dál postupujeme už obvyklým způsobem.

1.3 Gaussova věta

Gaussova věta dává do souvislosti tok pole $\vec{F}$ přes okraj (tj. plochu) $M = \partial E$ trojrozměrné oblasti E v $\mathbb{R}^3$ s integrálem přes tuto oblast E.

Definice: Pro základní oblast integrace $E \subseteq \mathbb{R}^3$ tvoří její hranice ∂E uzavřenou plochu (tj. plochu bez okraje, neboli $K(\partial E) = \emptyset$). Definujeme si *kanonickou* orientaci této hranice ∂E a to jako tzv. *vnější*. Tato orientace znamená, že v daném bodě hranice ∂E míří normálový vektor nejkratším směrem pryč z tělesa E.

Věta: Nechť $E \subseteq \mathbb{R}^3$ je oblast integrace složená z konečně mnoha základních oblastí $E_1, \dots, E_n$ s navzájem disjunktními vnitřky. Nechť každá z ploch ∂E_i má kanonickou orientaci (tj. vnější). Pak se hranice ∂E skládá z konečně mnoha orientovaných uzavřených ploch $M_1, \dots, M_k$ takových, že

- $\partial E = \bigcup_{i=1}^k M_i \ \subseteq \ \bigcup_{j=1}^n \partial E_j$ a
- pro každé $i = 1, \dots, k$ se orientace plochy M_i shoduje s orientací příslušné části vnějškově orientované plochy ∂E_j (shoda je samozřejmě až na množinu skládající se z konečně mnoha křivek). Shodností orientací myslíme shodu jejich jednotkových normálových polí.

Rozklad ∂E na plochy $M_1, \dots, M_k$ není jednoznačný a to ani, co se týče jejich počtu.

Definice: Orientaci okraje ∂E oblasti integrace $E \subseteq \mathbb{R}^3$ z předchozí věty budeme opět označovat jako *kanonickou*. Tato orientace opět znamená, že v daném místě hranice ∂E míří normálový vektor nejkratším směrem pryč z tělesa E.

(Je samozřejmě potřeba ještě ukázat, že takto definovaná orientace nezávisí na způsobu rozkladu E na základní oblasti ani na výběru ploch M_i.)

Gaussova věta: Nechť $E \subseteq \mathbb{R}^3$ je oblast integrace. Nechť plocha, která tvoří její okraj ∂E, má *kanonickou* (tj. vnější) orientaci. Pak pro spojitě diferencovatelné vektorové pole $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ platí

$$\iint_{\partial E} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_{E} \operatorname{div}(\vec{F}) \, dV$$

kde funkce

$$\operatorname{div}(\vec{F}) := \nabla \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z},$$

která se integruje na oblasti E se nazývá *divergence* pole $\vec{F}$.

Poznámka: Hodnota divergence se interpretuje jako "zdroj"pole v daném bodě (při kladné hodnotě) případně "odtok"pole v daném bodě (při záporné hodnotě). Smyslem Gaussovy věty tedy je, že celkový "součet"zdrojů a odtoků pole v daném objemu odpovídá příslušnému toku pole přes okraj.

Př. (Gaussova věta)

Pomocí Gaussovy věty spočítejte tok pole $\vec{F} = (3x,\ xy,\ 2xz)$ povrchem krychle $E = \langle 0, 1 \rangle^3 \subseteq \mathbb{R}^3$ s vnější orientací.

Řešení:
Máme

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = 3 + x + 2x = 3 + 3x$$

a tedy

$$\iint\limits_{\partial E} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint\limits_{E} \operatorname{div}(\vec{F})\ dV = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 (3+3x)\ dx\ dy\ dz = \left(\int\limits_0^1 3+3x\ dx \right) \cdot \left(\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 1\ dy\ dz \right) = \frac{9}{2}.$$

Př. (Gaussova věta)

Pomocí Gaussovy věty spočítejte tok vektorového pole $\vec{F}(x,y,z) = (x^3,\ y^3,\ z^3)$ a sférou $x^2+y^2+z^2 = 1$ s vnější orientací.

Řešení:

Máme

$$E: \quad x^2+y^2+z^2 \le 1$$

a

$$\partial E: \quad x^2+y^2+z^2 = 1\ .$$

Orientace okraje $M = \partial E$ je dána vnější normálou.

Máme

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = 3(x^2+y^2+z^2)$$

a Gaussova věta nám dává

$$\iint\limits_{\partial E} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint\limits_{E} \operatorname{div}(\vec{F})\ dV = \iiint\limits_{E} 3\left(x^2+y^2+z^2\right)\ dV = \left[\substack{x=r\sin\vartheta\cos\varphi \\ y=r\sin\vartheta\sin\varphi \\ z=r\cos\vartheta \\ (r,\varphi,\vartheta)\in\langle 0,1\rangle\times\langle 0,2\pi\rangle\times\langle 0,\pi\rangle} \right] =$$

$$= \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^1 3r^2 \cdot |r^2 \sin\vartheta|\ dr\ d\varphi\ d\vartheta = \left(\int\limits_0^1 3r^4\ dr \right) \cdot \left(\int\limits_0^{2\pi} 1\ d\varphi \right) \cdot \left(\int\limits_0^\pi \sin\vartheta\ d\vartheta \right) = \frac{3}{5} \cdot 2\pi \cdot 2 = \frac{12}{5}\pi.$$

Př. (Gaussova věta)

Pomocí Gaussovy věty určete

$$\iint\limits_{M} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

kde plocha je

$$M: \quad x+y+z = 1 \ \ \& \ \ x,y,z \ge 0$$

a je orientovaná směrem vzhůru a vektorové pole je

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(xy,\ yz,\ xz\right)\ .$$

Řešení:

Abychom mohli použít Gaussovu větu, potřebujeme nějakou trojrozměrnou oblast E, jejíž okraj ∂E bude obsahovat plochu M a kde tok pole zbytkem okraje, tj. orientovanou plochou $\partial E \setminus M$ bude nulový.

Jestliže si zvolíme čtyřstěn

$$E: \quad x+y+z \leq 1 \;\;\&\;\; x,y,z \geq 0$$

pak se jeho okraj ∂E skládá z plochy M (jejíž zadaná orientace odpovídá vnější orientaci) a tří trojúhelníků Δ_1, Δ_2 a Δ_2 (jejichž orientaci si zvolíme také jako "vnější"). Pole $\vec{F}$ na trojúhelníku

$$\Delta_1: \quad x=0 \;\;\&\;\; y+z \geq 1 \;\;\&\;\; y,z \geq 0$$

je tvaru $\vec{F}(0,y,z) = \big(0,\ yz,\ 0\big)$ a je proto rovnoběžné s plochou tohoto trojúhelníka. Proto bude

$$\iint\limits_{\Delta_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0\ .$$

A podobně to dopadne i pro zbylé trojúhelníky.

Celkově tedy budeme mít, že (při vnější orientaci okraje ∂E) bude

$$\iint\limits_{\partial E} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint\limits_{M} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \sum_{i=1}^{3} \underbrace{\iint\limits_{\Delta_i} \vec{F} \cdot d\vec{S}}_{=0} = \iint\limits_{M} \vec{F} \cdot d\vec{S}\ .$$

Teď tedy použijeme Gaussovu větu. Spočítáme si divergenci

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = y+z+x\ .$$

a čtyřstěn E si rozřežeme (kvůli Fubiniově větě) např. jako

$$E: \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \& \quad 0 \leq y \leq 1-x \quad \& \quad 0 \leq z \leq 1-x-y$$

Máme tedy

$$\iint\limits_{M} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint\limits_{\partial E} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint\limits_{E} \operatorname{div}(\vec{F})\ dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x+y+z\ dz\ dy\ dx =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[(x+y) + \frac{1}{2}(1-x-y)\right](1-x-y)\ dy\ dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^{1-x} 1-(x+y)^2\ dy\ dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[y - \frac{(x+y)^3}{3}\right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2}{3} - x + \frac{x^3}{3}\ dx = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{8}\ .$$

Př. (Gaussova věta)

Pomocí Gaussovy věty určete

$$\iint\limits_{M} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

kde $\vec{F}(x,y,z) = (x,\ y,\ z)$ a M je část paraboloidu $z = 1-x^2-y^2$ pro $z \geq 0$ s orientací danou vektorovým polem směřujícím vzhůru.

(Srovnejte se zadáním v předchozí konzultaci.)

Řešení:
Budeme postupovat podobně jako v předchozím příkladu. Plocha M spolu s kruhem

$$K: \quad x^2 + y^2 \leq 1 \quad \& \quad z = 0$$

(jehož orientace je směrem dolů) tvoří hranici ∂E (s vnější orientací) pro těleso

$$E: \quad 0 \leq z \leq 1 - (x^2 + y^2) \; .$$

Pole na kruhu K má tvar $\vec{F}(x,y,0) = (x,\ y,\ 0)$ a je tedy rovnoběžné z plochou kruhu. Proto je

$$\iint\limits_K \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0 \; .$$

Tudíž díky Gaussově větě pak budeme mít:

$$\iint\limits_M \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint\limits_M \vec{F} \cdot d\vec{S} + \underbrace{\iint\limits_K \vec{F} \cdot d\vec{S}}_{=0} = \iint\limits_{\partial E} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint\limits_E \underbrace{\mathrm{div}(\vec{F})}_{=1+1+1=3} \; dV = \iiint\limits_E 3 \; dV =$$

$$= \begin{bmatrix} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \\ z=h \\ 0\leq\varphi\leq 2\pi \\ 0\leq r\leq 1 \\ 0\leq z\leq 1-r^2 \end{bmatrix} = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{1-r^2} 3r \; dh \; dr \; d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^1 3r(1-r^2) \; dr \; d\varphi =$$

$$= \left(\int_0^1 (r - r^3) \; dr\right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} 3 \; d\varphi\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) 6\pi = \frac{3}{2}\pi \; .$$

(Srovnejte s výsledkem příkladu v předchozí konzultaci.)