MA2 - 7. konzultace

1 Mocninné a Fourierovy řady

Mocninné i Fourierovy řady se často uvažují i jako komplexní funkce. My se zde pro jednoduchost omezíme jen na reálné funkce reálných proměnných. Mnohá tvrzení by ovšem ve stejné podobě platila i pro komplexní případ.

1.1 Mocninné řady

Definice: Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$ a $a_n \in \mathbb{R}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$. Řadu tvaru $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, kde $x \in \mathbb{R}$, nazveme *mocninnou řadou (se středem v x_0)*.

Věta: Nechť řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ konverguje v bodě $x_1 \in \mathbb{R}$. Pak tato řada konverguje (dokonce absolutně) ve všech bodech $x \in \mathbb{R}$ takových, že $|x-x_0| < |x_1-x_0|$.

Tato věta teď umožňuje následující definici.

Definice: *Poloměr konvergence* R řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ je hodnota $0 \le R \le +\infty$ jednoznačně určena podmínkou, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

- $|x-x_0| < R \Rightarrow$ řada konverguje (dokonce absolutně),
- $|x-x_0| > R \Rightarrow$ řada diverguje.

Množina I, kde řada konverguje se nazývá obor konvergence (této řady). Množina I je tedy interval, který případně obsahuje některé krajní body.

Jestliže je tedy $R = +\infty$, pak řada konverguje na celé přímce $\mathbb{R}$ a jestliže $0 < R < +\infty$, pak řada určitě konverguje na intervalu $(x_0 - R, x_0 + R)$ a může (ale nemusí) konvergovat i v krajních bodech tohoto intervalu.

Věta (o poloměru konvergence):

- $\frac{1}{R} = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ (tzv. *odmocninové kritérium*)
- $\frac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, pokud tato limita existuje. (tzv. *podílové kritérium*)

Zde (a pouze jen zde!) používáme dohodu, že $\frac{1}{0} = +\infty$ a $\frac{1}{+\infty} = 0$ (a to jen proto, aby vzorce byly lépe zapamatovatelné).

Věta (o derivování a integrování mocninných řad):
Nechť

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

je součet mocninné řady s poloměrem konvergence $R > 0$. Nechť I je obor konvergence teto řady a I° jeho vnitřek. Pak

(a) funkce f má na intervalu I° derivace všech řádů a platí

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \big(a_n(x-x_0)^n\big)' = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n(x-x_0)^{n-1} \ ;$$

(b) funkce f je na intervalu I° integrabilní a platí

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\ dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_0}^{x} a_n(t-x_0)^n\ dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$$

tedy f má na I° neurčitý integrál a platí

$$\int f(x)\ dx = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}\Big) + C$$

pro $C \in \mathbb{R}$.

Věta (o spojitosti mocninné řady):

Mocninná řada $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ je spojitou funkcí v každém vnitřním bodě oboru konvergence I. Konverguje-li navíc tato řada v levém (resp. pravém) krajním bodě I, pak je $f(x)$ spojitá v tomto bodě zprava (resp. zleva).

Důležitý příklad: pro geometrickou řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ je $R = 1$, její obor konvergence je $(-1,1)$ a její součet je $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ pro $x \in (-1,1\rangle$.

Př. Určete poloměr konvergence a sečtěte mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2^n + (-1)^n) n x^n$$

na vnitřku oboru konvergence.

Řešení:

Poloměr konvergence: Využijeme třeba podílové kritérium:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Big|(2^{n+1}+(-1)^{n+1})(n+1)\Big|}{\Big|(2^n+(-1)^n)n\Big|} = \lim_{n\to\infty} 2 \cdot \frac{n+1}{n} \frac{\Big|1+\big(-\frac{1}{2}\big)^{n+1}\Big|}{\Big|1+\big(-\frac{1}{2}\big)^{n}\Big|} = 2$$

Poloměr konvergence je tedy $R = \frac{1}{2}$.

Součet: Řadu rozepíšeme pomocí součtu dvou řad. To můžeme udělat na společném oboru konvergence těchto řad. Pro $|x| < \frac{1}{2}$ platí, že

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2^n+(-1)^n) n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n(2x)^n + \sum_{n=0}^{\infty} n(-x)^n = 2x \sum_{n=0}^{\infty} n(\underbrace{2x}_{y_1})^{n-1} + (-x) \sum_{n=0}^{\infty} n(\underbrace{-x}_{y_2})^{n-1}$$

protože poloměr konvergence řad na pravé straně je postupně $R_1 = \frac{1}{2}$ a $R_2 = 1$. Pro sečtení využijeme toto:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ny^{n-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} y^n\right)' = \left(\frac{1}{1-y}\right)' = \frac{1}{(1-y)^2} \ .$$

Takže po dosazeni $y_1 = 2x$ a $y_2 = -x$ dostaneme

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2^n + (-1)^n) n x^n = \frac{2x}{(1-2x)^2} - \frac{x}{(1+x)^2}$$

pro $|x| < \frac{1}{2}$.

(Zjišťování konvergence na krajích nebylo požadováno, ale snadno je vidět, že řada na krajích diverguje).

Př. Určete poloměr konvergence a sečtěte mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

na vnitřku oboru konvergence.

Řešení:

Poloměr konvergence: Můžeme využít podílové kritérium pro obecnou řadu (ne nutně mocninnou): V našem případě tedy je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\right|}{\left|\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+3} |x^2| = |x^2|$$

Tedy řada konverguje pro $|x^2| < 1$ a diverguje pro $|x^2| > 1$, tudíž poloměr konvergence je nutně $R = 1$.

Součet: Pro $|x| < 1$ platí, že

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} \ .$$

Vzniklou řadu sečteme jako geometrickou: $\sum_{n=1}^{\infty} y^n = \frac{1}{1-y} - 1$, kde $y := x^2$. Pak už snadno máme:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2} - 1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right) - 1$$

a tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right) - 1 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\big(-\ln(1-x) + \ln(1+x)\big) + x + C \ .$$

Po dosazení $x = 0$ dostaneme $0 = \frac{1}{2}\big(-\ln(1) + \ln(1)\big) + 0 + C$, tedy $C = 0$. Takže

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

pro $|x| < 1$.

(Zjišťování konvergence na krajích nebylo požadováno, ale snadno je vidět, že řada na krajích diverguje).

1.2 Fourierovy řady

Motivací pro Fourierovy řady (a rozvoj) je snaha vyjádřit funkci s periodou T pomocí "nejběžnějších" periodických funkcí, které známe, tj. pomocí sinu a kosinu. Na rozdíl od mocninných řad, kde jde především o to, abychom se bodově co nejvíce přiblížili hodnotě původní funkce, zde nám půjde především o přiblížení pomocí normy v prostoru se skalárním součinem. Tento skalární součin bude dán integrálem. Pro lepší představu si připomeňme, jak to v prostorech se skalárním součinem funguje:

Motivace: Mějme vektorový prostor V se skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a navzájem kolmé nenulové vektory $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n \in V$. Pro vektor

$$\vec{w} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i$$

kde $\lambda_i \in \mathbb{R}$ máme

$$\langle \vec{w}, \vec{u}_i \rangle = \langle \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \vec{u}_j, \vec{u}_i \rangle = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle \vec{u}_j, \vec{u}_i \rangle = \lambda_i \langle \vec{u}_i, \vec{u}_i \rangle = \lambda_i \|\vec{u}_i\|^2$$

tedy

$$\lambda_i = \frac{\langle \vec{w}, \vec{u}_i \rangle}{\|\vec{u}_i\|^2}$$

a my máme

$$\vec{w} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle \vec{w}, \vec{u}_i \rangle}{\|\vec{u}_i\|^2} \cdot \vec{u}_i \ .$$

Tedy pomocí skalárního součinu umíme určit koeficienty λ_i v zápisu vektoru $\vec{w}$. A kromě toho platí i Pythagorova věta

$$\|\vec{w}\|^2 = \|\lambda_1 \vec{u}_1\|^2 + \cdots + \|\lambda_n \vec{u}_n\|^2 \ .$$

To je motivace pro následující zobecnění (detaily nebudeme rozebírat):

Uvažujme vektorový prostor všech integrabilních funkcí na intervalu $[0, T]$ takových, že mají i integrabilní kvadrát na intervalu $[0, T]$, a skalární součin těchto funkcí si definujeme jako

$$\langle f, g \rangle = \int_0^T f(t) g(t) \, dt \ .$$

(ve skutečnosti musíme ještě ztotožňovat ty funkce, které neumíme rozeznat z hlediska integrálu). Následující funkce pro $\omega = \frac{2\pi}{T}$ tvoří množinu navzájem kolmých vektorů (v tomto skalárním součinu):

$$1, \ \cos(\omega t), \ \sin(\omega t), \ \cos(2\omega t), \ \sin(2\omega t), \ \ldots$$

Označíme si obvyklou normu $\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle}$. Pak pro normy těchto vektorů máme

$$\|1\|^2 = \int_0^T 1^2 \, dt = T$$

$$\|\cos(k\omega t)\|^2 = \int_0^T \cos^2(k\omega t) \, dt = \tfrac{T}{2}$$

$$\|\sin(k\omega t)\|^2 = \int_0^T \sin^2(k\omega t)\, dt = \tfrac{T}{2}$$

pro $k \geq 1$.

Nyní si představme, že chceme "vyjádřit" funkci f pomocí výše uvedené množiny ortogonálních funkcí - tedy jako nekonečný součet $a_0 \cdot \frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \big[a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\big]$, kde jsme pouze konstantní funkci 1 nahradili konstantní funkcí $\frac{1}{2}$, aby nám následné vzorce vycházely v lepším tvaru.

Nyní ještě předpokládejme, že můžeme bez omezení zaměňovat skalární součin a nekonečnou sumací (tj. můžeme postupovat jako v konečném součtu na začátku našich úvah). V tom případě tedy dostaneme následující vztahy

$$a_0 = \frac{\langle f, \frac{1}{2}\rangle}{\|\frac{1}{2}\|^2} = \tfrac{2}{T} \int_0^T f(t)\, dt,$$

$$a_k = \frac{\langle f, \cos(k\omega t)\rangle}{\|\cos(k\omega t)\|^2} = \tfrac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t)\, dt$$

a

$$b_k = \frac{\langle f, \sin(k\omega t)\rangle}{\|\sin(k\omega t)\|^2} = \tfrac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t)\, dt\ .$$

K těmto vzorcům jsme tedy došli čistě heuristicky, aniž bychom o jejich vztahu k výše zmíněné radě mohli v tuto chvíli něco říct. Nyní si je naopak vezmeme jako základ pro definici Fourierovy řady, o které se pak dají už dokazovat tvrzení.

Definice: Nechť f je T-periodická funkce, která je integrabilní na intervalu $[0, T]$.

Její *Fourierovu řadu* definujeme jako $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \big[a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\big]$, kde $\omega = \frac{2\pi}{T}$ je její frekvence, a koeficienty jsou definované výše uvedenými vzorci. Přiřazení Fourierovy řady funkci f pak zapisujeme jako

$$f \sim \tfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big[a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\big].$$

Tvrzení: (i) Pokud f je lichá, pak $a_k = 0$ a $b_k = \frac{4}{T} \int\limits_0^{T/2} f(t) \sin(k\omega t)\, dt$ (neboli při rozvoji nepoužíváme sudé funkce $\cos(k\omega t)$ a konstantu 1).

(ii) Pokud f je sudá, pak $b_k = 0$ a $a_k = \frac{4}{T} \int\limits_0^{T/2} f(t) \cos(k\omega t)\, dt$ (neboli při rozvoji nepoužíváme liché funkce $\sin(k\omega t)$).

Použili jsme prostě to, že pro sudou funkci g s periodou T a pro každé $c \in \mathbb{R}$ je

$$\int_0^T g(t)\, dt = \int_{0+c}^{T+c} g(t)\, dt = \int_{-T/2}^{T/2} g(t)\, dt = 2 \int_0^{T/2} g(t)\, dt$$

a podobně pro lichou h s periodou T a pro každé $c \in \mathbb{R}$ je

$$\int_0^T h(t)\, dt = \int_{0+c}^{T+c} h(t)\, dt = \int_{-T/2}^{T/2} h(t)\, dt = 0\ .$$

Jordanovo kritérium: Nechť f je T-periodická funkce, která je po částech spojitá na nějakém intervalu I délky T. Předpokládejme, že její derivace f' je po částech spojitá na I.

Nechť $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \big[a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\big]$. Pak pro každé $t \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{N\to\infty} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \big[a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\big] \right) = \tfrac{1}{2}[f(t^-) + f(t^+)].$$

Pokud je f navíc spojitá na $\mathbb{R}$, pak $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \big[a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\big]$ konverguje k f *stejnoměrně.*

Parsevalova rovnost: Nechť f je T-periodická funkce, která má konečný integrál z f a z f^2 na nějakém intervalu I délky T. Pak pro koeficienty a_n, b_n z její Fourierovy řady platí rovnost

$$\frac{2}{T} \int_0^T f^2(t)\, dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

.

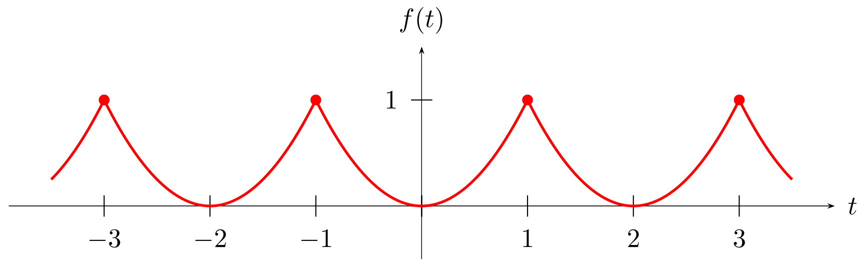
Parsevalova rovnost je vlastně zobecněná Pythagorova věta, jak je vidět z jejího ekvivalentního přepisu na tvar:

$$\underbrace{\|f\|^2}_{\int_0^T f^2(t)\,dt} = \underbrace{\|a_0 \cdot \tfrac{1}{2}\|^2}_{a_0^2 \cdot \frac{T}{4}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\underbrace{\|a_k \cos(k\omega t)\|^2}_{a_k^2 \cdot \frac{T}{2}} + \underbrace{\|b_k \sin(k\omega t)\|^2}_{b_k^2 \cdot \frac{T}{2}} \right).$$

Př. Určete Fourierovu řadu periodického rozšíření funkce

$$f(t) = t^2, \quad t \in [-1, 1)$$

(tj. s periodou $T = 2$) a určete její součet.



Řešení:
Pro naši funkci f máme $T = 2$, takže $\omega = \pi$. Dostáváme tak

$$a_0 = \tfrac{2}{2} \int_0^2 f(t)\, dt = \int_{-1}^1 f(t)\, dt = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3},$$

$$a_k = \tfrac{2}{2} \int_{-1}^1 \underbrace{t^2 \cos(k\pi t)}_{\text{sudá}}\, dt = 2 \int_0^1 t^2 \cos(k\pi t)\, dt = \underbrace{\left[2t^2 \tfrac{\sin(k\pi t)}{k\pi}\right]_{t=0}^{t=1}}_{=0} - \int_0^1 4t \tfrac{\sin(k\pi t)}{k\pi}\, dt =$$

$$= \left[4t\tfrac{\cos(k\pi t)}{(k\pi)^2}\right]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 4\tfrac{\cos(k\pi t)}{(k\pi)^2}\,dt = \frac{4\cos(k\pi)}{\pi^2 k^2} - \underbrace{\left[4\tfrac{\sin(k\pi t)}{(k\pi)^3}\right]_{t=0}^{t=1}}_{=0} = \frac{4(-1)^k}{\pi^2 k^2},$$

$$b_k = \tfrac{2}{2}\int_{-1}^{1} \underbrace{t^2 \sin(k\pi t)}_{\text{lichá}}\,dt = 0.$$

Periodické rozšíření funkce f je všude spojité a podle Jordanova kritéria konverguje všude k původní funkci, tj.

$$f = \tfrac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{4(-1)^k}{\pi^2 k^2}\cos(k\pi t).$$

pro všechna $t \in \mathbb{R}$, neboli speciálně

$$t^2 = \tfrac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{4(-1)^k}{\pi^2 k^2}\cos(k\pi t)$$

pro $t \in [-1, 1]$.

Konkrétní volbou pro $t = 0$ pak takto získáme vztah

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

a pro $t = 1$ pak podobně

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Parsevalova rovnost $\frac{a_0^2}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right) = \int\limits_{-1}^{1} f^2(t)\,dt$ nám pak dává další vzorec

$$\tfrac{2}{9} + \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{16}{\pi^4 k^4} = \int_{-1}^{1} t^4\,dt = \tfrac{2}{5}$$

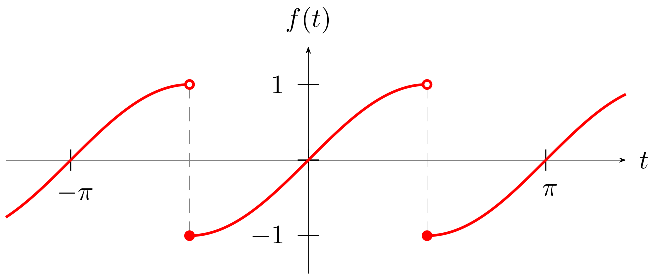
a tedy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}\ .$$

Př. Nalezněte Fourierovu řadu pro periodické rozšíření funkce

$$f(t) = \sin t, \qquad t \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})$$

(tj. s periodou $T = \pi$) a určete její součet.



Řešení:
Pro Fourierovu řadu funkce f máme: $T = \pi$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$ a $\frac{2}{T} = \frac{2}{\pi}$. Z lichosti f plyne, že všechny koeficienty a_k jsou nulové. Pro koeficienty b_k (opět z lichosti) máme

$$b_k = 2 \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cdot \sin(2kt)\, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\cos(2k-1)t - \cos(2k+1)t \Big)\, dt =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin(2k-1)t}{2k-1} - \frac{\sin(2k+1)t}{2k+1} \right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} - \frac{(-1)^k}{2k+1} \right) = \frac{8k(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)}$$

protože

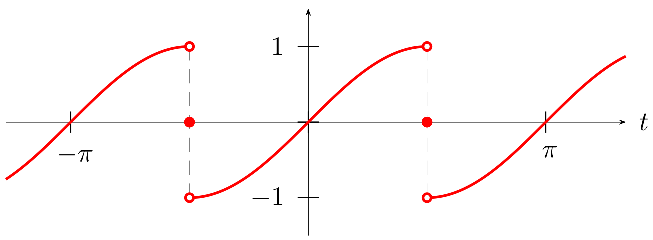
$$\sin\Big((2k+1)\tfrac{\pi}{2}\Big) = (-1)^k \text{ pro } k \in \mathbb{Z} \,.$$

Dostáváme tak

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8k(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)} \sin 2kt,\ t \in \mathbb{R}.$$

Periodické rozšíření funkce f není spojité v bodech $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. V těchto bodech konverguje Fourierova řada k hodnotě $\frac{1}{2}[f(t^-) + f(t^+)] = 0$. Ve všech ostatních bodech konverguje Fourierova řada k periodickému rozšíření funkce f a její graf je:

F.ř. pro f



Poznámka: Použili jsme vzorce

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

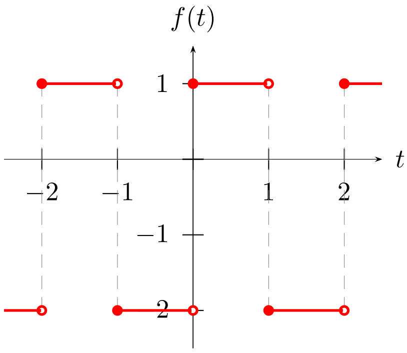
a tedy

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\Big(\cos(x-y) - \cos(x+y) \Big) \,.$$

Př. Nalezněte Fourierovu řadu pro periodické rozšíření funkce

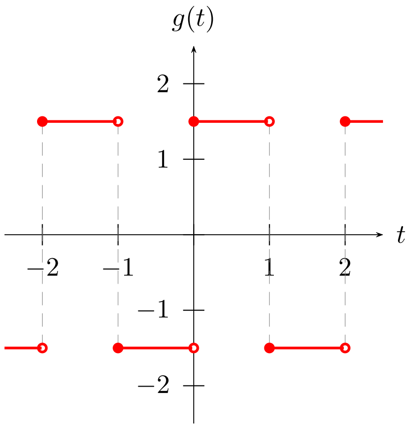
$$f(t) = \begin{cases} 1 & ,\ t \in [0,1), \\ -2 & ,\ t \in [1,2). \end{cases}$$

(tj. s periodou $T = 2$) a určete její součet.



Řešení:
Pro Fourierovu řadu funkce f máme: $T = 2$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$ a $\frac{2}{T} = 1$. Funkce není ani sudá ani lichá, ale vhodným posunutím získáme funkci g, která (téměř) lichá je (alespoň z hlediska integrálu), a sice:

$$g(t) := f(t) + \frac{1}{2} = \begin{cases} \frac{3}{2} & , \ t \in [0,1), \\ -\frac{3}{2} & , \ t \in [-1,0). \end{cases}$$



Najdeme teď Fourierovu řadu pro funkci g (s periodou $T = 2$ a frekvenci $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$). Z lichosti g dostáváme $a_i = 0$ pro $i = 0, 1, \dots$ a pro zbylé koeficienty máme

$$b_k = \tfrac{4}{T} \int_0^{T/2} g(t) \sin(k\omega t)\, dt = 2 \int_0^1 \tfrac{3}{2} \sin(k\pi t)\, dt = -3 \left[\tfrac{\cos(k\pi t)}{k\pi} \right]_{t=0}^{t=1} =$$

$$= 3 \cdot \tfrac{1-(-1)^k}{k\pi} = \begin{cases} 0 & , k \text{ sudé} \\ \frac{6}{\pi(2n-1)} & , k = 2n-1, \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

pro $k \in \mathbb{N}$.

Takže

$$f + \tfrac{1}{2} = g \sim \sum_{k=1}^{\infty} 3 \cdot \tfrac{1-(-1)^k}{k\pi} \sin(k\pi t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{6}{\pi(2n-1)} \sin\big((2n-1)\pi t\big)$$

a podle Jordanova kritéria je

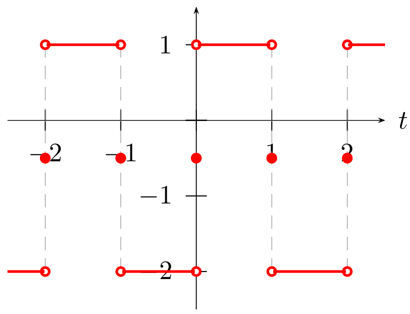
$$\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{6}{\pi(2n-1)} \sin\big((2n-1)\pi t\big) = \begin{cases} 0 & , t \in \mathbb{Z} \\ g(t) & , t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \,. \end{cases}$$

Úpravou pak získáme:

$$f \sim -\tfrac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{6}{\pi(2n-1)} \sin\big((2n-1)\pi t\big) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & , t \in \mathbb{Z} \\ f(t) & , t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \, . \end{cases}$$

kde součet Fourierovy řady pro f má graf

F.ř. pro f



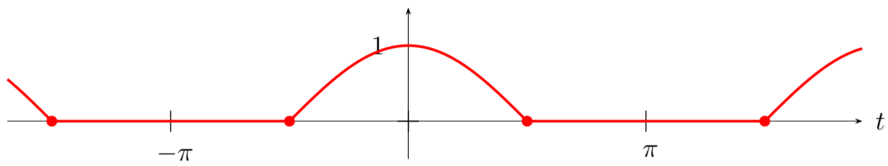
To, že jsme takto získali skutečně Fourierovu řadu pro f, plyne z její jednoznačnosti (nebo snadno z linearity výpočtu koeficientů).

Př. Nalezněte Fourierovu řadu pro periodické rozšíření funkce

$$f(t) = \begin{cases} \cos t & , \ t \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ 0 & , \ t \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \end{cases}$$

(neboli funkci $\max\{\cos t, 0\}$ s periodou $T = 2\pi$) a určete její součet.

$f(t)$



Řešení:

Perioda naší funkce je $T = 2\pi$, frekvence je $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$ a $\frac{2}{T} = \frac{1}{\pi}$. Funkce f je sudá. Proto $b_k = 0$ pro $k = 1, 2, \ldots$ a dále ze sudosti f máme pro zbyle koeficienty Fourierovy řady funkce f, ze:

$$a_0 = 2 \cdot \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} f(t)\, dt = 2 \cdot \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \cos t \, dt = \frac{2}{\pi} \Big[\sin t \Big]_{t=0}^{t=\pi/2} = \frac{2}{\pi}.$$

$$a_k = 2 \cdot \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} f(t) \cos(kt)\, dt = 2 \cdot \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \cos t \cos(kt)\, dt = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \big(\cos(k+1)t + \cos(k-1)t \big)\, dt =$$

$$= \{\text{dále platí pro } k \geq 2\} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(k+1)t}{k+1} + \frac{\sin(k-1)t}{k-1} \right]_{t=0}^{t=\pi/2} =$$

$$= \begin{cases} 0 & , k \text{ liché} \\ \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^n}{2n+1} + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right) = -\frac{2(-1)^n}{\pi(4n^2-1)} & , k = 2n,\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

protože

$$\sin\Big((2n+1)\tfrac{\pi}{2}\Big) = (-1)^n \text{ pro } n \in \mathbb{Z}\ .$$

Pro $k = 1$ máme

$$a_1 = \cdots = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\big(\cos 2t + 1\big)\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin 2t}{2} + t\right]_{t=0}^{t=\pi/2} = \frac{1}{2}\ .$$

Takže dostáváme

$$f \sim \tfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big[a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt)\big] =$$

$$= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos t + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos 2nt$$

($a_k = 0$ pro lichá k a pro sudá jsme to přepsali pomocí $k = 2n$)

Periodické rozšíření funkce f je všude spojité a podle Jordanova kritéria konverguje všude k původní funkci, tj.

$$f(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos t + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos 2nt$$

pro všechna $t \in \mathbb{R}$.

Poznámka: Použili jsme vzorce

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$$

a tedy

$$\cos x\cos y = \frac{1}{2}\Big(\cos(x+y) + \cos(x-y)\Big)\ .$$