Úkol č. 3

3.1 Spočítejte $\iiint\limits_E \frac{1}{y}\,\mathrm{d}V$, kde E je shora omezená rovinou $z = y + 2x$ a leží nad oblastí v rovině xy určené křivkami $y^2 = x$ a $y = x$.

3.2 Spočítejte $\iiint\limits_E e^x\,\mathrm{d}V$, kde E je čtyřstěn s vrcholy $(0,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,0)$, $(0,1,1)$. Těleso E načrtněte.

3.3 Pomocí cylindrických souřadnic spočítejte tzv. *moment setrvačnosti homogenního tělesa E (o konstantní hustotě 1) vzhledem k ose z*, tj. integrál

$$M = \iiint\limits_E \Big(v(x,y,z)\Big)^2\,\mathrm{d}V,$$

kde $v(x,y,z)$ je vzdálenost bodu $(x,y,z) \in E$ od osy z. Těleso E je oblast omezená shora paraboloidem $z = 1 - x^2 - y^2$ a zdola rovinou $z = 0$. Těleso E načrtněte.

3.4 Zapište integrál pomocí cylindrických souřadnic a pak ho spočítejte:

$$\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Oblast integrace načrtněte (v kartézských souřadnicích).

3.5 Zapište integrál pomocí sférických souřadnic a pak ho spočítejte:

$$\int\limits_{-3}^{3} \int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int\limits_{0}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

Oblast integrace načrtněte (v kartézských souřadnicích).

3.6 Spočítejte $\int\limits_C (x+y)\,\mathrm{d}s$, kde C je kružnice se středem v $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ a poloměrem $\frac{1}{2}$.

3.7 Vypočítejte hmotnost drátu, který má tvar kružnice dané rovnicemi $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ a $x + z = 0$, je-li jeho (délková) hustota dána jako $h(x,y,z) = |x \cdot y|$.

(Návod: bude se hodit vědět, že parametrizaci elipsy $\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$ je vhodné dělat jako $u = a\cos\varphi$ a $v = b\sin\varphi$.)

3.8 Určete práci $\int\limits_C \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{s}$ síly $\vec{F}(x,y) = \big(x^2, xy\big)$, kde křivka C se skládá z navazujících orientovaných křivek C_1 a C_2, přičemž

- C_1 je horní polovina (tj. $y \geq 0$) elipsy $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ s kladnou orientací (tj. proti směru hodinových ručiček) a
- C_2 je úsečka vedoucí z bodu $A = (-2, 0)$ do bodu $B = (-3, 3)$.

Křivku C i s její orientaci načrtněte.

3.9 Ukažte, že pole $\vec{F}(x,y,z) = (e^x \cos y + yz,\ xz - e^x \sin y,\ xy + z)$ je konzervativní a najděte jeho potenciál. Pomocí něj spočítejte integrál $\int\limits_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$, kde C je cesta z bodu $A = (1,0,2)$ do bodu $B = (0,\pi,1)$.